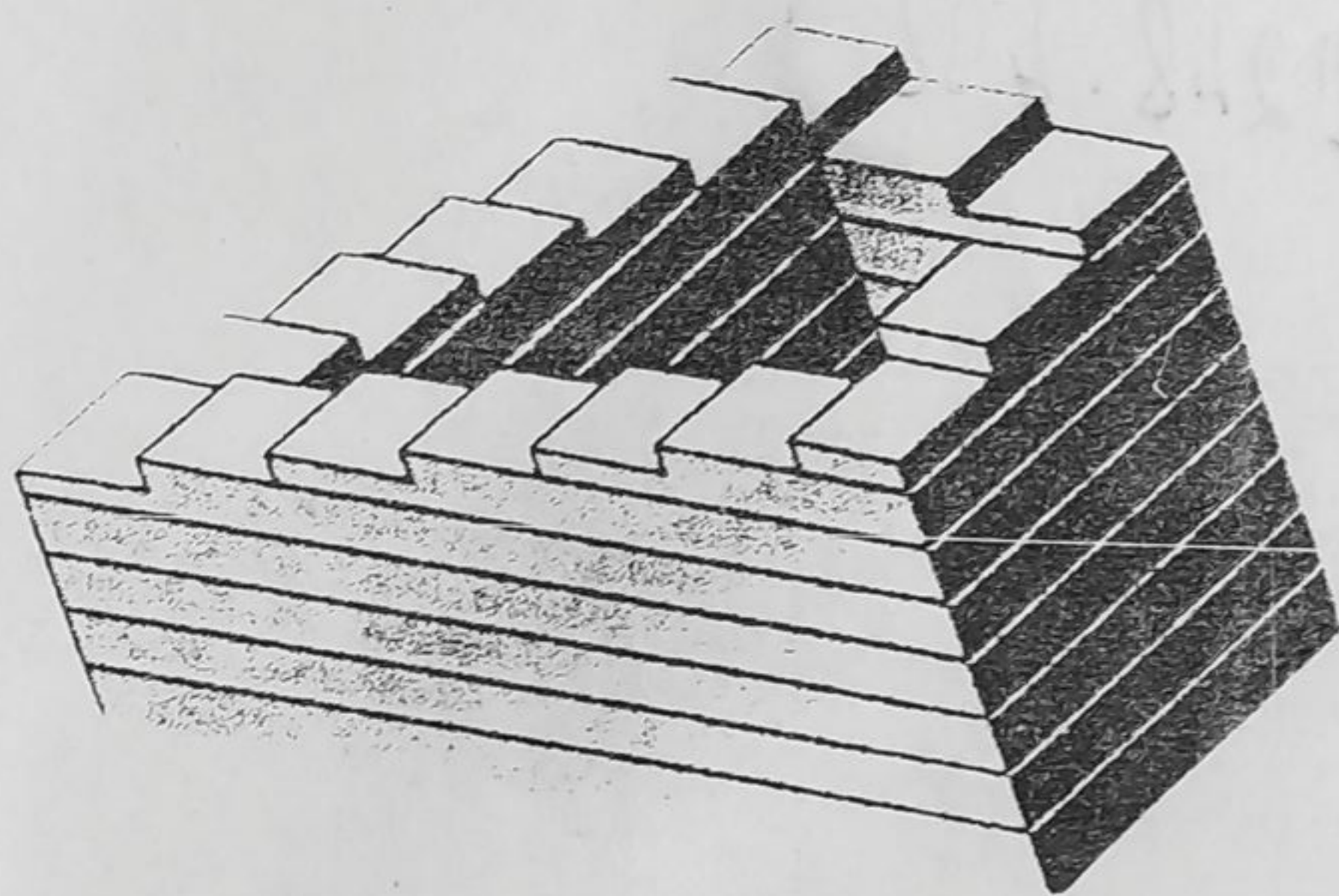


CONSTANTIN CEACĂR

**PREPARAȚII  
DE  
OPTICĂ**



EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI  
- 1997 -





CONSTANTIN CEACÂR

31595

# PREPARATII DE OPTICĂ



0 00000916662

BCU LAȘI



EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI  
1996



## PREFAȚĂ

Cartea prezentă este elaborată după notițele unui profesor preparator (încorect numit meditator) pregătite pentru elevii cu performanțe școlare mai modeste.

Titlul cărții explică tratarea deosebită a fenomenelor și a rezolvărilor de probleme. Nu s-a pus accent atât de mult pe originalitatea problemelor, cât pe alegerea acelor probleme considerate de referință (ale căror autori au fost menționați în text și la bibliografie).

Experiența didactică arată că pentru o mare parte din elevii considerați în prezent ca neperformanți, este utilă prezentarea redundantă a unor calcule, desene, notații, uneori subînțelese, dar pe care elevul trebuie să le vadă, măcar într-o carte, în mod repetat.

Este important ca elevul să vadă concret toate etapele de rezolvare, inclusiv cele de calcul aritmetic elementar. Tot timpul în școală se presupune că elevul știe să facă socoteli aritmetice, fapt neevident căci experiența de la catedră arată că rezultatele elevilor sunt divergente.

Cartea este structurată ca un manual alternativ și cuprinde materia în ordinea tradițională, fiind utilă în primul rând elevilor și profesorilor de liceu. Dar cartea este în egală măsură utilă și pentru candidații la examenul de admitere în facultate, studenților din primii ani, tehnicienilor precum și oricărui autodidact care dorește să se inițieze în acest capitol de Fizică, devenit extrem de actual în tehnica de vârf a comunicațiilor, în dezvoltarea unor ramuri de tehnică cum este Optica Electronică.

Autorul mulțumește călduros tuturor celor care vor aduce observații și completări la această carte.

Prof. gr. I Constantin Ceacâr  
Liceul de Informatică București



## CUPRINS

<b>CAPITOLUL I. NOȚIUNI INTRODUCTIVE</b>	<b>9</b>
1.1. Rază de lumină	9
1.2. Fascicol de lumină	9
1.3. Stigmatism	10
1.4. Indice de refracție	11
1.5. Principii optice	13
1.6. Aproximația gaussiană	14
<b>CAPITOLUL II. FENOMENE LUMINOASE</b>	<b>15</b>
2.1. Reflexia luminii	15
2.1.1. Construcția imaginilor într-o oglindă plană	16
2.1.2. Elemente ce caracterizează imaginea	18
2.1.3. Probleme rezolvate la oglinda plană	19
2.2. Refracția luminii	31
2.2.1. Reflexia totală	33
2.2.2. Trecerea luminii printr-o placă cu fețe plan paralele	34
2.2.3. Construcția imaginii unui punct luminos prin lama cu fețe plan-paralele	35
2.2.4. Probleme rezolvate	36
<b>CAPITOLUL III. PIESE OPTICE</b>	<b>48</b>
3.1. Prisma optică	48
3.1.1. Construcția și elementele prisme	48
3.1.2. Deviația minimă	50
3.1.3. Condiția de emergență	51
3.1.4. Prisma cu reflexie totală	51
3.1.5. Construcția imaginilor prin prismă	52
3.1.6. Probleme rezolvate cu prisme	53
3.2. Dioptrul sferic	65
3.2.1. Elementele dioptrului sferic	65
3.2.2. Convenția de semne	66
3.2.3. Relația punctelor conjugate	68
3.2.4. Focarele dioptrului sferic	69
3.2.5. Construcția imaginilor în dioptrul sferic	73
3.2.6. Mărirea liniară transversală	73
3.2.7. Formula Lagrange-Helmholtz	75
3.2.8. Formula Newton	76



3.3. Dioptrul plan .....	77
3.3.1. Dioptrul plan transparent .....	77
3.3.2. Dioptrul plan-reflectant (oglinzina plană) .....	78
3.3.3. Probleme rezolvate .....	78
3.4. Oglinzi sferice .....	82
3.4.1. Elementele oglinzii sferice .....	82
3.4.2. Convenția de semn pentru distanțe și unghiuri .....	83
3.4.3. Formulele oglinzilor sferice .....	83
3.4.4. Construcția imaginilor în oglinzile sferice .....	84
3.4.5. Tipuri de imagini în oglinzile sferice .....	85
3.4.6. Probleme rezolvate .....	88
3.5. Lentile subtiri .....	101
3.5.1. Formula lentilelor subtiri .....	101
3.5.2. Convenția de semn pentru distanțe .....	102
3.5.3. Focarele unei lentile .....	104
3.5.4. Tipuri de lentile, convergente și divergente .....	106
3.5.5. Mărirea liniară transversală a lentilelor .....	106
3.5.6. Tipuri de imagini formate de lentilele convergente .....	107
3.5.7. Asociații de lentile subtiri .....	110
3.5.8. Sistem afocal de lentile .....	112
3.5.9. Aberrațiile lentilelor .....	112
3.5.10. Probleme rezolvate .....	113
<b>CAPITOLUL IV. INSTRUMENTE OPTICE .....</b>	<b>139</b>
4.1. Tipuri de instrumente .....	139
4.2. Caracteristici optice .....	140
4.3. Ochiul omenesc .....	142
4.3.1. Construcția ochiului .....	142
4.3.2. Defecte de vedere .....	144
4.3.3. Corectarea prezbitismului .....	148
4.3.4. Corectarea miopiei .....	152
4.3.5. Probleme rezolvate .....	155
4.4. Instrumente de proiecție .....	163
4.4.1. Aparat de proiecție de redare .....	163
4.4.2. Aparat de înregistrare (pe film) .....	164
4.5. Instrumente oculare .....	165
4.5.1. Lupa .....	165
4.5.2. Microscopul optic .....	166
4.5.3. Luneta astronomică (Kepler) .....	168
4.5.4. Luneta terestră cu lentilă intermediară .....	171
4.5.5. Luneta terestră (Galilei) .....	172
4.5.6. Telescopul .....	172
4.5.7. Probleme rezolvate .....	173
<b>CAPITOLUL V. FOTOMETRIE .....</b>	<b>184</b>
5.1. Mărimi energetice, Fluxul de energie radiantă .....	184
5.2. Iluminare energetică .....	185



5.3. Fluxul energetic .....	185
5.4. Luminanța energetică .....	187
5.5. Mărimi fotometrice, Fluxul luminos .....	187
5.6. Intensitate luminoasă .....	189
5.7. Iluminare fotometrică .....	189
5.8. Luminanță .....	190
5.9. Legea Lambert .....	191
5.10. Măsurări fotometrice .....	191
5.11. Randament în radiația vizibilă .....	192
5.12. Probleme rezolvate .....	192
<b>CAPITOLUL VI. OPTICA ONDULATORIE .....</b>	<b>198</b>
6.1. Unde luminoase .....	198
6.2. Monocromaticitatea .....	199
6.3. Efectul Doppler în Optică .....	199
6.4. Intensitatea energetică a luminii .....	202
6.5. Interferența luminii .....	204
6.6. Dispozitive interferențiale .....	209
6.6.1. Dispozitivul Young .....	209
6.6.2. Oglinzile Fresnel .....	213
6.6.3. Dispozitivul Lloyd .....	214
6.6.4. Biprisma Fresnel .....	216
6.6.5. Bilentila Billet .....	224
6.6.6. Probleme rezolvate .....	226
6.7. Interferență în lame subțiri cu fețe plan-paralele .....	231
6.8. Franje de egală grosime .....	234
6.8.1. Pana optică .....	234
6.8.2. Pana de aer .....	236
6.8.3. Inelele lui Newton .....	238
6.9. Interferența în lumina albă .....	240
6.10. Aplicații ale fenomenelor de interferență .....	242
6.10.1. Optica albastră .....	242
6.10.2. Verificarea planeității suprafețelor .....	242
6.11. Difrakția luminii .....	243
6.11.1. Difrakția Fraunhofer .....	244
6.11.2. Rețeaua de difracție .....	245
6.11.3. Calculul intensității franjelor produse de o singură fantă .....	248
6.11.4. Calculul intensității franjelor produse de N fante .....	251
6.11.5. Aplicații ale rețelei de difracție .....	254
6.11.6. Difrakția pe rețele polidimensionale .....	254
6.11.7. Probleme rezolvate .....	256
6.12. Polarizarea luminii .....	257
6.12.1. Polarizarea undelor prin reflexie .....	258
6.12.2. Polarizarea undelor prin birefringență .....	260
6.12.3. Anizotropia optică artificială .....	264
6.12.4. Probleme rezolvate .....	266



<b>CAPITOLUL VII. OPTICA FOTONICĂ</b>	271
7.1. Introducere	271
7.2. Efectul fotoelectric	272
7.3. Emisia liniilor spectrale de către atomi	275
7.4. Efectul Compton	276
7.5. Natura duală corpuscul-undă a luminii	278
7.6. Tratarea probabilistică a fenomenelor cuantice	280
7.7. Natura duală, corpuscul-undă a materiei (De Broglie)	282
7.8. Sensul probabilistic al undelor De Broglie	285
7.9. Relațiile de nedeterminare ale lui Heisenberg	287
7.10. Observații la relațiile de nedeterminare	290
7.11. Probleme rezolvate	291
<b>CAPITOLUL VIII. TESTE DE OPTICĂ, FIZICĂ CUANTICĂ</b>	294
8.1. Instrucțiuni de utilizare	294
8.2. Teste de Optică tipul I	295
8.3. Teste de Optică tipul II	303
8.4. Teste de Optică tipul III	304
8.5.1. Răspunsuri corecte la tipul I	305
8.5.2. Răspunsuri corecte la tipul II	309
8.10. Bibliografie recomandată	310



# CAPITOLUL I

## NOȚIUNI INTRODUCTIVE

### 1.1. Raza de lumină

*Rază de lumină* este o noțiune primară care se poate defini efectuând un paralelism între linia geometrică și un fascicol îngust de lumină, astfel:

Raza de lumină este un fascicol de lumină suficient de îngust care se propagă de alungul unei linii drepte.

Expresia *suficient de îngustă* trebuie înțeleasă ca o idealizare ce nu ține cont de fenomenul de difracție la producerea acestui fascicol. Se apropie de această idealizare fascicolul LASER. Pentru o lentilă de ochelari cu diametrul de câțiva cm, raza de lumină se poate prezenta printr-un fascicol îngust de câțiva mm, pentru o lentilă de microscop cu diametrul de câțiva mm, raza de lumină este un fascicol îngust de câteva sutimi de mm, s.a.m.d, la limită se poate, considera lățimea zero, iar fascicolul se reprezintă grafic printr-o linie dreaptă mai subțire sau mai groasă în funcție de mărimea desenului. Practic se constată că la dimensiuni ale fantelor de ordinul micronilor fenomenul de difracție nu se poate neglija.

### 1.2. Fascicolul de lumină

Considerând raza de lumină o noțiune primară, putem defini, fascicolul de lumină în două feluri:

1. Fascicolul de lumină reprezintă lumina ce provine de la o sursă luminoasă, delimitată în spațiu de un con cu vârful în sursă, cu o deschidere oarecare.

2. Fascicolul de lumină reprezintă un mănunchi de raze luminoase. Poate fi:



**Fascicol divergent** - mănunchiul de raze care pornesc toate dintr-un punct numit sursă și se împrăștie în interiorul unui con.

**Fascicol convergent** - mănunchiul de raze care sosesc și se intersectează într-un punct, formând un con cu vârful în  $S'$  după cum se poate vede în figura de mai jos.

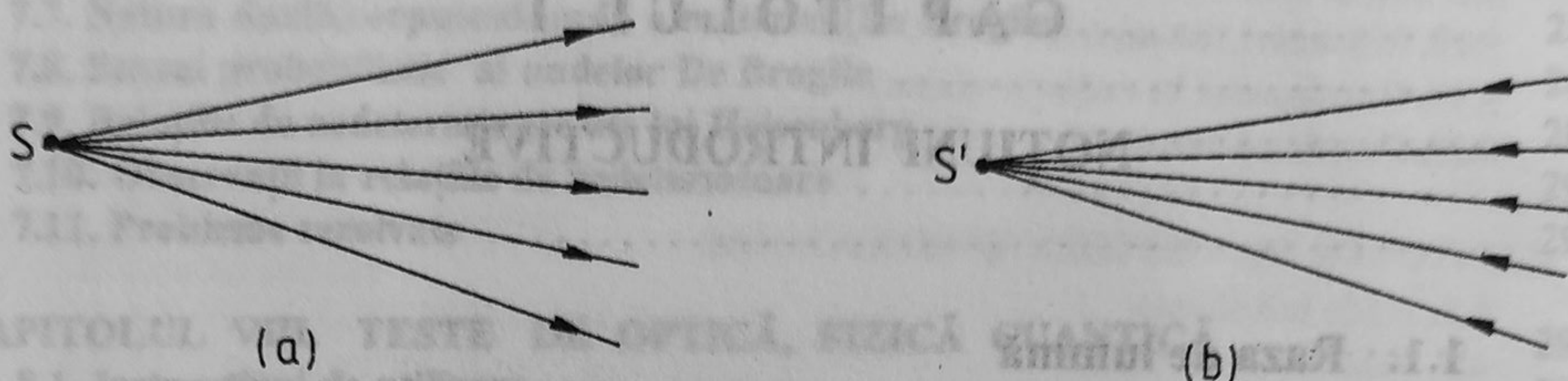


Fig. 1

**Fascicol paralel** - mănunchiul de raze care se propagă paralel una față de cealaltă.

### 1.3. Stigmatismul

**Stigmatismul** este o proprietate a sistemelor optice de a produce imagini punctuale ale unor obiecte punctuale. Imaginea unui punct se formează prin intersectarea razelor emergente din sistemul optic într-un singur punct.

În figura de mai jos se indică suprafețele de intrare și ieșire din sistem, punctele  $F_1$  și  $F_2$  în desen:

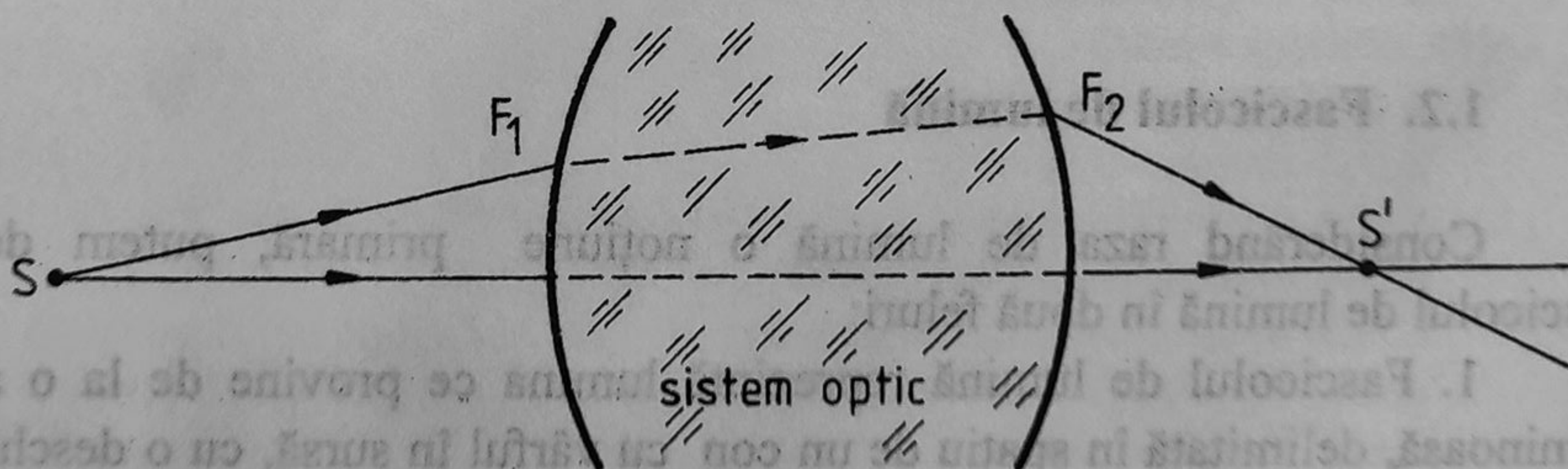


Fig. 2

De la sursă pleacă un fascicol divergent, la ieșirea din sistemul optic se obține un fascicol convergent în punctul  $S'$  care este imaginea stigmatică



a punctului S. Practic, nu se pot obține decât imagini aproximativ stigmatice căci imaginea S' a unui obiect punctual nu este punctuală, ci un cerc cu raza diferită de zero.

Această pată luminoasă, poate fi considerată totuși punctiformă dacă raza ei este mai mică decât jumătatea distanței minime dintre două puncte ce pot fi văzute de ochi ca fiind separate.

**Puncte conjugate** - sunt acele puncte luminoase care realizează o corespondență biunivocă între ele prin sistemul optic. În figura de mai sus punctele S și S' sunt puncte conjugate.

**Imagine reală** - este imaginea ce se obține la intersecția de raze emergente reale. O astfel de imagine poate fi văzută pe un ecran.

**Imagine virtuală** - este imaginea care se obține la intersecția prelungirilor razelor emergente. Această imagine nu poate fi prinsă pe un ecran, direct, decât cu ajutorul unei lentile convergente suplimentare. Poate fi văzută și cu ochiul liber căci cristalinul este din punct de vedere optic o lentilă convergentă după cum vom vedea în capitolul IV.

**Axa optică principală** - este linia de simetrie a unui sistem optic, dealungul căreia se propagă ne deviată o rază de lumină.

**Axa optică secundară** - este orice dreaptă care trece prin centrul optic, înclinată față de axa optică principală, de alungul căreia o rază de lumină se propagă fără deviație, cel mult suferă o translație neglijabilă.

#### 1.4. Indice de refracție

**Indicele de refracție absolut** - este un raport ce caracterizează mediul optic, indicând de câte ori viteza luminii în vid (notată cu "c") este mai mare decât viteza luminii prin mediul dat (notată cu "v").

**Indicele de refracție relativ** - este un raport ce caracterizează o suprafață de discontinuitate între două medii optice diferite, arătând de câte ori viteza luminii prin mediul de ieșire este mai mare (sau mai mică) decât viteza luminii prin mediul de intrare:

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Numai în vid lumina se propagă cu viteza uriașă de 300000 km/sec., în toate celelalte medii cunoscute viteza  $v < c$ . Deducem că indicele de refracție absolut este totdeauna mai mare ca unitatea iar indicele de refracție relativ poate fi mai mic ca unitatea. Numai când primul mediu este aerul, indicele relativ coincide cu indicele absolut.



Exemple de medii cu indici de refracție absoluți sunt date în tabelul de mai jos:

Aceste valori sunt date pentru lumina albă, deci sunt valori medii. După cum vom vedea mai jos, acești indici de refracție depind de lungimea de undă a radiației folosite.

Experimental observăm că substanțele transparente sunt cu atât mai refringente (reflexiile de lumină sunt mai strălucitoare) cu cât indicele de refracție este mai mare.

Aer	1,00029
Apă	1,33
Alcool etilic	1,36
Bisulfură de carbon	1,63
Iodură de metilen	1,74
Cuarț	1,46
Sticlă obișnuită	1,50
Sticlă crown	1,52
Sticlă flint	1,66
Clorură de natriu	1,53
Polietilenă	1,5 - 1,54
Fluorită	1,43
Diamant	2,42

Indicele de refracție atât pentru lichide cât și pentru solide constituie un parametru fizic caracteristic și poate servi la aprecierea substanței respective.

**Mediu optic omogen și izotrop** - este un mediu optic cu aceeași densitate, prin care raza de lumină se propagă în toate direcțiile cu aceeași viteză.

Într-un mediu optic omogen, indicii de refracție are aceeași valoare în orice punct.

Îndată ce apare o discontinuitate în valoarea indicelui de refracție (o suprafață de separație dintre două medii), raza de lumină suferă fie o deviere de la direcția inițială fie o întoarcere înapoi în mediul inițial, fie ambele fenomene într-o anumită proporție bine definită.

De exemplu, la propagarea luminii prin apă se observă o linie luminoasă dreaptă, când raza întâlnește o discontinuitate, sub forma unei bule de gaz care are suprafața de separație sub forma unei sfere), se produce



atât fenomenul de reflexie (raza se întoarce înapoi în apă) cât și fenomenul de refracție (raza de lumină pătrunde în gazul din bulă). Astfel se explică de ce apa ce conține bule microscopice de aer sau aerul ce conține bule microscopice de apă (ceța) prezintă un aspect lăptos.

**Mediu optic anizotrop** - este un mediu optic în care lumina are viteze diferite de propagare, după direcții diferite. Un exemplu poate fi dat de cristalele de Calcită, Cuarț.

## 1.5. Principii optice

*Principiul reversibilității drumului străbătut de lumină*

- Dacă raza de lumină străbate un mediu optic într-un sens, același drum îl poate străbate și în sens invers.

*Principiul independenței fasciculelor de lumină*

- Efectul produs de un fascicol de lumină nu depinde de prezența sau absența simultană a altor fascicule (dacă nu sunt coerente).

*Principiul lui Fermat*

- Într-un mediu optic dat, lumina parcurge acel traseu pe care timpul de propagare este cel mai scurt.

Este util să definim drumul optic:

*Drumul optic* - este drumul parcurs de lumină într-un mediu optic cu indice de refracție diferit de unitate și este egal cu produsul dintre lungimea drumului geometric străbătut de lumină cu viteza " $v$ " și indicele de refracție absolut al mediului. Se notează cu ( $d$ ) și este dat de relația:

$$(d_1) = n \cdot d$$

Introducând noțiunea de drum optic, principiul lui Fermat se poate enunța într-o formă echivalentă: *Intr-un mediu optic, lumina parcurge acel traseu care are drumul optic minim.*

Echivalența celor două formulări se demonstrează astfel: Fie două puncte conjugate  $S$  și  $S'$  situate în două medii cu indici de refracție absoluți  $n_1$  și  $n_2$  separate de o suprafață  $F$ , după cum se vede în figura următoare:

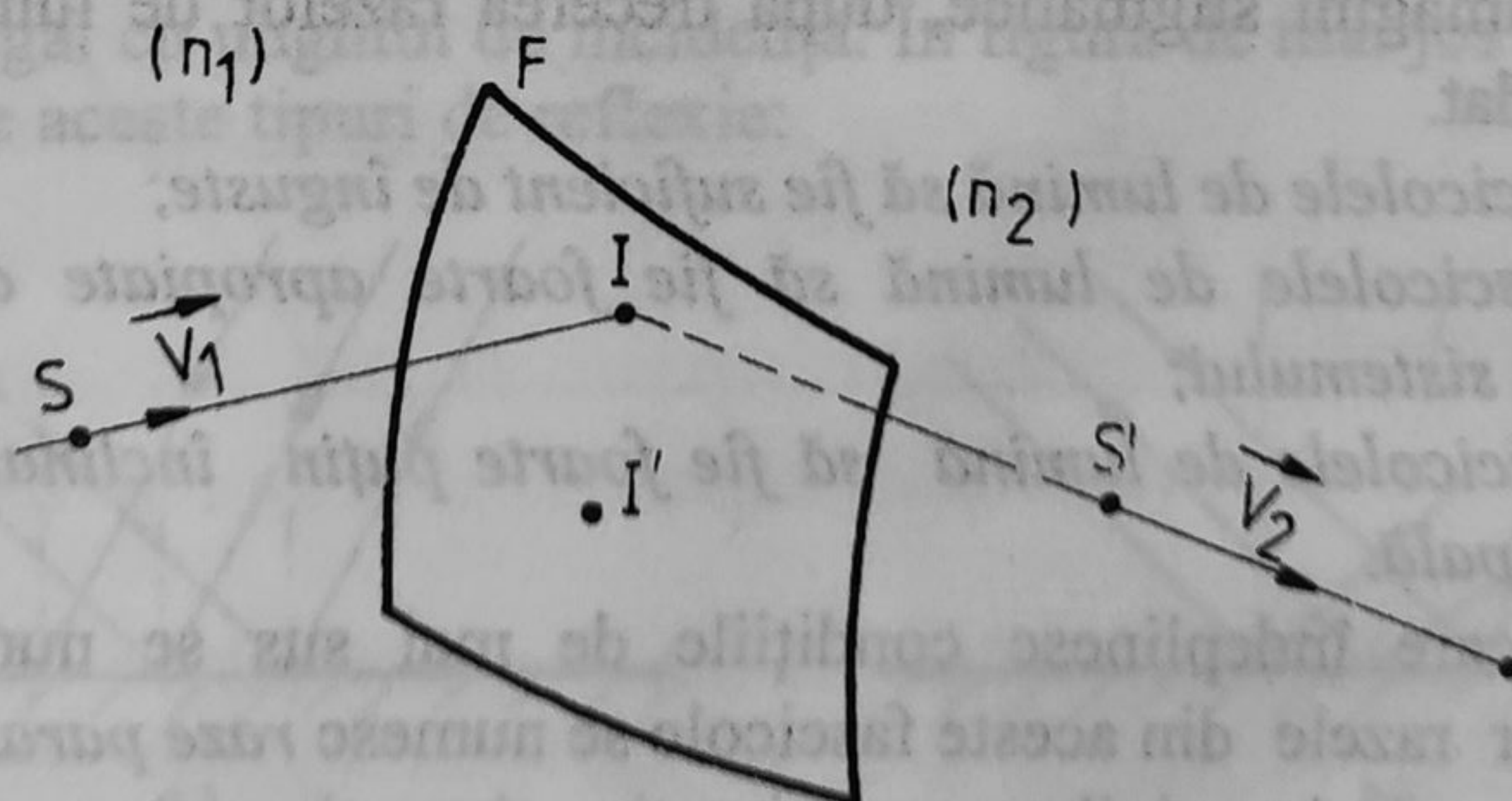


Fig. 3



Timpul în care raza de lumină se propagă din S în S' este obținut din legea mișcării uniforme  $S = v \cdot t$  căci lumina are viteză constantă. Drumul străbătut de lumină între cele două puncte S și S' este egal cu suma drumurilor optice:

$$d' = (d_1) + (d_2)$$

$$\text{unde } (d_1) = SI \cdot n_1 \text{ și } (d_2) = IS' \cdot n_2$$

Să presupunem că ar exista un alt drum SI'S, lumina ar avea de parcurs atunci drumul:

$$d' = (d'_1) + (d'_2)$$

$$\text{unde } (d'_1) = SI' \cdot n_1 \text{ și } (d'_2) = S'I' \cdot n_2$$

Cerința exprimată în prima formulare, de timp minim de propagare, va determina alegerea acelui drum dintre  $d'$  și  $d''$  pe care timpul de propagare este minim. Deoarece indicii de refracție sunt aceeași, rezultă că vom alege drumul pe care  $d_1$  și  $d_2$  respectiv  $d'_1$  și  $d'_2$  reprezintă distanțele geometrice cele mai mici, deci distanța cea mai scurtă dintre două puncte.

NOTĂ: Într-un mediu optic omogen și izotrop, drumul cel mai scurt va fi o linie dreaptă (numai într-un câmp gravitațional slab cum este cel al Pământului), sau o geodezică (în câmpurile gravitaționale puternice, cum sunt cele ale stelelor).

Datorită propagării în linie dreaptă, raza de lumină a fost luată ca model de linie dreaptă pentru geometrie, încă din antichitate, făcând din aceasta o axiomă matematică. Pe această bază, conform postulatelor lui Euclid s-a dezvoltat Geometria Euclidiană. Geometriile neeuclidiene, se aplică la spațiile curbate de câmpurile gravitaționale intense.

Alinierea terestră a bornelor, a tunelelor, cu ajutorul fascicolului LASER (care produce o rază foarte îngustă), este o realizare tehnică nouă a unui principiu mai vechi.

## 1.6. Aproximația Gauss

Această aproximație se referă la condițiile în care se pot obține aproximativ imagini stigmatice, după trecerea razelor de lumină printr-un sistem optic dat.

- a) Fasciculele de lumină să fie suficient de înguste;
- b) Fasciculele de lumină să fie foarte apropiate de axa optică principală a sistemului;
- c) Fasciculele de lumină să fie foarte puțin înclinate față de axa optică principală.

Fasciculele care îndeplinesc condițiile de mai sus se numesc fascicule paraxiale, iar razele din aceste fascicule se numesc raze paraxiale.

Construcția imaginilor aproximativ stigmatice cu razele paraxiale se numește aproximație gaussiană.



## CAPITOLUL II

### FENOMENE LUMINOASE

#### 2.1. Reflexia luminii

**Reflexia** este fenomenul de întoarcere a luminii înapoi în mediul incident când întâlnește o suprafață de separație lucioasă, reflectantă.

Fenomenul de reflexie se produce când lumina cade pe o suprafață lucioasă cum este de exemplu suprafața argintată sau metalul șlefuit sau acoperit cu straturi lucioase: nichelate, cromate, aurite, etc. Lumina care cade pe o oglindă, nu se mai propagă prin acest mediu mai dens și opac ci se întoarce înapoi în mediul din fața oglinzii.

**Reflexia oglindită** este reflexia unui fascicol incident de lumină, îngust, care se face cu respectarea legilor reflexiei pe toată suprafața reflectantă. Prin reflexie oglindită se obține o imagine stigmatică, dar virtuală a unui obiect real.

**Reflexia difuză** este reflexia unui fascicol incident de lumină pe o suprafață mată, cu respectarea legilor reflexiei doar local, căci în ansamblu, datorită orientării diferite a granulelor reflectante, lumina reflectată este îndreptată în toate direcțiile.

Există o **reflexie difuz-dirijată** unde axa de simetrie a luminii difuzate face un unghi egal cu unghiul de incidență. În figura de mai jos se poate vedea deosebirea între aceste tipuri de reflexie:

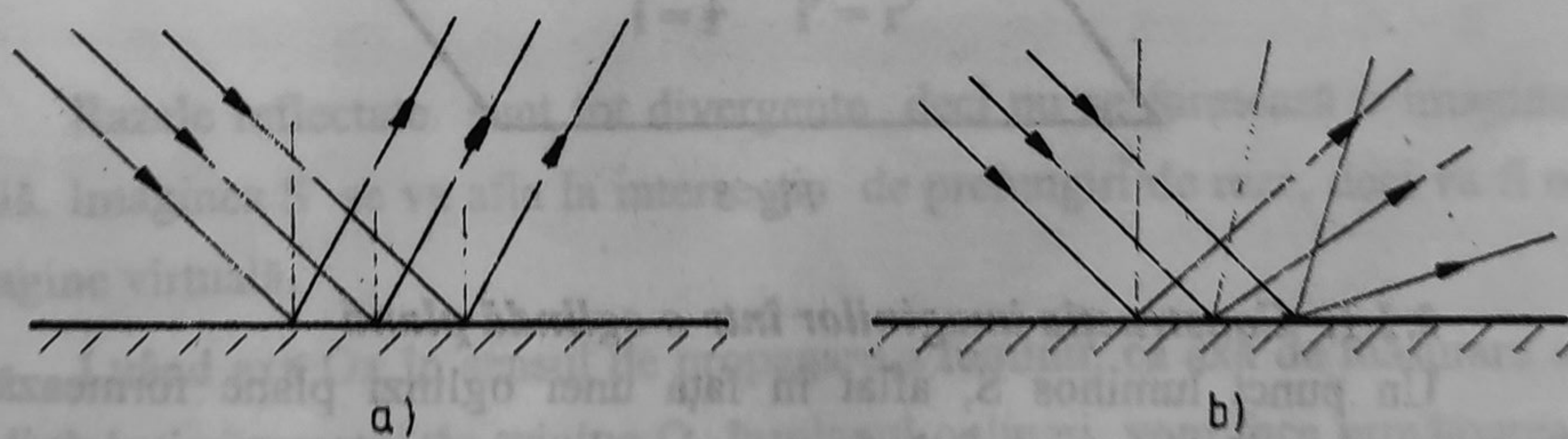


Fig. 4



NOTĂ: La reflexia pe un mediu reflectant, sensul de propagare se schimbă. Acest fapt ne permite să facem o legătură formală între indicele de reflexie al mediului incident ( $n_1$ ) și indicele de reflexie echivalent al suprafeței reflectante ( $n_2$ ):

$$n_1 = \frac{c}{v} \qquad n_2 = \frac{c}{-v}$$

Deci în mod formal mediul reflectant poate fi considerat ca un mediu prin care lumina se propagă în sens invers razei incidente și este caracterizat printr-un indice de refracție echivalent  $n_2 = -n_1$ . De observat că acest indice de refracție este negativ și nu are de a face cu indicele de refracție real al mediului.

**Legile reflexiei** - În mod experimental, cu ajutorul discului lui Hartl, au cu alte dispozitive, au fost puse în evidență două legi de reflexie:

I. Raza incidentă (SI), normala (NI), și raza reflectată (IS') se găsesc în același plan (P);

II. Unghiul de incidență este egal cu unghiul de reflexie  $i = r$ .

Unghiul de incidență - este unghiul format de raza incidentă cu normala (SIN);

Unghiul de reflexie - este unghiul format de raza reflectată cu normala (NIS').

Aceste legi se pot deduce teoretic atât pe baza principiului lui Fermat cât și pe baza principiului lui Huygens din Optica Ondulatorie.

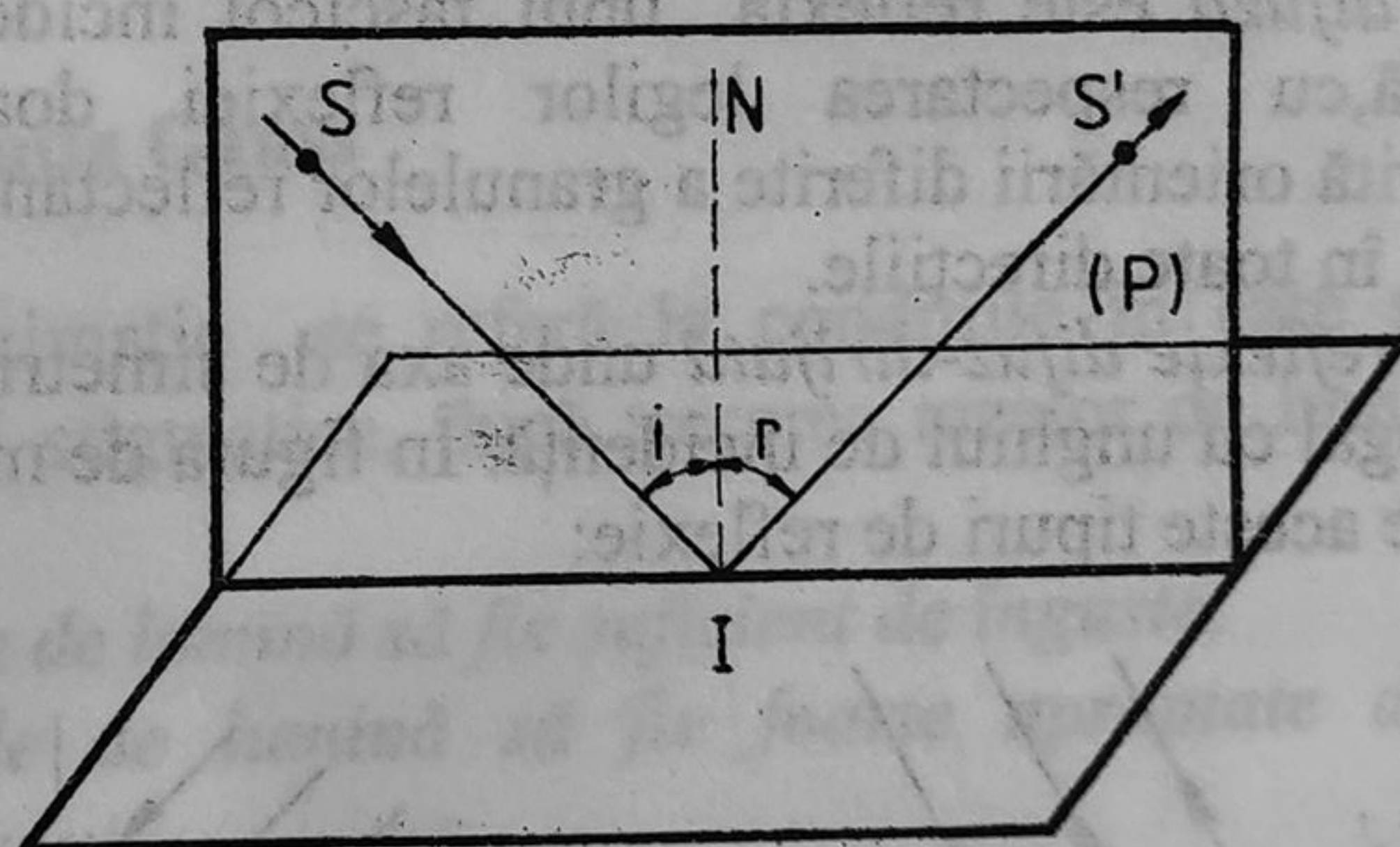


Fig. 5

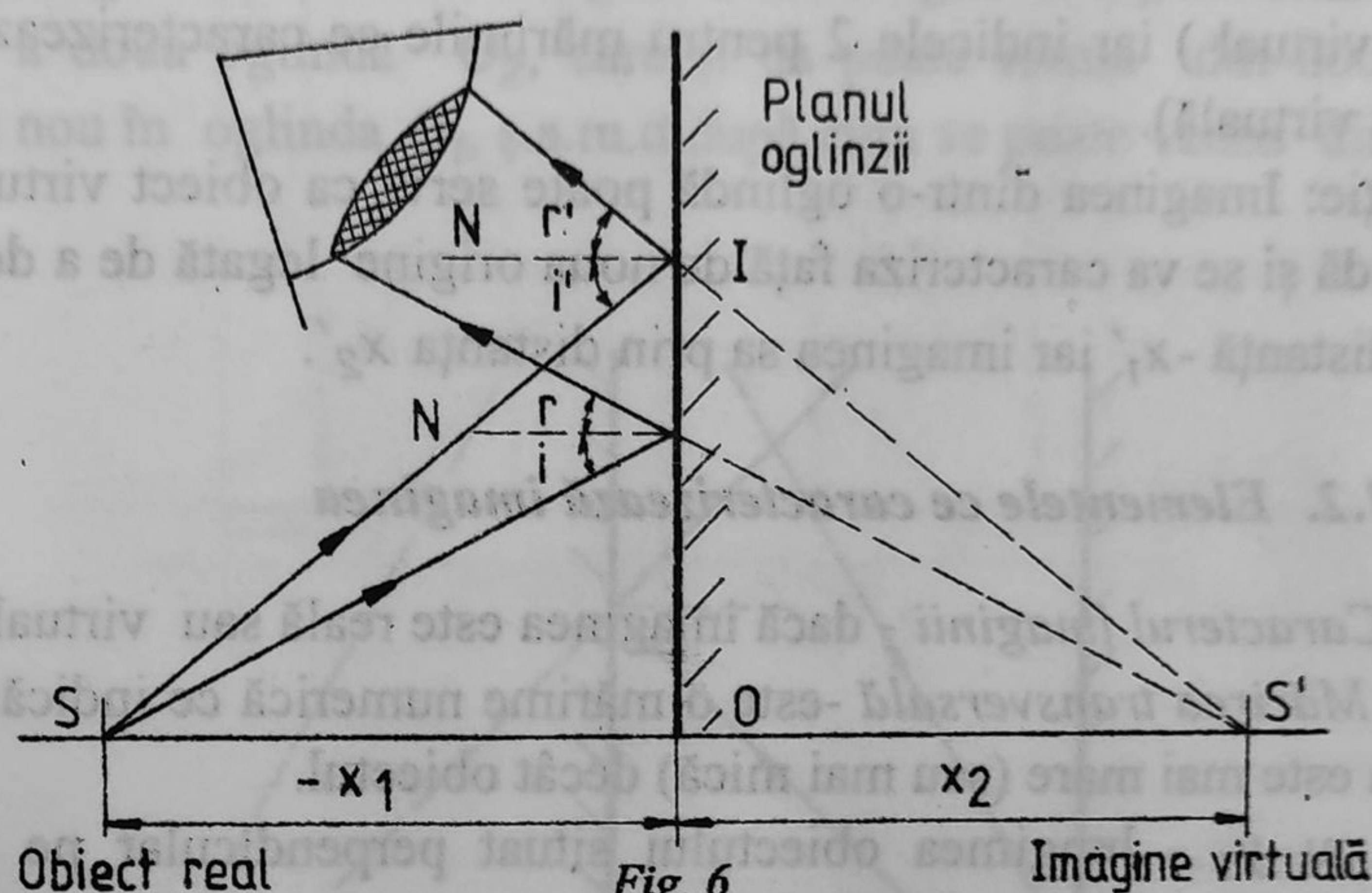
### 2.1.1. Construcția imaginilor într-o oglindă plană

Un punct luminos S, aflat în fața unei oglinzi plane formează o imagine virtuală simetrică față de planul oglinzii. Construcția imaginii se bazează pe cele două legi ale reflexiei.



Deoarece imaginile sunt simetrice obiectelor, se pot aplica legile simetriei față de un plan din Geometria plană.

În figura de mai jos se dă un punct luminos  $S$  care poate fi o sursă de lumină punctuală, sau unul din infinitatea de puncte luminoase de lumină reflectată din care sunt formate toate obiectele care emit sau numai reflectă lumina de la alte surse.



Orice obiect neluminos este constituit dintr-o infinitate de puncte reflectante care reflectă lumina sub forma unui con divergent în toate direcțiile.

Pentru construcția unei imagini fiind suficiente două raze, le vom lua pe acelea al căror mers îl cunoaștem.

Alegem două din razele fascicolului conic care ajung la oglindă și construim razele reflectate conform legii a doua:

$$i = r \quad i' = r'$$

Razele reflectate sunt tot divergente deci nu se formează o imagine reală. Imaginea  $S'$  se va afla la intersecția de prelungiri de raze, deci va fi o imagine virtuală.

Luând axa  $Ox$  în sensul de propagare a luminii, ca axă de măsurare a distanțelor și punctul de origine  $O$  în planul oglinzii, vom face următoarea convenție de semne.



### **Convenția de semne pentru distanțe:**

*Distanțele măsurate în dreapta imaginii (numit și spațiul imaginii virtuale) sunt pozitive, distanțele măsurate în sensul negativ al axei (numit și spațiul obiectelor reale) sunt negative. Deci:*

$$\text{Distanța obiect - oglindă} = -x_1$$

$$\text{Distanța oglindă - imagine} = +x_2$$

În general vom folosi indicele 1 pentru mărimile ce caracterizează obiectul (real sau virtual) iar indicele 2 pentru mărimile ce caracterizează imaginea (reală sau virtuală).

Observație: Imaginea dintr-o oglindă poate servi ca obiect virtual pentru o altă oglindă și se va caracteriza față de noua origine legată de a doua oglindă printr-o distanță  $-x_1'$  iar imaginea sa prin distanța  $x_2'$ .

### **2.1.2. Elementele ce caracterizează imaginea**

a) *Caracterul imaginii* - dacă imaginea este reală sau virtuală.

b) *Mărirea transversală* - este o mărime numerică ce indică de câte ori imaginea este mai mare (sau mai mică) decât obiectul.

Notăm cu  $y_1$  - lungimea obiectului situat perpendicular pe axa optică (îndreptat de alungul axei Oy); cu  $y_2$  - lungimea imaginii sale.

Mărirea transversală  $\beta = \frac{y_2}{y_1}$  cu convenția algebrică de semne:

**Convenția de semne pentru  $\beta$** - Se consideră axa Oy perpendiculară pe Ox ce trece prin centrul O, având sensul pozitiv în sus.

- Orice obiect sau imagine situat deasupra axei Ox are lungimea pozitivă;

- Orice obiect sau imagine situată sub axa Ox are lungimea negativă.

Deci:

$\beta > 0$  înseamnă o imagine de aceeași parte cu obiectul;

$\beta < 0$  înseamnă o imagine inversată (sus-jos) . caracterul simetriei

**Dreapta-Stânga (D-S):**

În anumite sisteme optice, imaginea are partea sa dreaptă corespunzătoare părții stângi a obiectului, cum este cazul imaginii formată de o oglindă plană: un om ce-si mișcă mâna stângă observă la imaginea din față sa că-și mișcă mâna dreaptă. Avem deci o simetrie D-S inversată.

În alte sisteme optice simetria D-S nu este inversată, de exemplu la lentile ținând cont de aceste elemente putem caracteriza imaginea într-o oglindă plană astfel:



*Imaginea este virtuală, egală, dreaptă cu simetria D-S inversată.*

NOTĂ: Un șir de obiecte aliniate în adâncime în fața oglinzii plane, va produce un șir de imagini virtuale situate la distanțe egale de suprafața oglinzii, deci prin oglindire distanțele nu se modifică.

Anumite aranjamente de oglinzi plane pot produce efecte artistice, de exemplu un punct luminos situat între două oglinzi plan-paralele produce o infinitate de imagini căci fiecare imagine dintr-o oglindă  $O_1$ , formează o altă imagine în a doua oglindă  $O_2$ , care și ea poate forma din nou o altă imagine din nou în oglinda  $O_1$ , ș.a.m.d. după cum se poate vedea din figura de mai jos:

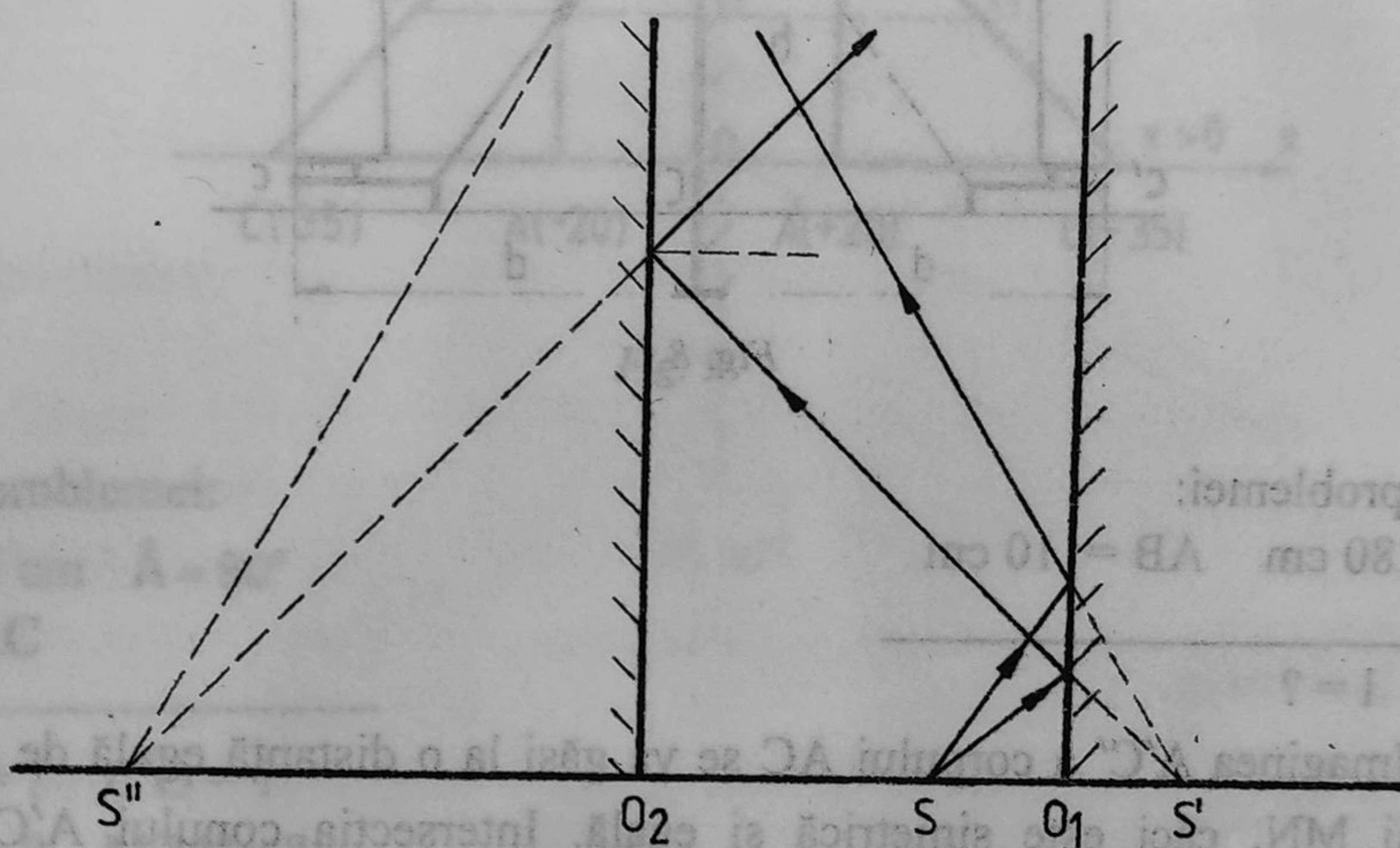


Fig. 7

Datorită transparenței imperfecte a sticlei imaginile se *pierd* în ceață după un număr mic de reflexii succesive.

### 2.1.3. Probleme rezolvate la oglinda plană

1. Un observator cu înălțimea de 1,8 m privește într-o oglindă plană verticală, aflată în fața sa, având marginea de jos la înălțimea  $h$  față de picioare. Stiind că ochii sunt la distanța de 10 cm de partea de sus a șepcii și văd în oglindă imaginea completă a corpului, să se determine lungimea minimă a oglinzii și înălțimea sa față de Pământ.

(Problema din manual-vezi 1.)



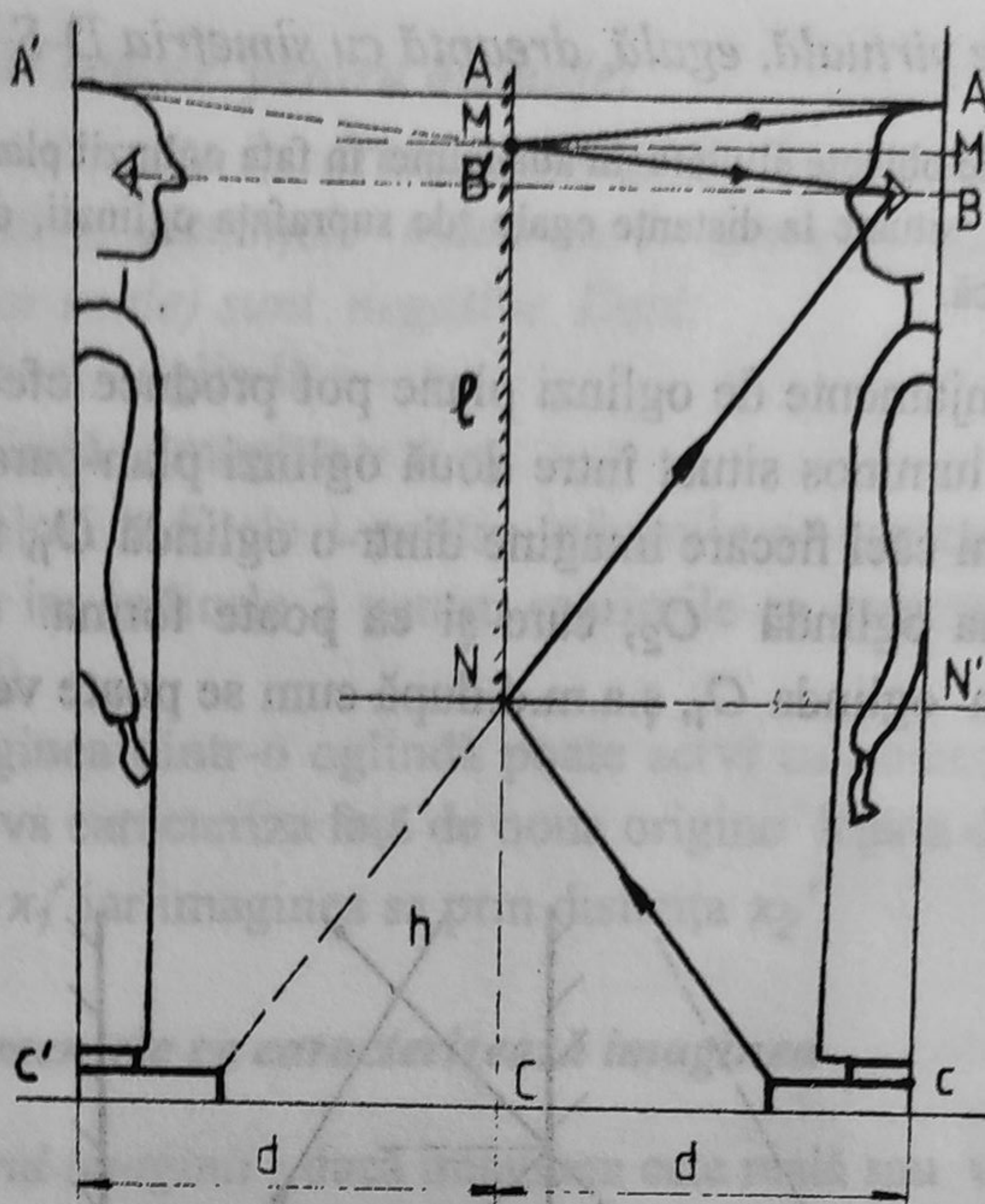


Fig. 8

Datele problemei:

$$AC = 180 \text{ cm} \quad AB = 10 \text{ cm}$$

---


$$h = ? \quad l = ?$$

Imaginea  $A'C'$  a corpului  $AC$  se va găsi la o distanță egală de planul oglinzii  $MN$ , căci este simetrică și egală. Intersecția conului  $A'C'B$  cu planul oglinzii determină mărimea  $l$  a oglinzii precum și înălțimea sa față de pământ.

Se formează triunghiurile asemenea:  $\triangle BMM' \sim \triangle BAA'$

$$\frac{BM}{BA} = \frac{MM'}{AA'} \quad \frac{BM}{BA} = \frac{MM'}{2 \cdot MM'} \quad BM' = \frac{BA}{2} = 5 \text{ cm}$$

$$\triangle BNN' \sim \triangle BCC' \quad \frac{BN}{BC} = \frac{NN'}{CC'} \quad \frac{BN}{BC} = \frac{NN'}{2 \cdot NN'} \quad BN' = \frac{BC}{2} = 85 \text{ cm}$$

Răspuns: Lungimea oglinzii  $l = BM' + BN' = 90 \text{ cm}$ ,

Înălțimea oglinzii  $h = BC - BN' = 85 \text{ cm}$ .

2. Un triunghi dreptunghic isoscel  $ABC$  așezat într-un plan perpendicular pe suprafața oglinzii astfel încât o catetă este paralelă cu oglinda iar cealaltă paralelă cu axa optică, se reflectă în oglindă. Vârful



unghiului drept se găsește la 20 cm de oglindă iar cateta are lungimea de 15 cm. Să se determine:

a) coordonatele imaginilor celor trei vârfuri ale triunghiului în planul XOY;

b) lungimea ipotenuzei din imagine precum și distanța la care se va găsi mijlocul său față de oglindă.

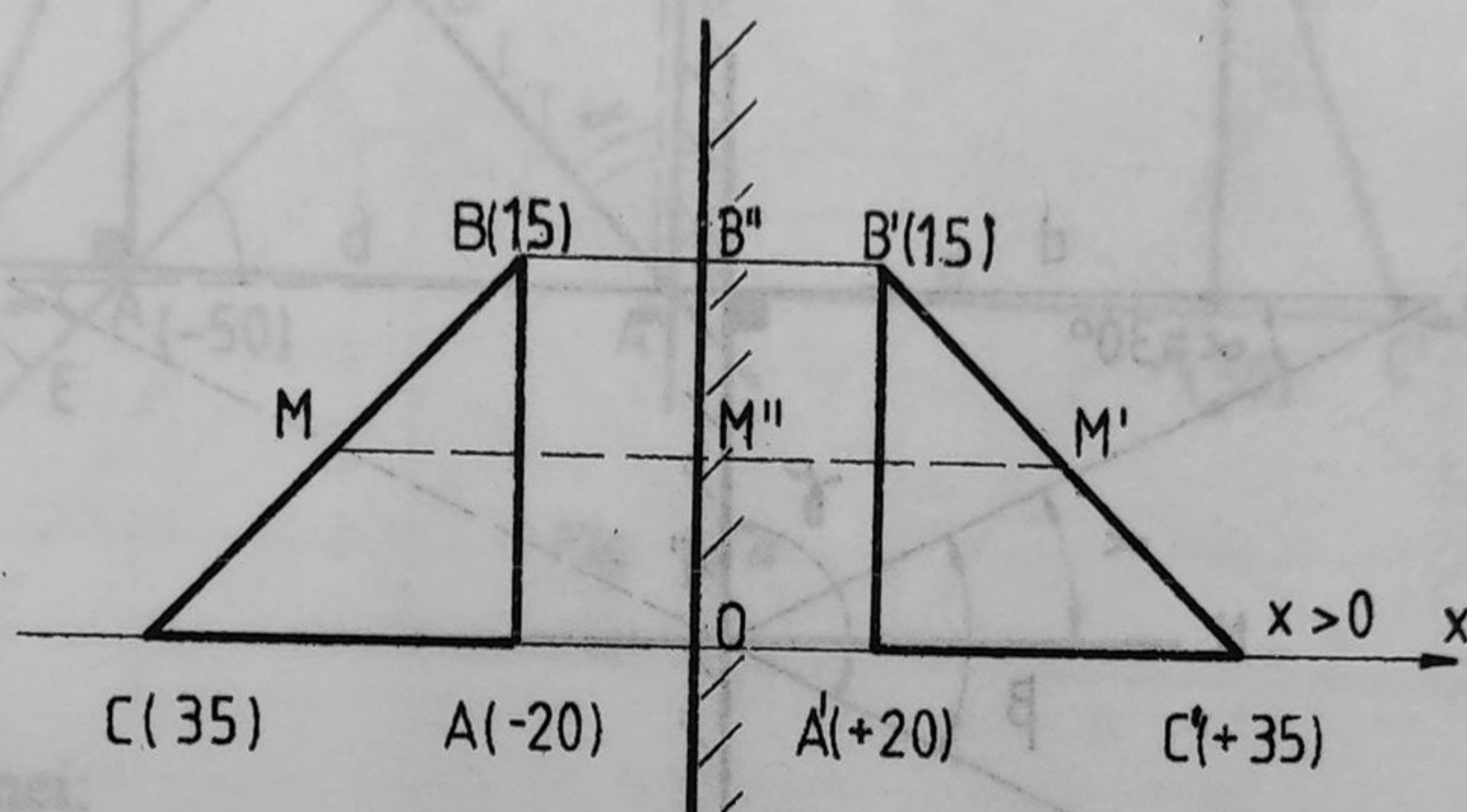


Fig. 9

Datele problemei:

$$AB = 15 \text{ cm} \quad \hat{A} = 90^\circ$$

$$AB = AC$$

a)  $A'O = ? \quad C'O = ?$

b)  $B'C' = ? \quad M'M'' = ?$

a) Imaginea întregului corp se obține construind întâi imaginile punctelor extreme care sunt simetrice față de planul oglinzii. Distanțele sunt date pe desen.

$$b) B'C' = \sqrt{(A'B')^2 + (A'C')^2} = 21 \text{ cm}$$

$M'M''$  este linie mediană în trapezul  $B''B'C'O$  și este egală cu semisuma bazelor:

Răspuns:

$$MM' = \frac{BB' + CC'}{2} = \frac{110}{2} = 55 \text{ cm}$$

$$M'M'' = \frac{MM'}{2} = \frac{55}{2} = 27,5 \text{ cm}$$



3. O sursă S trimite o rază de lumină, perpendiculară pe o oglindă plană de la distanța de 30 cm. Raza de lumină din S se rotește cu  $30^\circ$  și din nou se reflectă pe aceeași oglindă nemișcată. Să se determine:

- ce unghi se va forma între raza incidentă și raza reflectată;
- ce unghi va face raza reflectată cu planul oglinzii;
- ce distanță este între sursă și noul punct de incidentă.

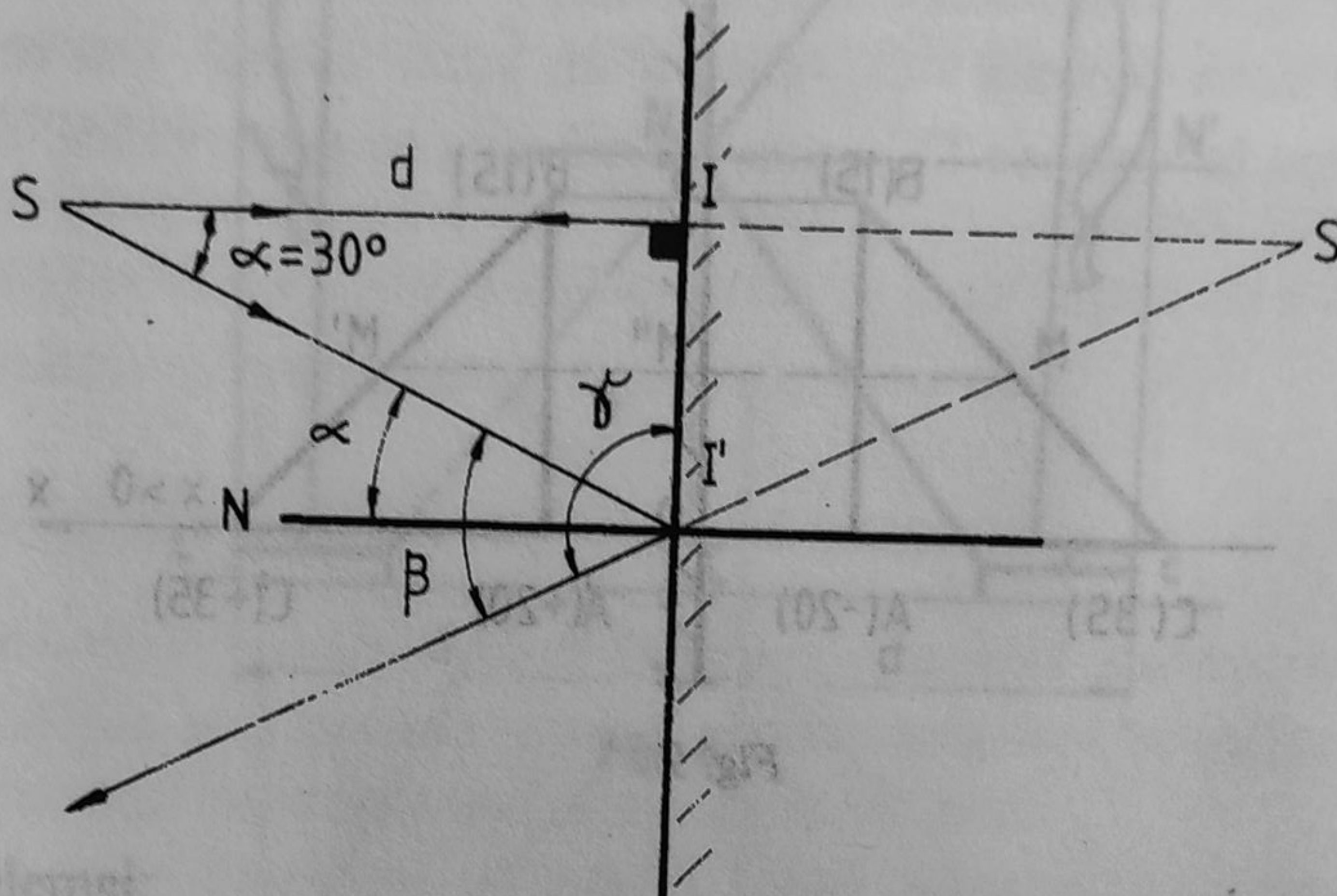


Fig. 10

Datele problemei:

$$\alpha = 30^\circ$$

$$d = SI = 30 \text{ cm}$$

$$a) \beta = ?$$

$$a) \beta = 2 \cdot \alpha = 60^\circ \text{ conform legii reflexiei în } I'$$

$$b) \gamma = ?$$

$$b) \gamma = (90^\circ - \alpha) + \beta = 120^\circ$$

$$c) SI' = ?$$

c) În triunghiul  $SII'$  avem:

$$\sin 60^\circ = \frac{SI}{SI'} \quad SI' = \frac{SI}{\sin 60^\circ} = 20\sqrt{3} \text{ cm}$$

4. Un triunghi dreptunghic oarecare are cateta mai mare paralelă cu oglinda și este situată la 50 cm. Se rotește oglinda în jurul originii cu unghiul  $\alpha$ .

a) să se construiască cele două imagini pentru  $\alpha = 45^\circ$ ;

b) să se determine cu câte grade s-a rotit imaginea catetei mari ( $\alpha = 30^\circ$ );

c) la ce distanță de orizontală se va găsi vârful unghiului drept în acest caz.



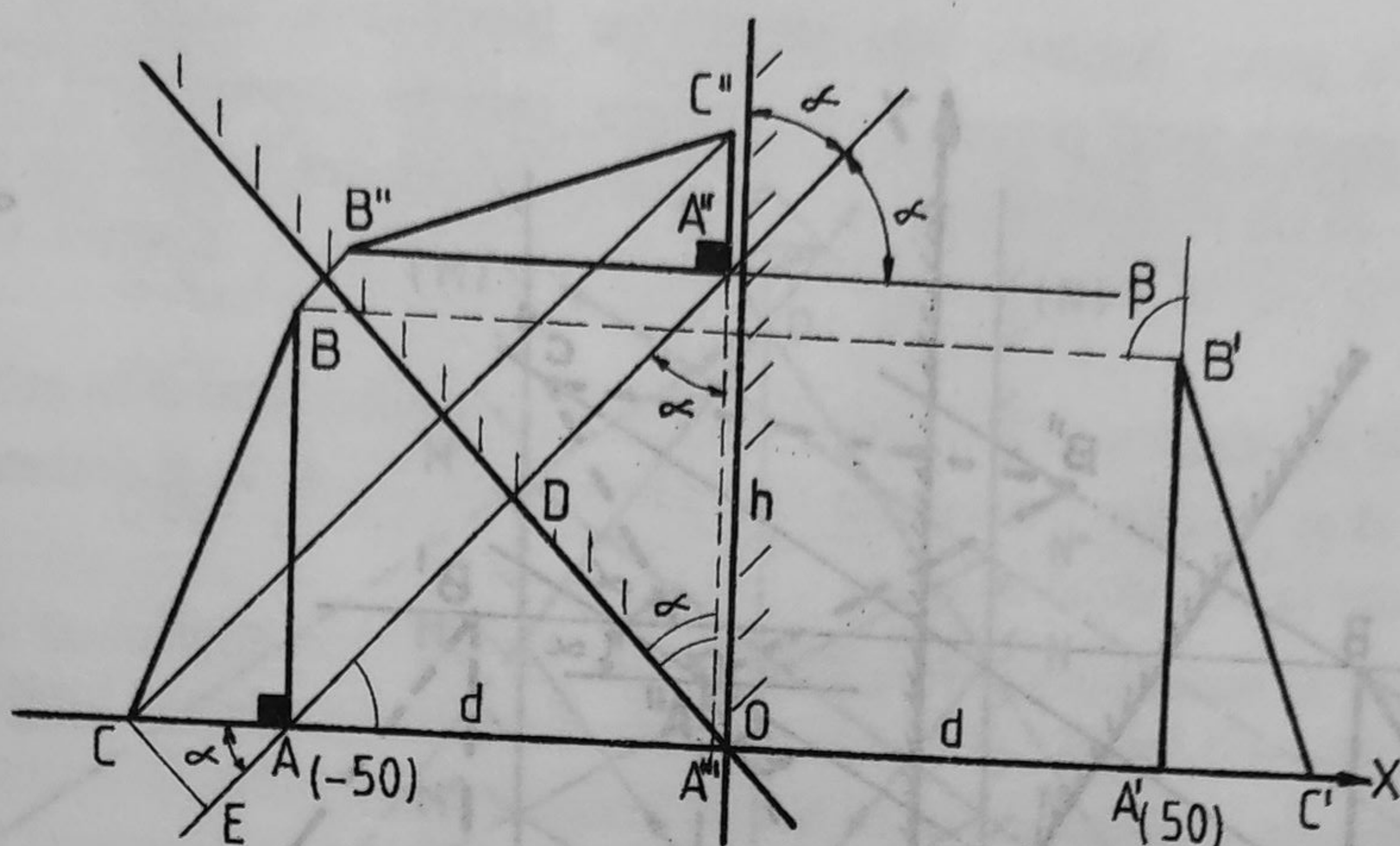


Fig. 11 a

Datele problemei:

$$\alpha = 30^\circ$$

$$d = AO = -50 \text{ cm}$$

a) construcția

b)  $\beta = ?$

c)  $h = ?$

a) Se alege ca origine a axelor punctul O, intersecția dintre planul oglinzii cu o axă perpendiculară pe oglindă (OX). Se așează pe axa Ox triunghiul dreptunghic astfel ca să fie cateta mai mare paralelă cu oglinda și se construiește prima imagine.

b) Se rotește planul oglinzii cu  $30^\circ$  în jurul lui O și se duc simetricele  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$  față de noua poziție a oglinzii pentru punctele obiect A, B, C și se măsoară unghiul făcut de axa  $AA'$  cu orizontala care este același cu unghiul de rotație al planului oglinzii.

b)  $DAO = \alpha$  ca unghiuri cu laturile perpendiculare;

$CAE = \alpha$  ca unghiuri opuse la vârf.

Cateta  $A''C''$  (baza) formează unghiul  $2 \cdot \alpha$  cu orizontala căci  $\triangle AOA''$  este triunghi isoscel ( $AD = DA''$  și  $OD \perp AA''$ ) dreptunghic în O.

Cateta  $A''B''$  fiind perpendiculară pe  $A''C''$  se va roti și ea cu  $\beta = 2 \cdot \alpha = 60^\circ$



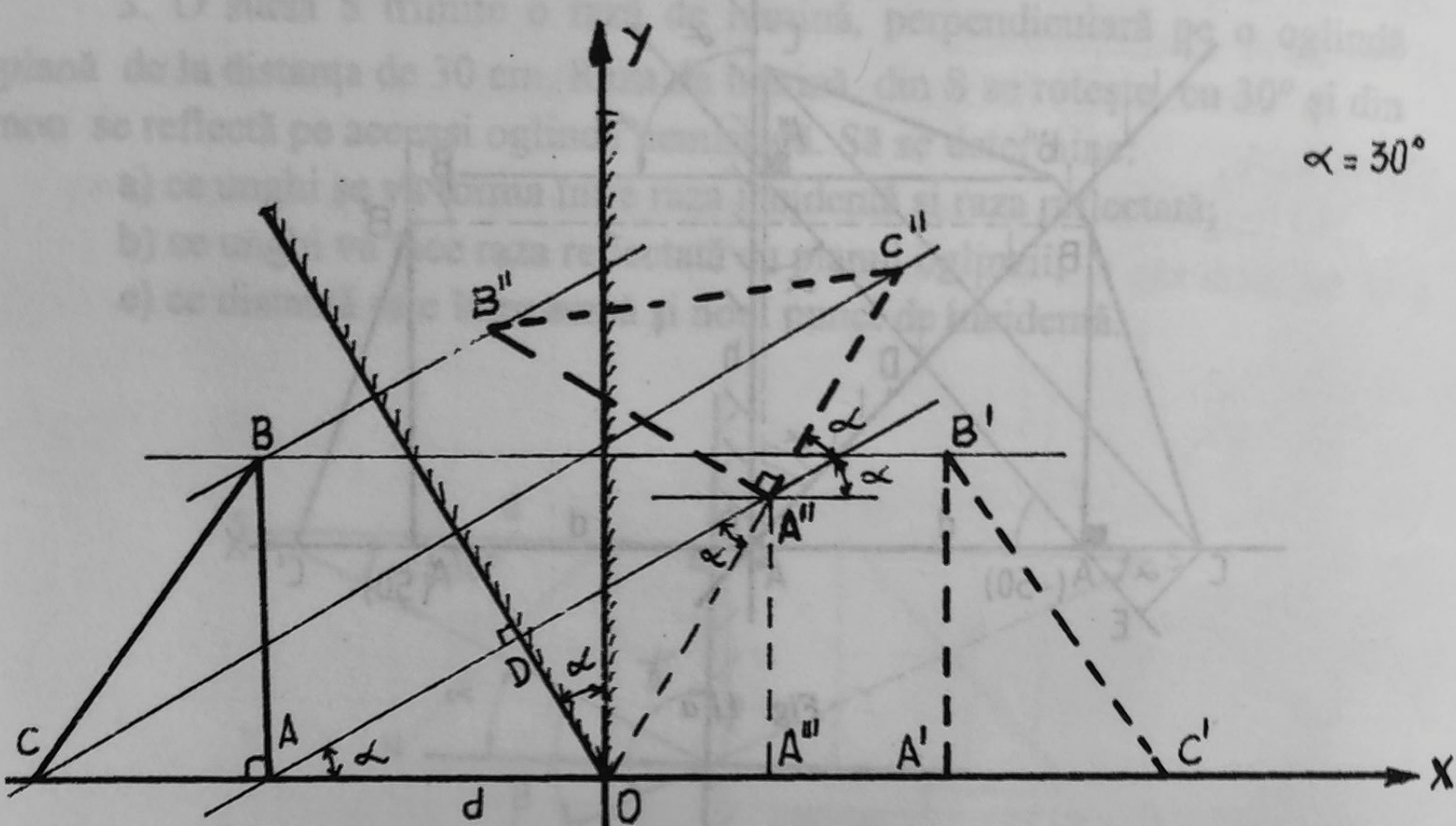


Fig. 11 b

c) Considerăm  $A'''$  ca fiind proiecția vârfului  $A''$  pe axa  $OX$   
 $\Delta AOD \sim \Delta AA''A'$   $\frac{AO}{AA''} = \frac{OD}{A''A'''}$   $A''A''' = h = \frac{OD}{AO} \cdot AA''$

ca triunghiuri dreptunghice și un unghi comun:  $\frac{AO}{AA''} = \frac{OD}{A''A'''}$

$$OD = d \cdot \sin \alpha \quad AO = d \quad AA'' = 2 \cdot d \cdot \cos \alpha$$

$$h = \frac{d \cdot \sin \alpha}{d} \cdot 2 \cdot d \cdot \cos \alpha = d \cdot \sin 2\alpha = 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 25 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}$$

5. Un punct luminos  $S$  se află la jumătatea distanței de 50 cm dintre două oglinzi ( $M$ ) și ( $N$ ). Pe axa de simetrie a sistemului, paralelă cu oglinzile, se găsesc atât punctul  $S$  cât și ochiul observatorului notat cu  $O$  la distanța de 1 m unul de altul, unde ochiul vede simultan cele două imagini primare  $S_1$  și  $S_2$ .

a) Să se construiască imaginile  $S_1$  și  $S_2$  ale sursei în cele două oglinzi și să se determine distanțele  $S_1$  și  $S_2$  de la ochi la cele două imagini;

b) Să se construiască imaginile  $S'_1$  și  $S'_2$  ale imaginilor - obiect  $S_1$  și  $S_2$  în cele două oglinzi și să se determine distanțele  $S'_1$  și  $S'_2$  și distanțele de la ochi la noile imagini.



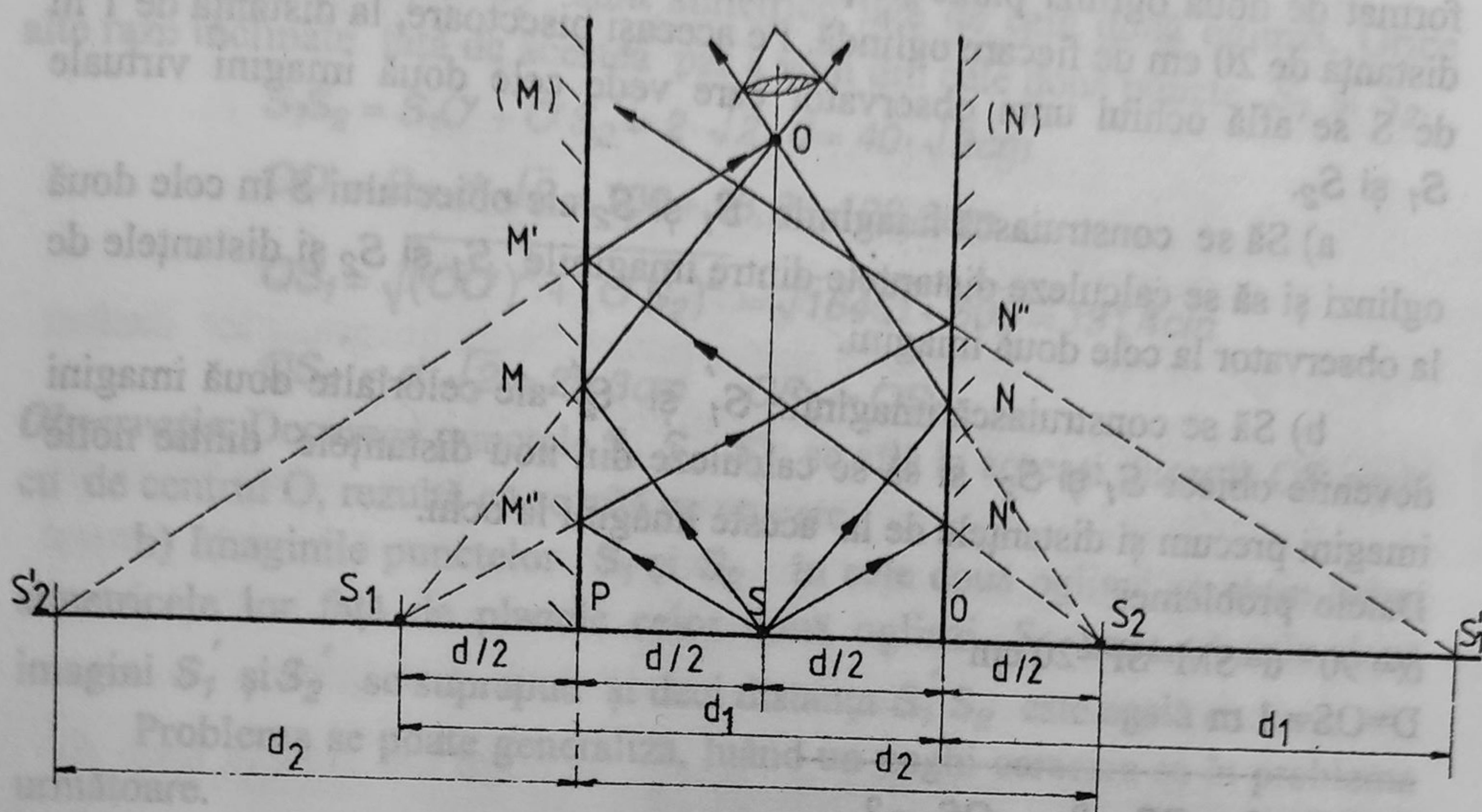


Fig. 12

Datele problemei:

$d = 50 \text{ cm}$        $OS = 1 \text{ m}$

a)  $S_1 S_2 = ?$        $OS_1 = ?$        $OS_2 = ?$

b)  $S_1' S_2' = ?$        $OS_1' = ?$        $OS_2' = ?$

a) Imaginile  $S_1$  și  $S_2$  sunt simetricele lui  $S$  în cele două oglinzi, văzute de observator. Deducem:  $S_1 S_2 = 4 \cdot \frac{d}{2} = 2 \cdot d = 100 \text{ cm}$        $OS_2 = OS_1$

b) Imaginea lui  $S_2$  în oglinda (M) se formează la o distanță  $PS_2' = PS_2$ , egală cu  $d_2$ :

$$d_2 = d + \frac{d}{2} = \frac{3 \cdot d}{2} = 107,5 \text{ cm} \quad OS_2 = \sqrt{(OS)^2 + (SS_1)^2} = 1,118 \text{ m}$$

În mod asemănător se găsește:

$$d_1 = 3 \cdot \frac{d}{2} = 107,5 \text{ cm} \quad S_1' S_2' = d_2 + d_1 + d = 2 \cdot 107,5 + 50 = 265 \text{ cm}$$

deoarece:

$$OS_1' = \sqrt{(OS)^2 + (SS_2')^2} = \sqrt{1 + 1,325} = 1,52 \text{ m} \quad OS_2' = OS_1'$$



6. Un punct luminos este situat pe bisectoarea unghiului diedru format de două oglinzi plane perpendiculare care se intersectează în  $O'$  la distanța de 20 cm de fiecare oglindă. Pe aceeași bisectoare, la distanța de 1 m de  $S$  se află ochiul unui observator care vede cele două imagini virtuale  $S_1$  și  $S_2$ .

a) Să se construiască imaginile  $S_1$  și  $S_2$  ale obiectului  $S$  în cele două oglinzi și să se calculeze distanțele dintre imaginile  $S_1$  și  $S_2$  și distanțele de la observator la cele două imagini.

b) Să se construiască imaginile  $S'_1$  și  $S'_2$  ale celorlalte două imagini devenite obiect  $S_1$  și  $S_2$  și să se calculeze din nou distanțele dintre noile imagini precum și distanțele de la aceste imagini la ochi.

Datele problemei:

$$\alpha = 90^\circ \quad d = SM = SP = 20 \text{ cm}$$

$$D = OS = 1 \text{ m}$$

a)  $S_1 S_2 = ? \quad OS_1 = ? \quad OS_2 = ?$

b)  $S'_1 S'_2 = ? \quad OS'_1 = ? \quad OS'_2 = ?$

Rezolvare:

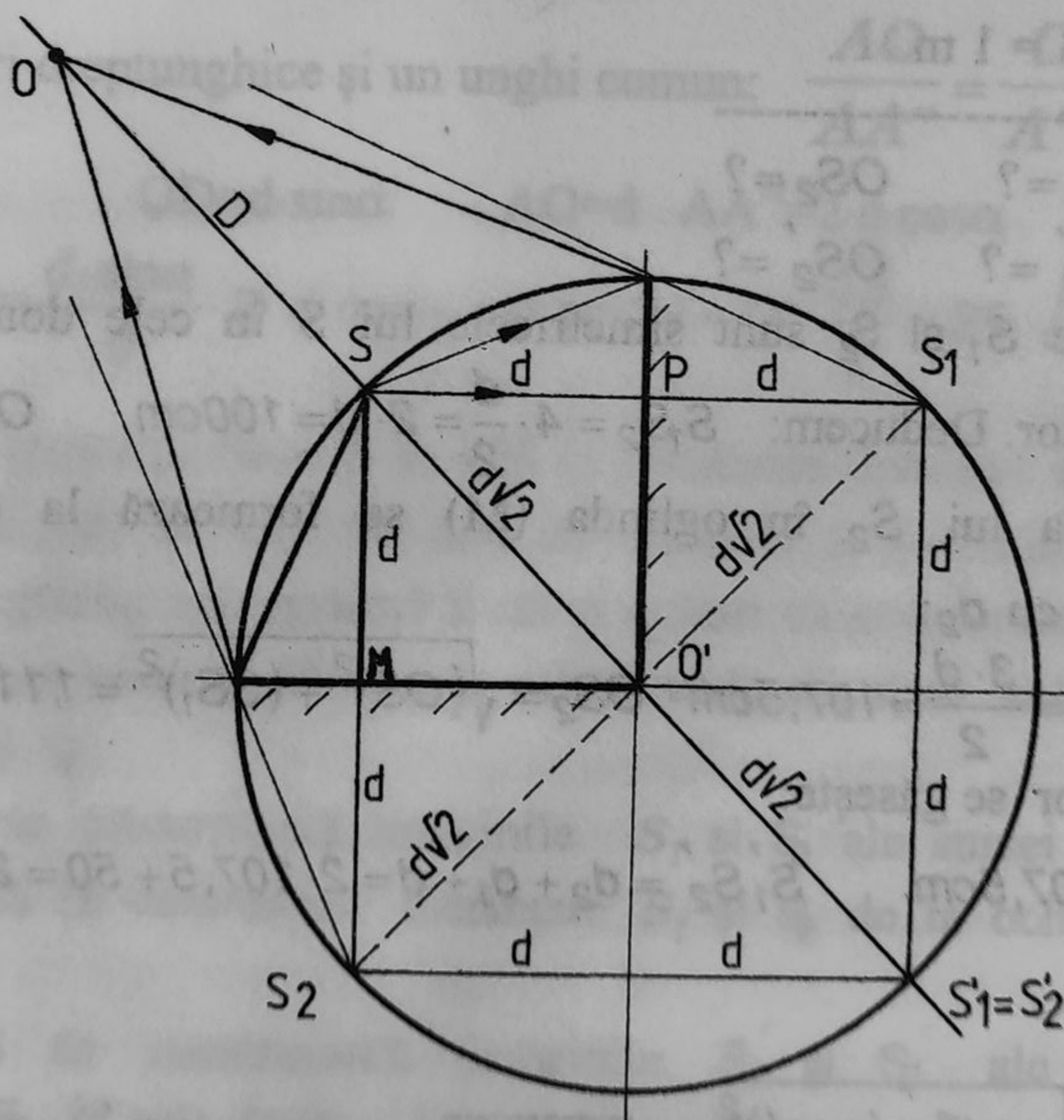


Fig. 13



Datele problemei:

a) Imaginile  $S_1$  și  $S_2$  sunt simetrice față de cele două oglinzi. Orice alte raze înclinate față de acestea par a veni din cele două puncte  $S_1$  și  $S_2$ .

$$S_1 S_2 = S_1 O' + O' S_2 = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot d = 40 \cdot \sqrt{2} \text{ cm}$$

$$OO' = D + d \cdot \sqrt{2} = 100 + 28,3 = 128,3 \text{ cm}$$

$$OS_1 = \sqrt{(OO')^2 + (O'S_2)^2} = \sqrt{16461 + 800} = 131,4 \text{ cm}$$

$$OS_2' = d \cdot \sqrt{2} = 28,3 \text{ cm} \quad OS_2 = OS_1$$

**Observație:** Deoarece punctele  $S$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  se află la aceeași distanță  $OS$  egală cu de centrul  $O$ , rezultă că se află pe un cerc.

b) Imaginile punctelor  $S_1$  și  $S_2$  în cele două oglinzi se obțin luând simetricele lor față de planele celor două oglinzi. Se vede că cele două imagini  $S_1'$  și  $S_2'$  se suprapun și deci distanța  $S_1' S_2'$  este egală cu zero.

Problema se poate generaliza, luând un unghi oarecare ca în problema următoare.

7. Două oglinzi plane formează un unghi diedru de mărimea  $\varphi = 2 \cdot \pi / n$  unde  $n$  este un număr întreg. O sursă punctiformă de lumină  $S$  se găsește între cele două oglinzi la egală distanță de fiecare de acestea. Să se găsească numărul de imagini ale sursei în cele două oglinzi.

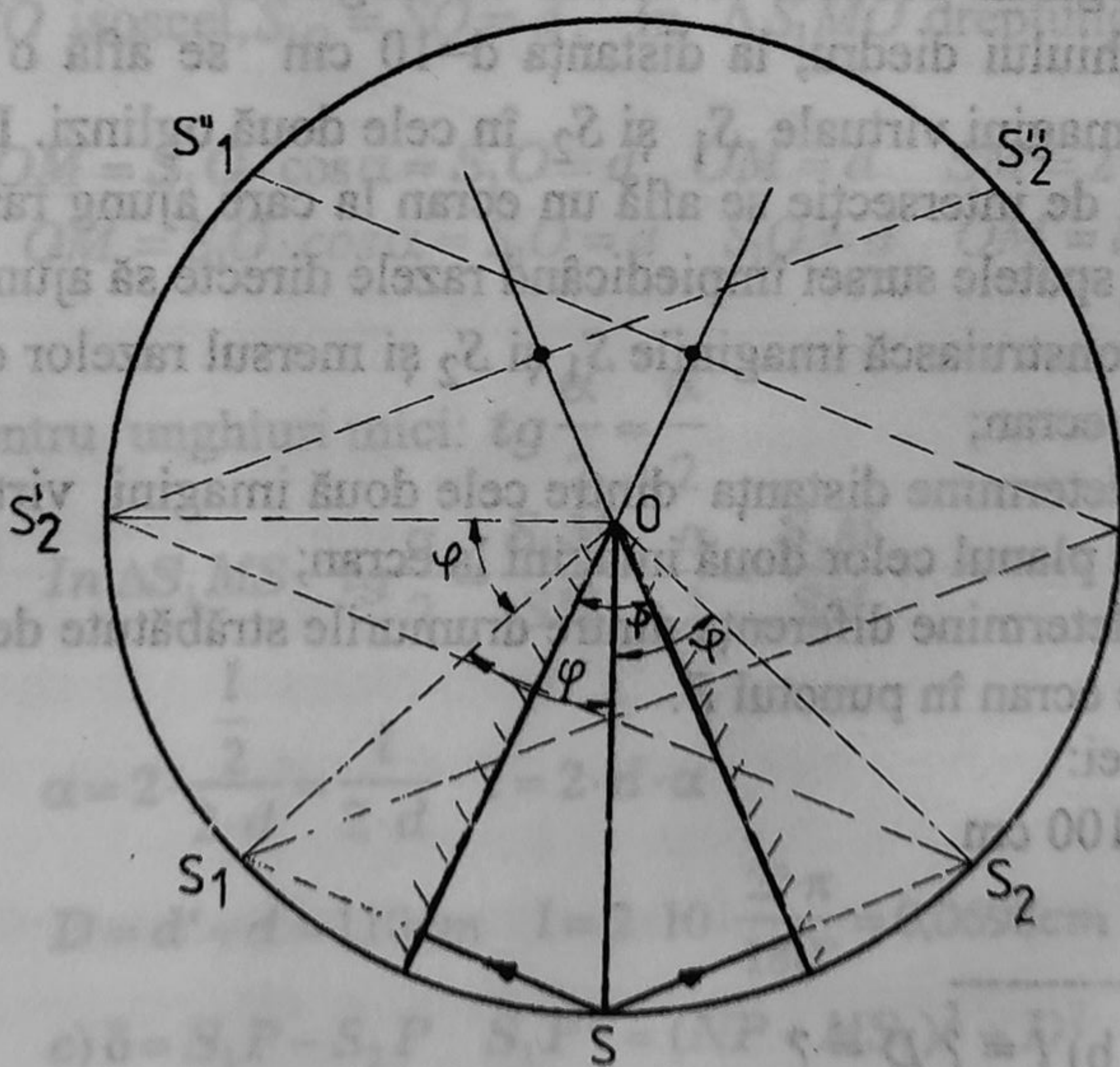


Fig. 14



Rezolvare:

Din observația precedentă, putem situa punctul sursă și imaginile sale virtuale  $S_1$  și  $S_2$  pe un cerc cu raza  $OS$  ca în figură. Avem egalitatea de triunghiuri:

$$\triangle SOA = \triangle S_1OA \quad \text{deci} \quad \overline{S_1O} = \overline{OS} = R$$

$$\triangle SOB = \triangle S_2OB \quad \text{deci} \quad \overline{S_2O} = \overline{OS} = R$$

$$S_1OS = \varphi \quad \text{și} \quad S_2OS = \varphi$$

Considerând  $S_1$  și  $S_2$  ca imagini obiect, putem forma imaginile lor ducând punctele simetrice  $S_1'$  și  $S_2'$  față de planul celor două oglinzi.

Considerând  $S_1'$  și  $S_2'$  ca următoarele imagini obiect, putem forma din nou imaginile lor  $S_1''$  și  $S_2''$  care vor forma unghiul  $4\varphi$  și în general  $n\varphi$ . Dacă este număr par ( $n = 2 \cdot k$ ) imaginea  $S'$  va coincide cu  $S''$  și se vor găsi pe același diametru cu sursa, în total vor fi  $2 \cdot k - 1$  imagini.

Caz particular:  $n=4$   $k=2$  și  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Se obțin trei imagini unde  $S_2'$  coincide cu  $S_2''$ , după cum s-a găsit în problema precedentă. Dacă  $n$  este număr impar, imaginea  $S'_k$  se află pe linia de prelungire a unei oglinzi și deci va coincide cu imaginea  $S'_{k+1}$  de pe cealaltă oglindă, în total fiind  $2 \cdot k$  imagini.

8. Două oglinzi Fresnel formează un unghi de  $178^\circ$ . Pe bisectoarea interioară a unghiului diedru, la distanța  $d=10$  cm se află o sursă  $S$  care formează două imagini virtuale  $S_1$  și  $S_2$  în cele două oglinzi. La distanța de 1 m de punctul de intersecție se află un ecran la care ajung razele reflectat, paravanul  $P$  din spatele sursei împiedicând razele directe să ajungă pe ecran.

a) Să se construiască imaginile  $S_1$  și  $S_2$  și mersul razelor care ajung să se suprapună pe ecran;

b) Să se determine distanța dintre cele două imagini virtuale precum și distanța de la planul celor două imagini la ecran;

c) Să se determine diferența dintre drumurile străbătute de razele ce se intersectează pe ecran în punctul  $P$ .

Datele problemei:

$$d=10 \text{ cm} \quad d'=100 \text{ cm}$$

$$\alpha = 2^\circ$$

a) construcția; b)  $l = ?$   $D = ?$

c)  $\delta = ?$



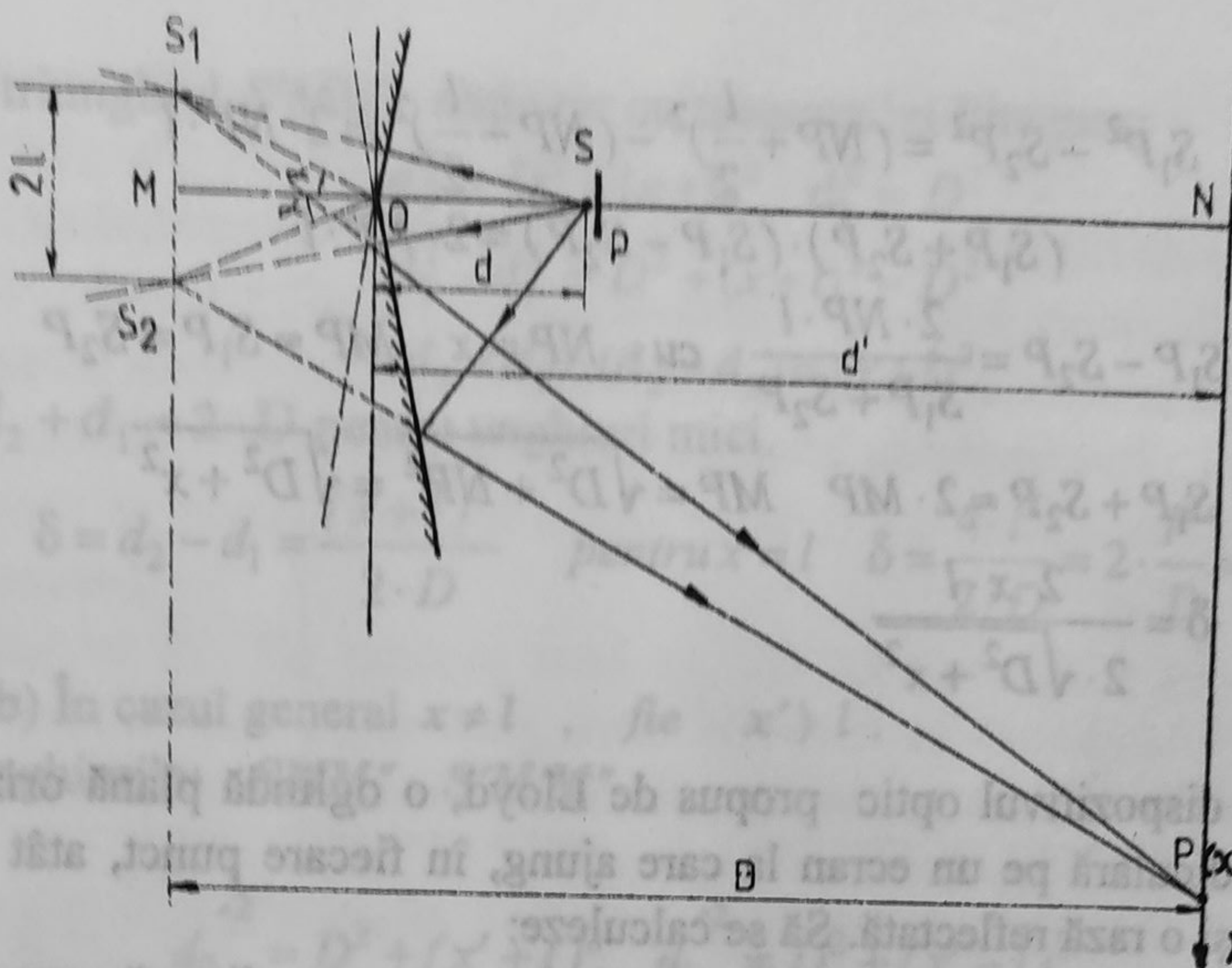


Fig. 15

a) Imaginile  $S_1$  și  $S_2$  sunt simetrice față de bisectoarea externă a unghiului dintre oglinzi care este axa de simetrie pentru întregul sistem. Razele care se suprapun într-un punct P de pe ecran, par a proveni din sursele  $S_1$  și  $S_2$ , în realitate sunt raze provenite de la aceeași sursă S dar reflectate pe cele două oglinzi.

b)  $D = d' + OM$

În  $\Delta S_1SO$  isoscel,  $S_1O = SO = d$ . În  $\Delta S_1MO$  dreptunghic:

$$OM = S_1O \cdot \cos \alpha \approx S_1O = d \quad OM = d \quad SM = 2 \cdot d$$

$$OM = S_1O \cdot \cos \alpha \approx S_1O = d \quad S_1O = d \quad OM = d$$

$$SM = 2 \cdot d \text{ pentru unghiuri mici: } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{In } \Delta S_1MS \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{S_1M}{SM} \quad \frac{\alpha}{2} \approx \frac{S_1M}{SM}$$

$$\alpha = 2 \cdot \frac{\frac{l}{2}}{2 \cdot d} = \frac{l}{2 \cdot d} \quad l = 2 \cdot d \cdot \alpha$$

$$D = d' + d = 110 \text{ cm} \quad l = 2 \cdot 10 \cdot \frac{2^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = 0,0698 \text{ cm}$$

$$\text{c) } \delta = S_1P - S_2P \quad S_1P^2 = (NP + MS_1)^2 + D^2$$

$$MS_1 = MS_2 = \frac{l}{2} \quad S_2P^2 = (NP - MS_2)^2 + D^2$$



$$S_1P^2 - S_2P^2 = \left(NP + \frac{l}{2}\right)^2 - \left(NP - \frac{l}{2}\right)^2 = 2 \cdot NP \cdot l$$

$$(S_1P + S_2P) \cdot (S_1P - S_2P) = 2 \cdot NP \cdot l$$

$$\delta = S_1P - S_2P = \frac{2 \cdot NP \cdot l}{S_1P + S_2P} \quad \text{cu } NP = x \quad MP \approx S_1P = S_2P$$

$$S_1P + S_2P \approx 2 \cdot MP \quad MP = \sqrt{D^2 + NP^2} = \sqrt{D^2 + x^2}$$

$$\delta = \frac{2 \cdot x \cdot l}{2 \cdot \sqrt{D^2 + x^2}}$$

9. În dispozitivul optic propus de Lloyd, o oglindă plană orizontală este perpendiculară pe un ecran la care ajung, în fiecare punct, atât o rază directă cât și o rază reflectată. Să se calculeze:

a) Diferența de drum dintre cele două raze: raza directă care este și paralelă cu oglinda, și raza reflectată de oglinda plană. Se cunoaște distanța dintre sursă și oglindă  $l=10$  cm și distanța dintre sursă și ecran  $L=1$  m;

b) Diferența de drum în funcție de abscisa punctului de intersecție al celor două raze pe ecran.

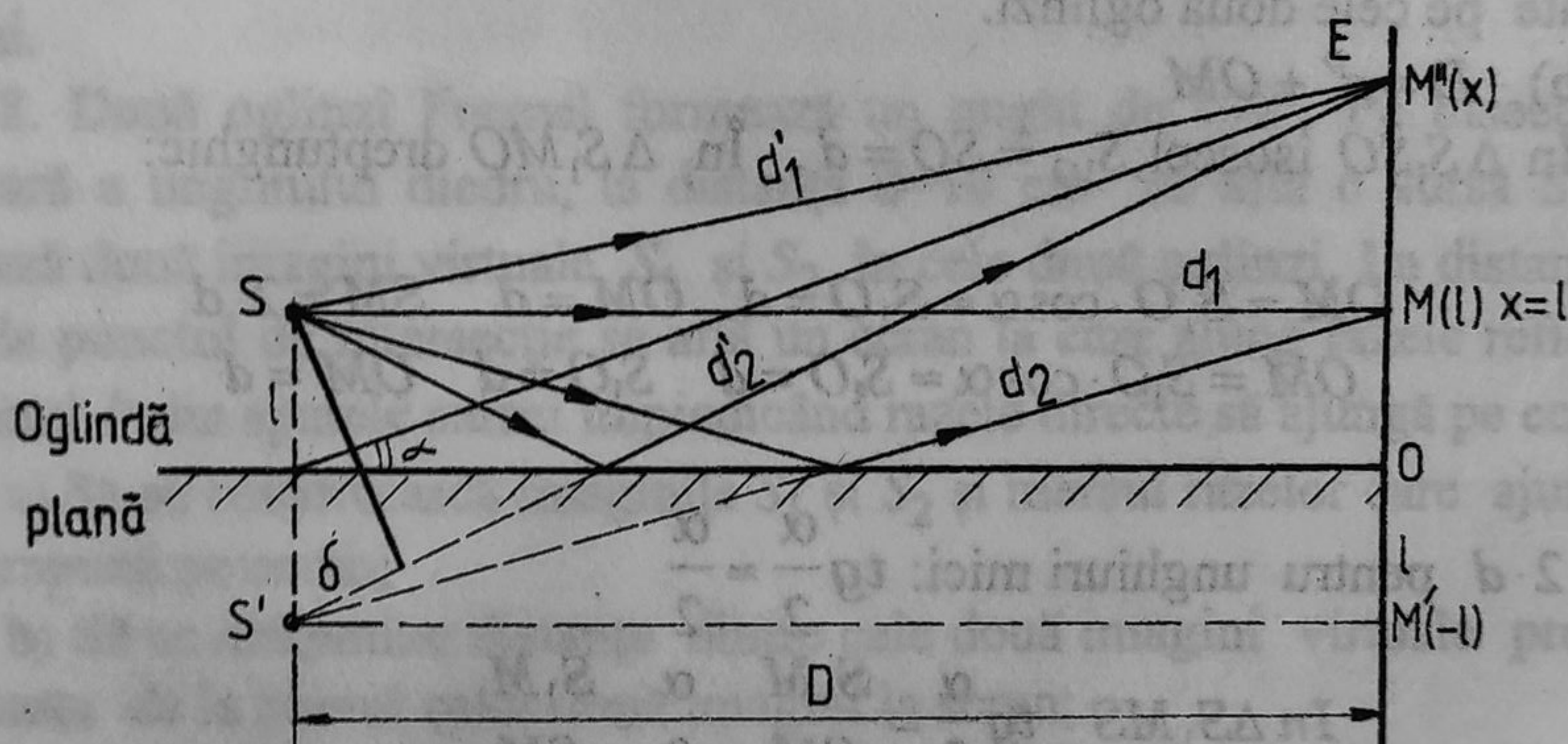


Fig.16

Datele problemei:

$$l = 10 \text{ cm}$$

$$D = 1 \text{ m}$$

a)  $\delta = ?$

b)  $\delta(x) = ?$



a) Din triunghiul  $S'MM'$  obținem cu teorema lui Pitagora:

$$d_2^2 = D^2 + (x+l)^2 \quad d_1^2 = D^2$$

$$d_2^2 - d_1^2 = D^2 + (x+l)^2 - D^2$$

$$(d_2 + d_1) \cdot (d_2 - d_1) = (x+l)^2$$

unde  $d_2 + d_1 \approx 2 \cdot D$  pentru unghiuri mici.

$$\delta = d_2 - d_1 = \frac{(x+l)^2}{2 \cdot D} \quad \text{pentru } x=l \quad \delta = \frac{4 \cdot l^2}{2 \cdot D} = 2 \cdot \frac{l^2}{D} = 2 \text{ cm}$$

b) În cazul general  $x \neq l$ , fie  $x' > l$ .

În triunghiurile:  $SMM''$   $S'M'M''$

avem:  $d_2'^2 = D^2 + (x'+l)^2 \quad d_1'^2 = D^2 + (x'-l)^2$

$$d_2'^2 - d_1'^2 = x'^2 + l^2 + 2 \cdot x' \cdot l - x'^2 + 2 \cdot x' \cdot l - l^2 = 4 \cdot x' \cdot l$$

$$(d_2' - d_1') \cdot (d_2' + d_1') = 4 \cdot x' \cdot l \quad d_2' + d_1' \approx 2 \cdot D \text{ pentru unghiuri mici.}$$

$$\delta = \frac{4 \cdot x' \cdot l}{2 \cdot D} = 2 \cdot \frac{l}{D} \cdot x \quad \text{în cazul particular } \delta'(x) = \frac{x'}{5}$$

## 2.2. Refracția luminii

**Refracția** este fenomenul de deviere al unei raze de lumină de la direcția incidentă, în punctul unde întâlnește un mediu optic cu indice de refracție diferit.

De exemplu o rază de lumină care trece din aer în apă, pare că se *frânge* la suprafața de separație.

La fel se observă trecerea razei de lumină din apă în aer, din sticlă în aer, dar deviația de la normală este mai mare.

În funcție de indicele de refracție relativ raza refractată se apropie de normală: ( $n > 1$ ) sau se depărtează de normală ( $n < 1$ ).

**Legile refracției** - Experimental s-a observat că între unghiul de incidență și unghiul de refracție există o proporționalitate, directă, între sinusurile acestor unghiuri, de forma:

$$\sin r = k \cdot \sin i$$



Factorul de proporționalitate  $k$  depinzând de proprietățile optice ale celor două medii aflate în contact. Legile refracției se pot găsi ușor experimental cu discul lui Hartl; au fost deduse pe cale matematică de către Willibrord Snell, numit și Snellius, apoi de către Rene Descartes în 1644 și apoi de Newton considerând lumina ca un flux de corpusculi cu proprietăți elastice, apoi de către Pierre de Fermat din principiul drumului optic.

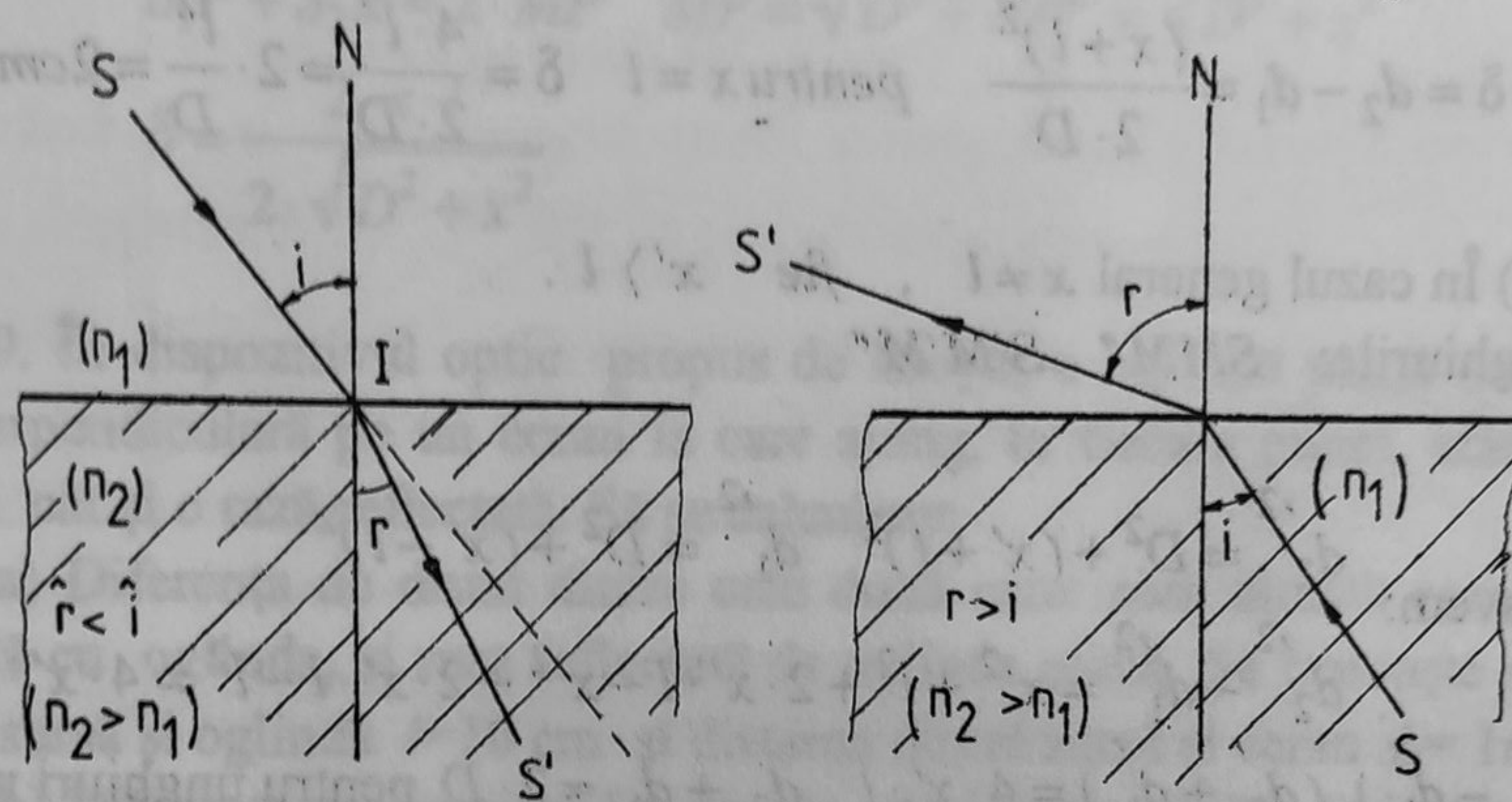


Fig. 17

**Legea I:** Raza incidentă, normala și raza refractată se află în același plan.

**Legea II:** Unghiul format de raza emergentă cu normală (numit unghi de refracție) depinde de unghiul format de raza incidentă cu normala (numit unghi de incidență) după legea:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{sau} \quad n_1 \cdot \sin i = n_2 \cdot \sin r$$

Notând cu  $n$  indicele de refracție relativ al mediului al doilea (pe unde iese raza) față de primul (pe unde intră raza), putem scrie:

$$\sin i = n \cdot \sin r \quad n = \frac{n_2}{n_1}$$

Se poate rescrie legea refracției cu ajutorul vitezelor de propagare a luminii

$$\text{prin cele două medii astfel: } n_1 = \frac{c}{v_1} \quad n_2 = \frac{c}{v_2} \quad \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} \quad v_2 \cdot \sin i = v_1 \cdot \sin r$$

În cazul mai multor refracții succesive, este util să folosim indicii numerici:

notăm:  $i_1$  - unghiul de incidență,  $i_2$  - unghiul de refracție legea devine:

$$n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin i_2$$

indicele "1" indică mediul incident, iar indicele "2" indică mediul emergent.



Cu ajutorul legii lui Snell, se poate preciza când unghiul de refracție este mai mare sau mai mic cunoscând raportul dintre indicii de refracție. Se pot stabili două reguli:

**Regula 1:** La trecerea razei de lumină dintr-un mediu mai puțin dens într-un mediu mai dens, raza refractată se apropie de normală. Există o proporționalitate între indicii de refracție  $n$  și densitatea mediului optic  $n \approx \rho$  încât se poate spune că atunci când  $\rho' > \rho$  înseamnă că și  $n' > n$ . Atunci rezultă:

**Regula 2:** La trecerea razei de lumină dintr-un mediu mai dens, într-un mediu mai puțin dens, raza refractată se depărtează de normală. Ambele reguli sunt ilustrate în figura de mai sus.

### 2.2.1. Reflexia totală

**Reflexia totală** este un caz particular al refracției. Aceasta se petrece la suprafața de separație dintre două medii optice cu indici de refracție diferiți, pentru unghiuri de incidență mai mari decât un unghi limită " $l$ " la care raza refractată formează cu normala un unghi de  $90^\circ$ :

$$i = l \quad r = 90^\circ$$

Reflexia totală se produce la ieșirea luminii din mediul mai dens când raza se depărtează de normală și  $r > i$ .

Deci  $n_1 > n_2$  notând cu:

$$n = \frac{n_1}{n_2} \quad \sin l = \frac{1}{n}$$

În figura de mai jos se pot vedea ambele fenomene, refracția și reflexia totală.

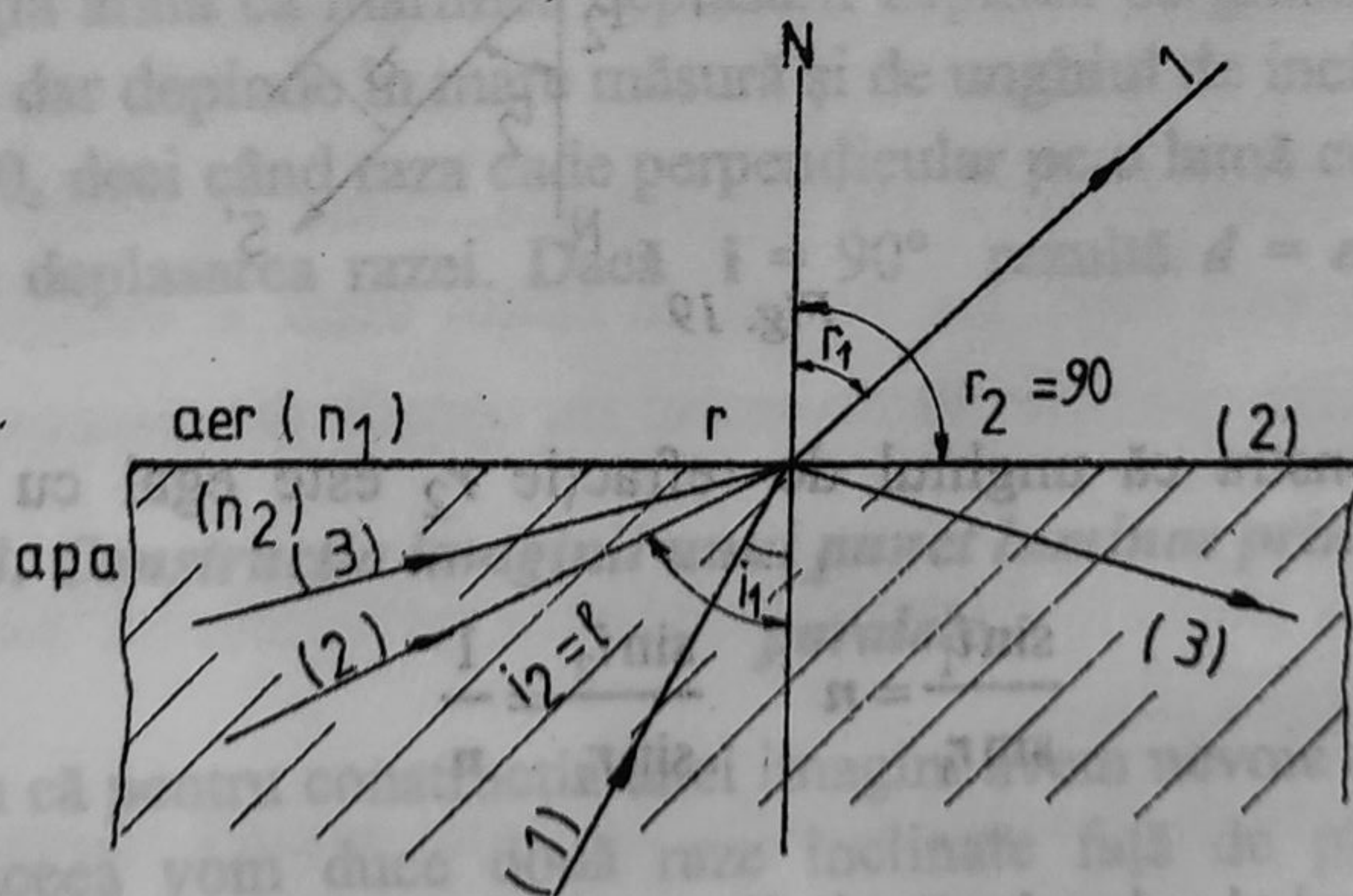


Fig. 18



**Regula 3:** Reflexia totală se produce totdeauna când o rază de lumină cade pe o suprafață de separație dintre medii cu indici de refracție diferiți venind dinspre mediul mai dens, iar unghiul de incidență este mai mare decât unghiul limită.

Deoarece lumina este total reflectată de suprafața de separație și respectă legile reflexiei, fenomenul a primit numele de *reflexie totală*.

În experiența zilnică se poate observa fenomenul de reflexie totală, privind suprafața de separație apă-aer dintr-un pahar ținut mai sus de orizontala ochiului. Se vede o suprafață argintie (ușor colorată dacă lichidul este colorat) care se datorează luminii provenită din cealaltă parte a paharului reflectată în întregime.

### 2.2.2. Trecerea luminii printr-o placă cu fețe plan-paralele

Este un caz des întâlnit, trecerea luminii prin geamurile ferestrelor, prin straturi de aer sau de apă, etc. Efectul luminii printr-un strat cu fețe paralele este doar o deplasare paralelă (translație) a razei emergente, cu atât mai mare cu cât indicele de refracție al plăcii este mai mare și cu cât grosimea plăcii crește.

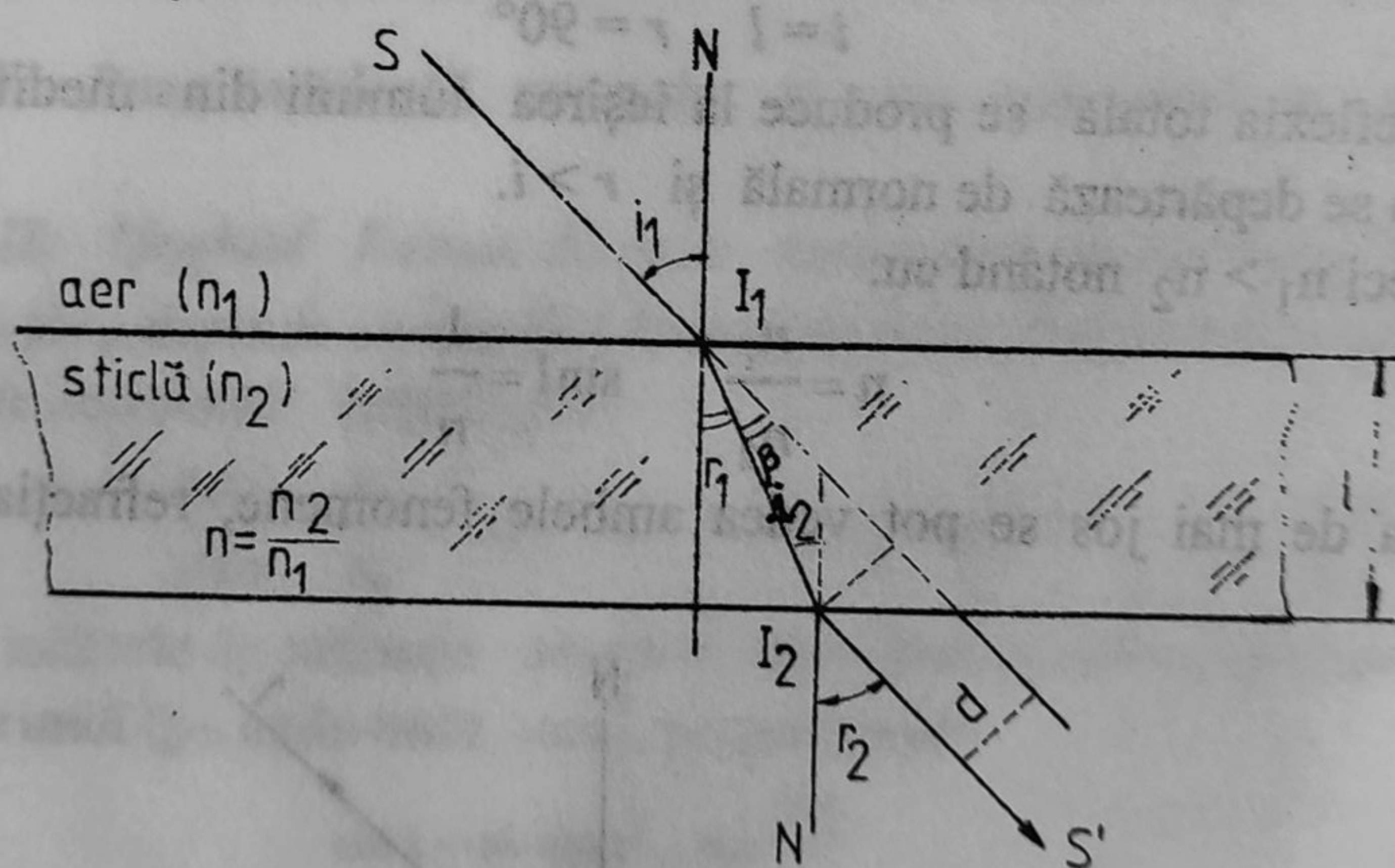


Fig. 19

Întâi vom demonstra că unghiul de refracție  $r_2$  este egal cu unghiul de incidență  $i_1$ :

$$\frac{\sin i_1}{\sin r_1} = n \quad \frac{\sin i_2}{\sin r_2} = \frac{1}{n}$$

Efectuăm produsul al celor două relații membru cu membru.



$$\frac{\sin i_1}{\sin r_1} \cdot \frac{\sin i_2}{\sin r_2} = 1$$

pentru că:  $r_1 = i_2$  ca unghiuri alterne interne  $\sin i_1 = \sin r_2$   $i_1 = r_2$  pentru unghiuri  $\in (0^\circ, 90^\circ)$ .

Să se calculeze mărimea deplasării  $d$  știind că  $i_1 = r_2$   $r_1 = i_2 = r$  ca în figura precedentă.

$$\Delta I_1 I_2 A: I_1 I_2 \cdot \cos r = I_1 A = e$$

$$\Delta II_1 I_2: II_2 = I_1 I_2 \cdot \sin \beta \text{ unde } \beta = i - r$$

$$II_2 = d = I_1 I_2 \cdot \sin(i - r) \text{ deci : } d = \frac{e}{\cos r} \cdot \sin(i - r) \quad d = e \cdot \frac{\sin(i - r)}{\cos r}$$

Dezvoltând sinusul diferenței de unghiuri se ajunge la o formă finală utilă în aplicații:

$$d = e \cdot \left( \frac{\sin i \cdot \cos r}{\cos r} - \frac{\cos i \cdot \sin r}{\cos r} \right) = e \cdot \left( \sin i - \frac{\cos i}{\cos r} \cdot \frac{\sin r}{n} \right)$$

$$\sin r = \frac{1}{n} \cdot \sin i \text{ rezultă } \cos r = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}}$$

$$d = e \cdot \sin i \cdot \left( 1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{\cos i}{\cos r} \right) = e \cdot \sin i \cdot \left( 1 - \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \right)$$

$$d = e \cdot \sin i \cdot \left( 1 - \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \right)$$

Relația arată că mărimea deplasării depinde de grosime și de indicele de refracție dar depinde în mare măsură și de unghiul de incidență astfel când  $i = 0^\circ$   $d = 0$ , deci când raza cade perpendicular pe o lamă cu fețe paralele nu se produce deplasarea razei. Dacă  $i = 90^\circ$  rezultă  $d = e$ , deplasarea este maximă.

### 2.2.3. Construcția imaginii unui punct luminos prin lama cu fețe paralele.

Știm că pentru construcția unei imagini avem nevoie de cel puțin două raze, de aceea vom duce două raze înclinate față de placă și calculăm devierea  $d$  care este funcție de unghiul de incidență.



Razele emergente sunt de asemenea divergente deci nu pot crea o imagine reală ci numai o imagine virtuală.

Ochiul vede imaginea  $S'$  în prelungirea ultimelor raze ce ajung la ochi, după cum se vede în figura de mai jos:

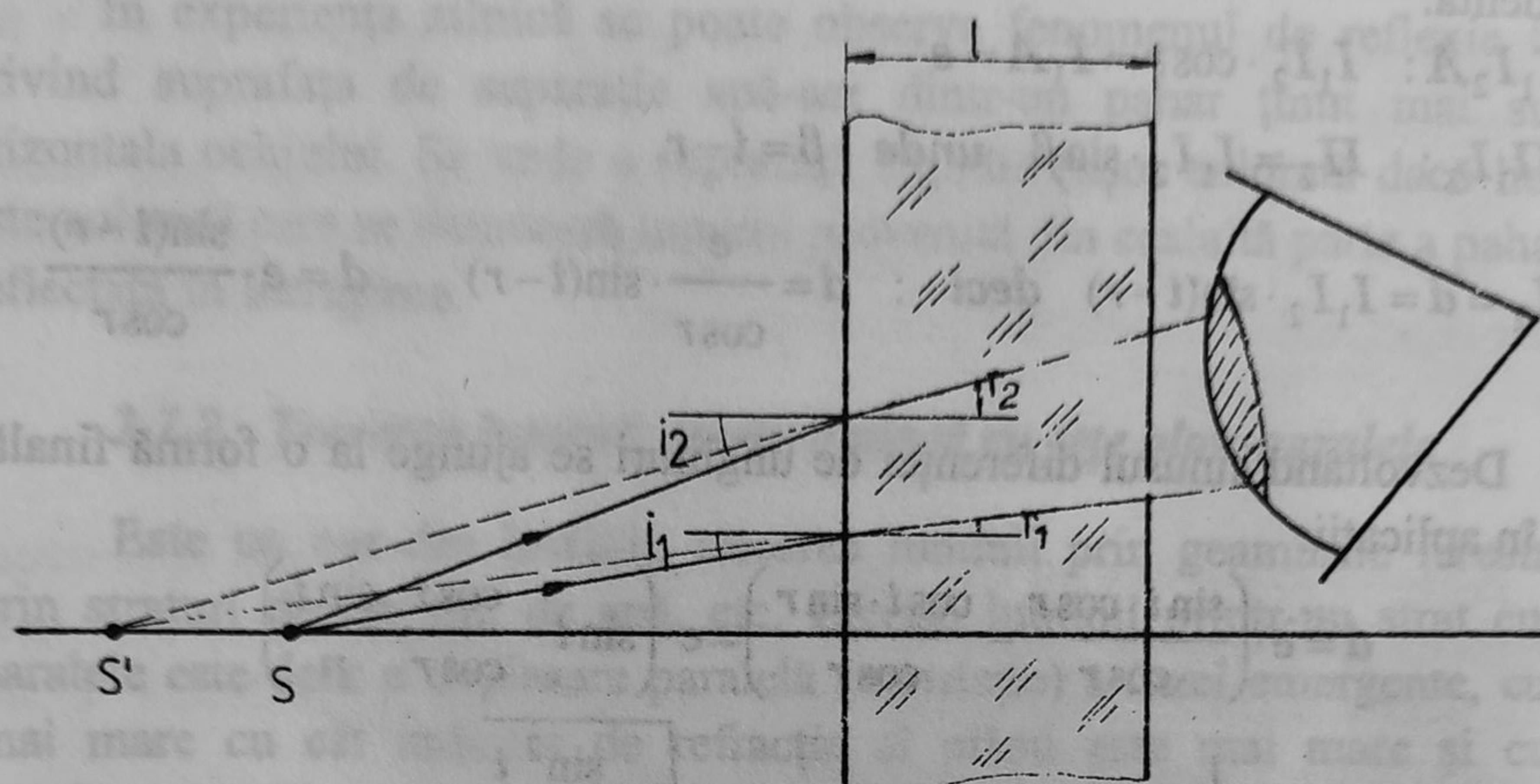


Fig. 20

Unghiurile  $i_1$  și  $i_2$  sunt unghiuri de incidență ale celor două raze incidente:  $i_1 > i_2$ . Distanțele  $d_1$  și  $d_2$  sunt deplasările celor două raze emergente, din calcul rezultă că:  $d_1 > d_2$ .

#### 2.2.4. Probleme rezolvate la fenomenul de refracție

1. Un observator privește într-un vas gol, cubic cu latura de 1 m de alungul unei diagonale mari. La 50 cm de colțul vizat al cubului se află o monedă strălucitoare pe care observatorul nu o vede din poziția fixă care-i este impusă.

a) Care este indicele de refracție minim, al lichidului care umplând vasul, permite vederea piesei;

b) La ce distanță de colțul cubului ar trebui așezată moneda pentru a deveni vizibilă observatorului când vasul se umple cu apă ( $n = 1,33$ ).



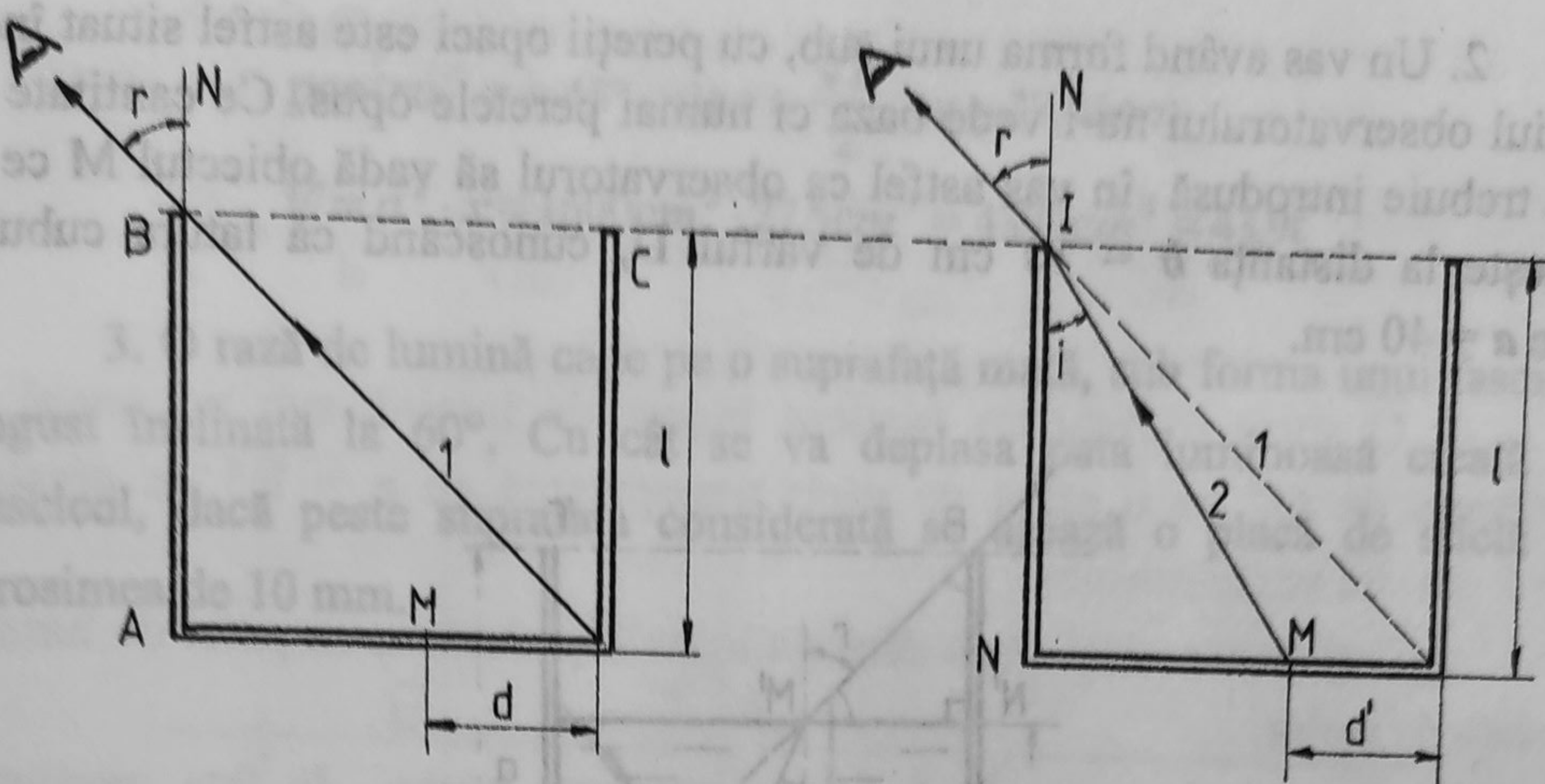


Fig. 21

Datele problemei:

$$l = 1\text{m} \quad d = 50\text{cm}$$

a)  $n_{\min} = ?$

b)  $d' = ? \quad n' = 1,33$

a) În absența lichidului  $r = 45^\circ$ , în prezența lichidului raza 1 iese din câmpul vizual, aparând raza 2.

$$r = 45^\circ \quad \sin r = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$$

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{n_e} \quad \text{unde} \quad n_e = \frac{n_2(\text{aer})}{n_1(\text{apă})}$$

$$\sin i = \frac{l-d}{l} \quad \text{din } \triangle IMN \quad n_e = \frac{\sin r}{\sin i} = \sqrt{2}$$

Deci lichidul nu poate fi apă.

b) Având cunoscut indicele de refracție  $n$  al lichidului, deducem:

$$\sin i = \frac{l-d}{l} \quad \frac{l-d'}{l} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot n} \quad d' = l \cdot \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot n} \right) \quad d' \approx 46\text{cm}$$



2. Un vas având forma unui cub, cu pereții opaci este astfel situat încât ochiul observatorului nu-i vede baza ci numai peretele opus. Ce cantitate de apă trebuie introdusă în vas astfel ca observatorul să vadă obiectul M ce se găsește la distanța  $b = 10$  cm de vârful D, cunoscând că latura cubului este  $a = 40$  cm.

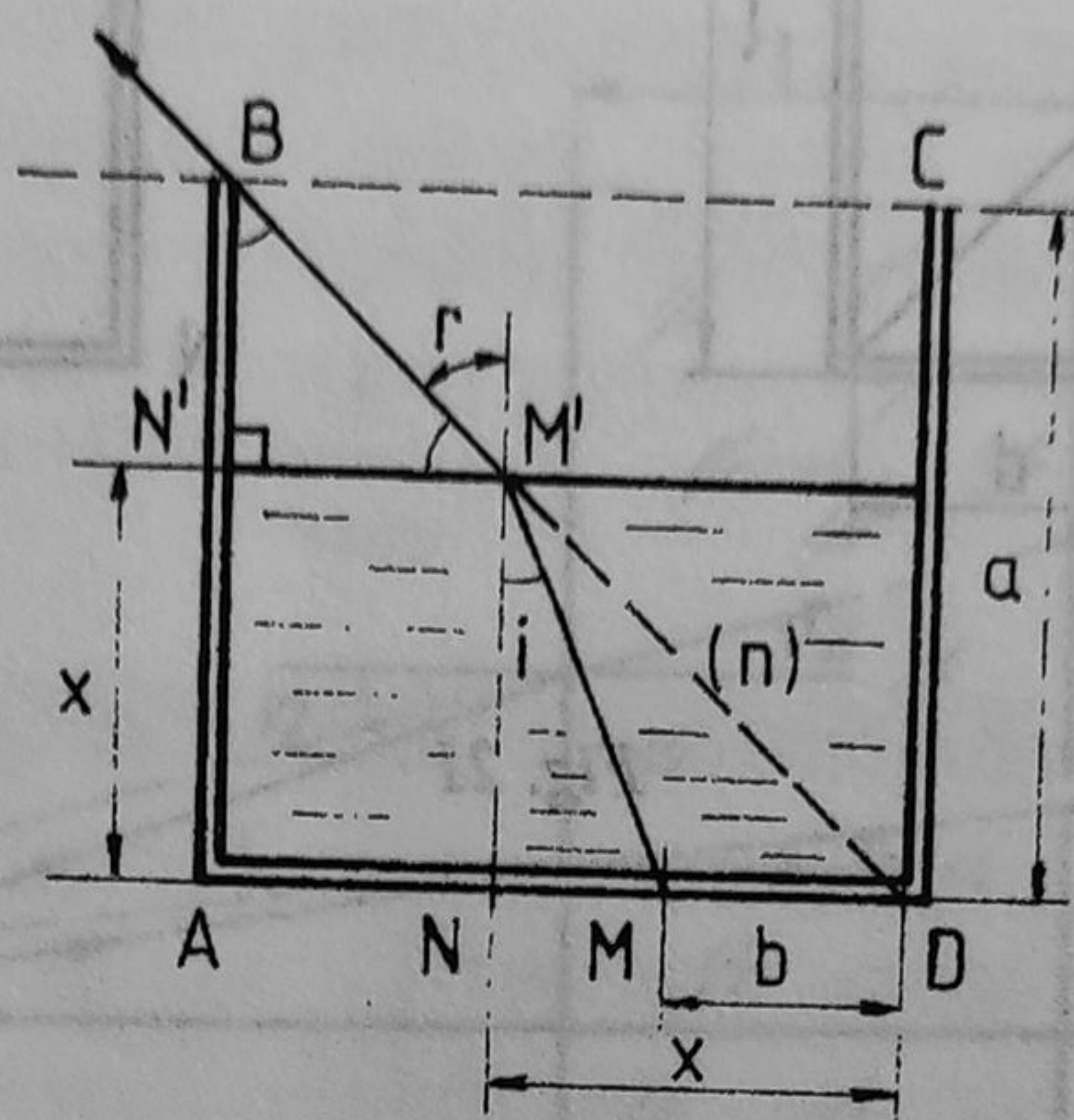


Fig. 22

Datele problemei:

$$b = 10 \text{ cm} \quad a = 40 \text{ cm}$$

$$n = 4/3 \text{ (apă)}$$

$$x = ?$$

$$\text{În } \triangle MNM' \quad MN = x \cdot \operatorname{tgi} \quad b = x - MN = x \cdot (1 - \operatorname{tgi})$$

$$x = \frac{b}{1 - \frac{\sin i}{\cos i}} = \frac{b \cdot \cos i}{\cos i - \sin i}$$

În  $M'$  aplicăm legea lui Snell:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{n} \quad \sin i = \frac{\sin r}{n} \quad \cos i = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 r}{n^2}} = \sqrt{\frac{n^2 - \sin^2 r}{n^2}}$$

$$x = \frac{b \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 r}}{n} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 r}}{n} - \frac{\sin r}{n}} = \frac{b \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 r}}{\sqrt{n^2 - \sin^2 r} - \sin r}$$



pentru  $r = 45^\circ$   $\sin r = \frac{\sqrt{2}}{2}$   $x = 27,46 \text{ cm}$

$$V = a^2 \cdot x \approx 1600 \text{ cm}^2 \cdot 27,5 \text{ cm}^3 = 4390 \text{ cm}^3 \approx 43,9 \text{ l}$$

3. O rază de lumină cade pe o suprafață mată, sub forma unui fascicol îngust înclinată la  $60^\circ$ . Cu cât se va deplasa pata luminoasă creată de fascicol, dacă peste suprafața considerată se așează o placă de sticlă cu grosimea de 10 mm.

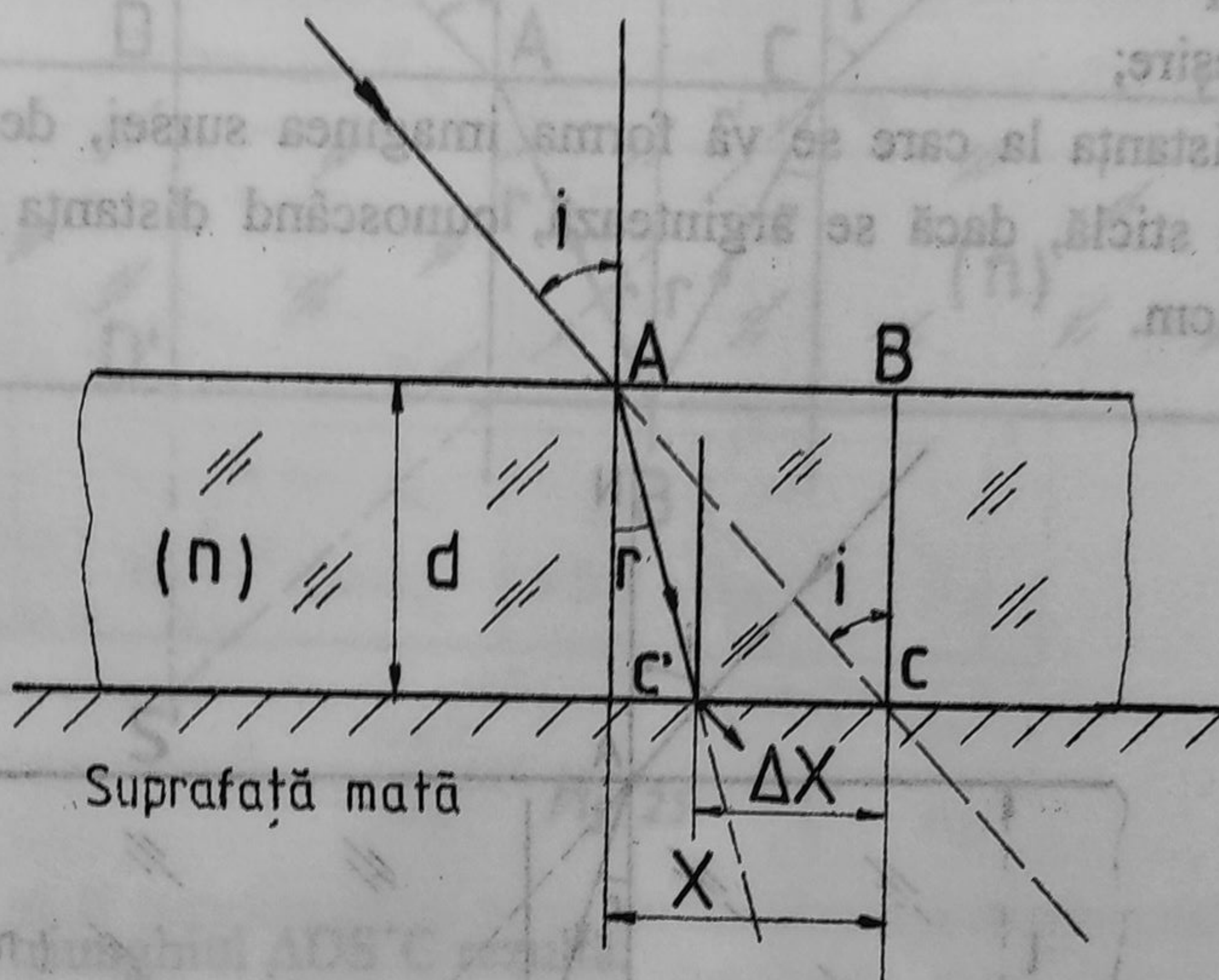


Fig. 23

Datele problemei:

$$i = 60^\circ \quad d = 10 \text{ mm}$$

$$n = 1,5$$

$$x = ?$$

În punctul A avem:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n \quad \sin r = \frac{\sin i}{n} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos i = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2} \quad AC = 2 \cdot BC = 20 \text{ mm}$$



$$\sin i = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad AB = x = AC \cdot \sin i = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10 \cdot \sqrt{3} \text{ mm}$$

$$\operatorname{tgr} = \frac{(x - \Delta x)}{BC} \quad \Delta x = 10,25 \text{ mm} \quad \frac{\sin r}{\cos r} = \frac{x - \Delta x}{d} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

4. O sursă trimete un fascicol îngust de lumină sub un unghi de incidență de  $45^\circ$  pe o placă de sticlă transparentă cu  $n = 1,5$  de grosime  $e = 2$  cm. Să se determine:

a) Deplasarea razei de la direcția inițială și deplasarea petei de lumină pe fața de ieșire;

b) Distanța la care se va forma imaginea sursei, de fața interioară a plăcii de sticlă, dacă se argintează, cunoscând distanța de la sursă la placa  $d = 5$  cm.

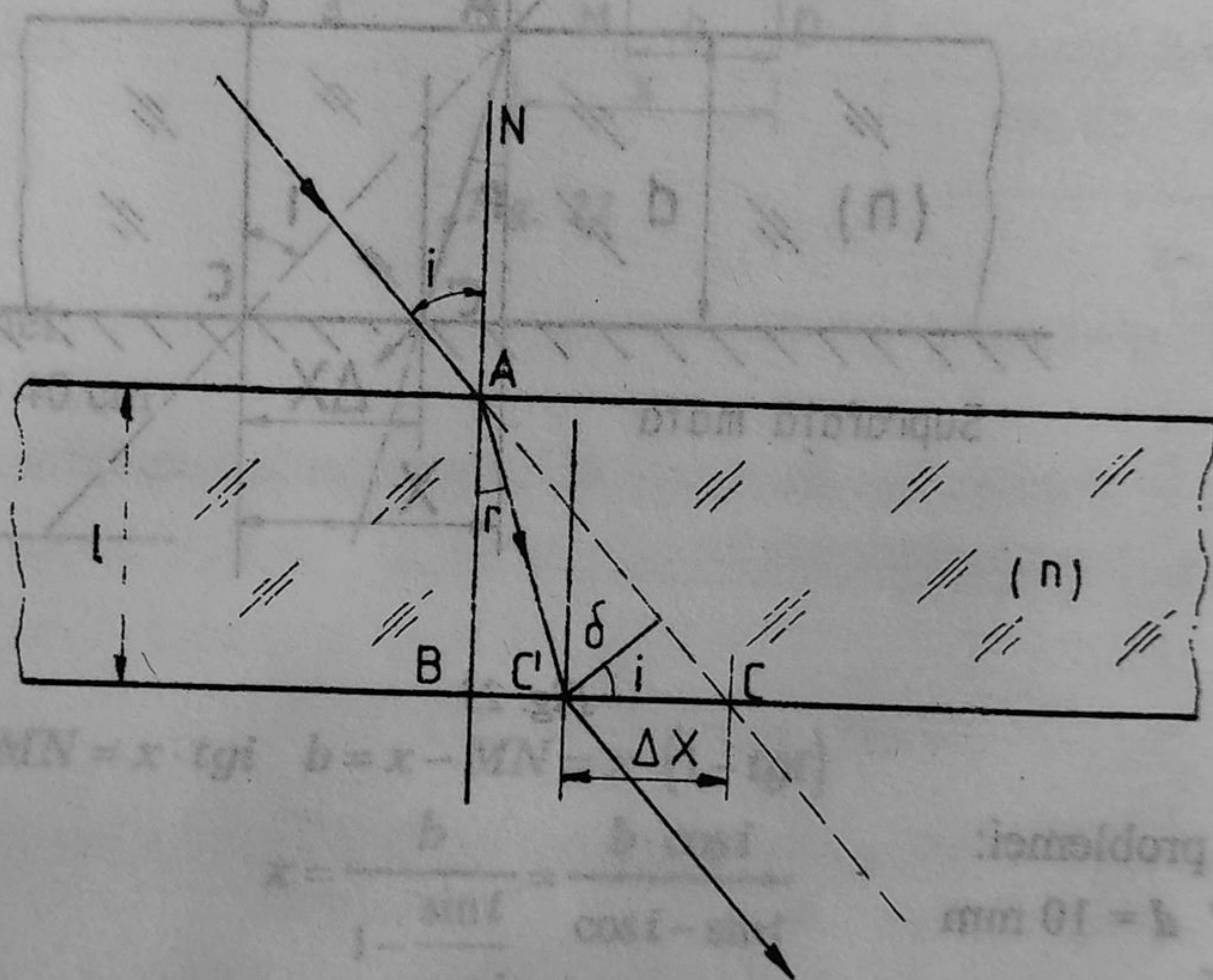


Fig. 24

Datele problemei:

$$e = 2 \text{ cm} \quad n = 1,5$$

$$i = 45^\circ \quad d = 5 \text{ cm}$$

a)  $\delta = ? \quad \Delta x = ?$

b)  $l = ?$



a) Conform relației:

$$\delta = d$$

$$d = e \cdot \sin i \cdot \left( 1 - \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \right) = 6,9 \text{ mm}$$

$$\Delta x \cdot \cos 45^\circ = d \quad \Delta x = 9,8 \text{ mm}$$

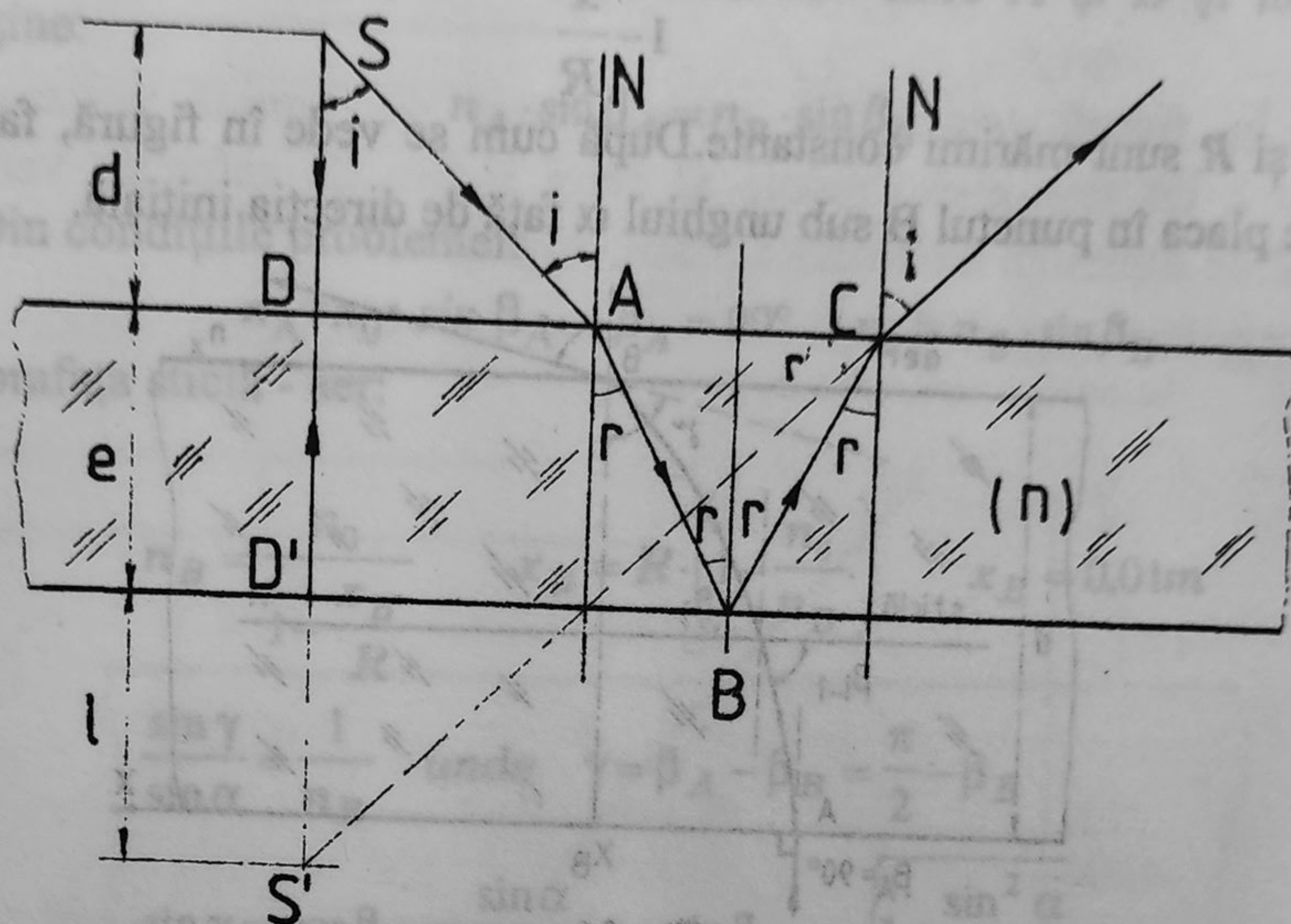


Fig. 25

b) Din triunghiul  $\Delta DS'C$  rezultă:

$$e + l = DC \cdot \operatorname{ctg} i \quad \text{căci } r' = 90^\circ - i$$

de unde:

$$l = (DA + AC) \cdot \operatorname{ctg} i - e$$

$$l = \left( d \cdot \frac{\sin i}{\cos i} \cdot \frac{\cos i}{\sin i} + 2 \cdot e \cdot \frac{\sin r}{\cos r} \cdot \frac{\cos i}{\sin i} \right) - e$$

ținând cont că:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n \quad \sin r = \frac{\sin i}{n}$$

$$l = d - e \cdot \left( 1 - 2 \cdot \frac{\sqrt{1 - \sin^2 i}}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \right)$$

decă  $l$  este funcție de unghiul de incidență  $l = l(i)$ . Pentru unghiuri de incidență mici  $i \approx 0^\circ$   $\sin i \approx 0$   $l = 5,66 \text{ cm}$ .



5. Pe o placă cu fețe plan-paralele, în punctul A de coordonată  $x = 0$ , perpendicular pe placă, ajunge un flux îngust de lumină. Indicele de refracție al substanței din care este confecționată placa variază după formula:

$$n_x = \frac{n_0}{1 - \frac{x}{R}}$$

unde  $n_0$  și  $R$  sunt mărimi constante. După cum se vede în figură, fascicolul părăsește placa în punctul B sub unghiul  $\alpha$  față de direcția inițială.

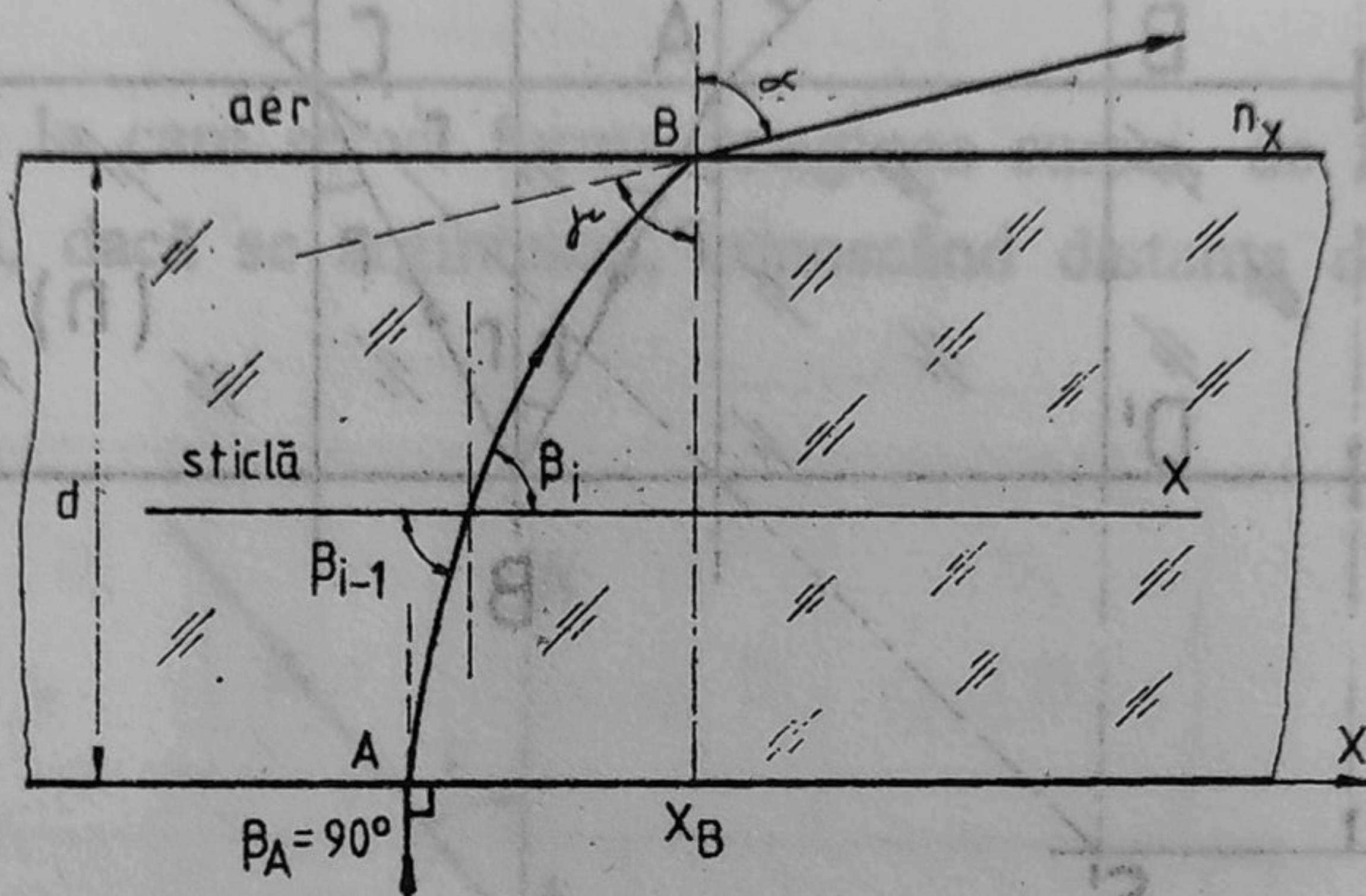


Fig. 26

- Determinați indicele de refracție  $n_B$  în punctul B în care fascicolul părăsește placa;
- Determinați coordonata  $x_B$  a punctului B;
- Determinați grosimea plăcii  $d$ . Se consideră  $n = 1,2$   $R = 13$  cm  $\alpha = 30^\circ$ . (Olimpiada internațională - 1974 Polonia).

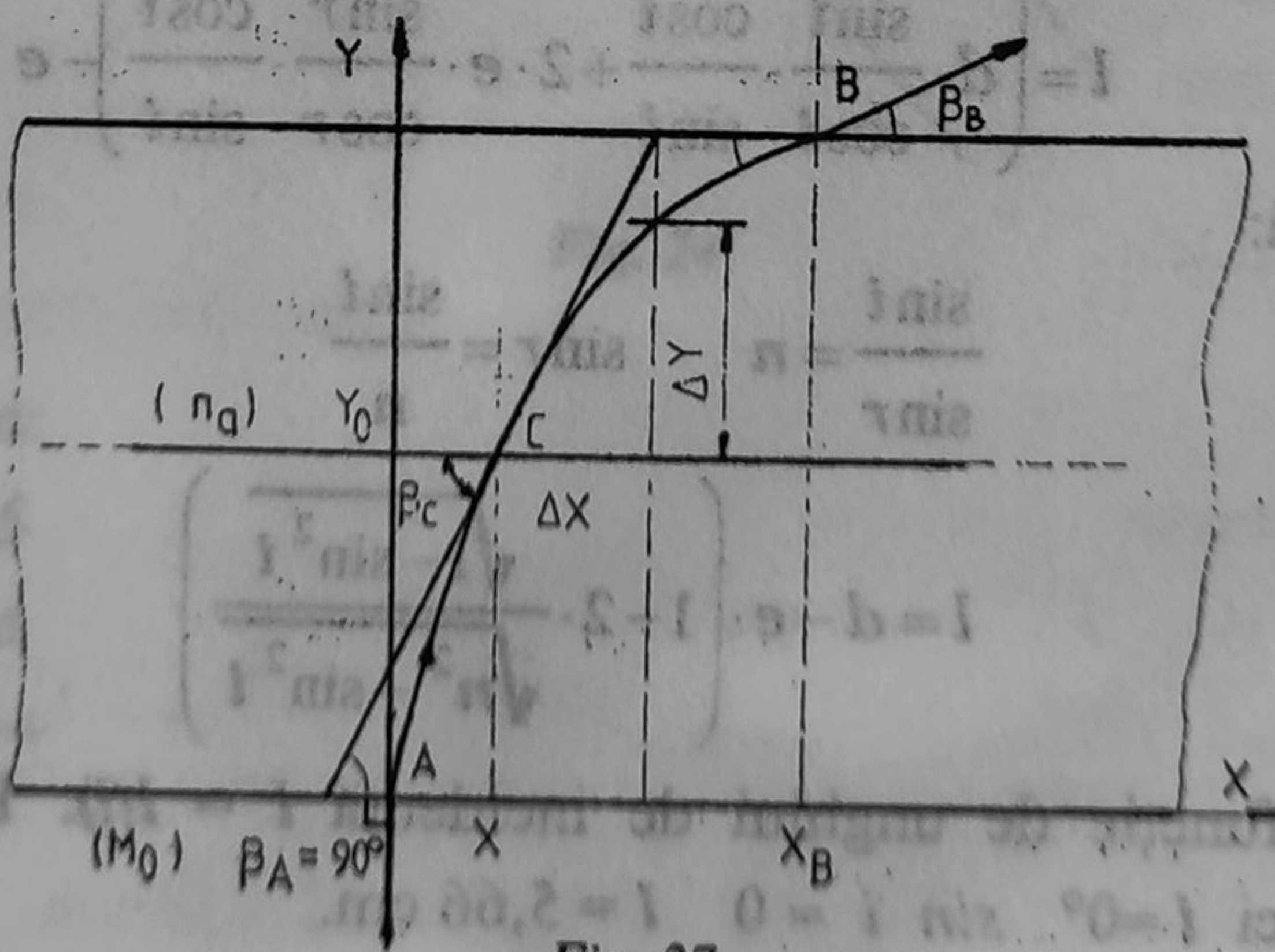


Fig. 27



a) Tăiem mintal, placa în straturi foarte subțiri perpendiculare pe axa Ox. În interiorul fiecărui strat indicele de refracție poate fi considerat constant. Scriem legea refracției la trecerea din stratul  $i-1$  către stratul  $i$ :

$$\frac{\sin \beta_{i-1}}{\sin \beta_i} = \frac{n_i}{n_{i-1}}$$

Scriind relațiile pentru toate straturile între A și B și înmulțindu-le se obține:

$$n_A \cdot \sin \beta_A = n_B \cdot \sin \beta_B$$

Din condițiile problemei:

$$n_A = n_0 \cdot \sin \beta_A \quad \beta_A = 90^\circ \quad n_0 = n_B \cdot \sin \beta_B$$

La suprafața sticlă - aer:

$$n_B = \frac{n_0}{1 - \frac{x_B}{R}} \quad x_B = R \cdot \left(1 - \frac{n_0}{n_B}\right) \quad x_B = 0,01m$$

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{1}{n_B} \quad \text{unde} \quad \gamma = \beta_A - \beta_B = \frac{\pi}{2} - \beta_B$$

$$\sin \gamma = \cos \beta_B = \frac{\sin \alpha}{n_B} \quad \sin \beta_B = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n_B^2}}$$

$$n_0 = n_B \cdot \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n_B^2}} \quad \text{sau} \quad n_B = \sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha} = 1,3$$

c) După cum s-a arătat la punctul a), în punctul C de coordonate x și y avem:

$$n_C \cdot \sin \beta_C = n_0 \cdot \sin \beta_A = n_0$$

$$\sin \beta_C = \frac{n_0}{n_C}$$

$$n_C = \frac{n_0}{1 - \frac{x}{R}} \quad \sin \beta_C = 1 - \frac{x}{R} \quad \sin \beta_C = \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

$$\sin \beta_C = 1 - \frac{x}{R} = \frac{R-x}{R} \quad \text{tg} \beta_C = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{R-x}{\sqrt{R^2 - (R-x)^2}}$$

$$\Delta y = \Delta x \cdot \frac{R-x}{\sqrt{R^2 - (R-x)^2}} \quad \text{pentru} \quad \Delta x \rightarrow dx \quad \text{și} \quad \Delta y \rightarrow dy$$



$$dy = \frac{R-x}{\sqrt{R^2 - (R-x)^2}} \cdot dx$$

$$d = y_B = \int_0^{x_B} \frac{R-x}{\sqrt{R^2 - (R-x)^2}} \cdot dx = \sqrt{R^2 - (R-x)^2}$$

$$d = \sqrt{x_B \cdot (2R - x_B)} \quad y_B = 0,05m$$

6. În figură este arătat mersul razei de lumină printr-o placă transparentă cu fețe plan-paralele al cărei indice de refracție variază cu distanța  $Z$  de suprafața interioară a plăcii. Arătați că:

a)  $n_A \cdot \sin \alpha = n_B \cdot \sin \beta$

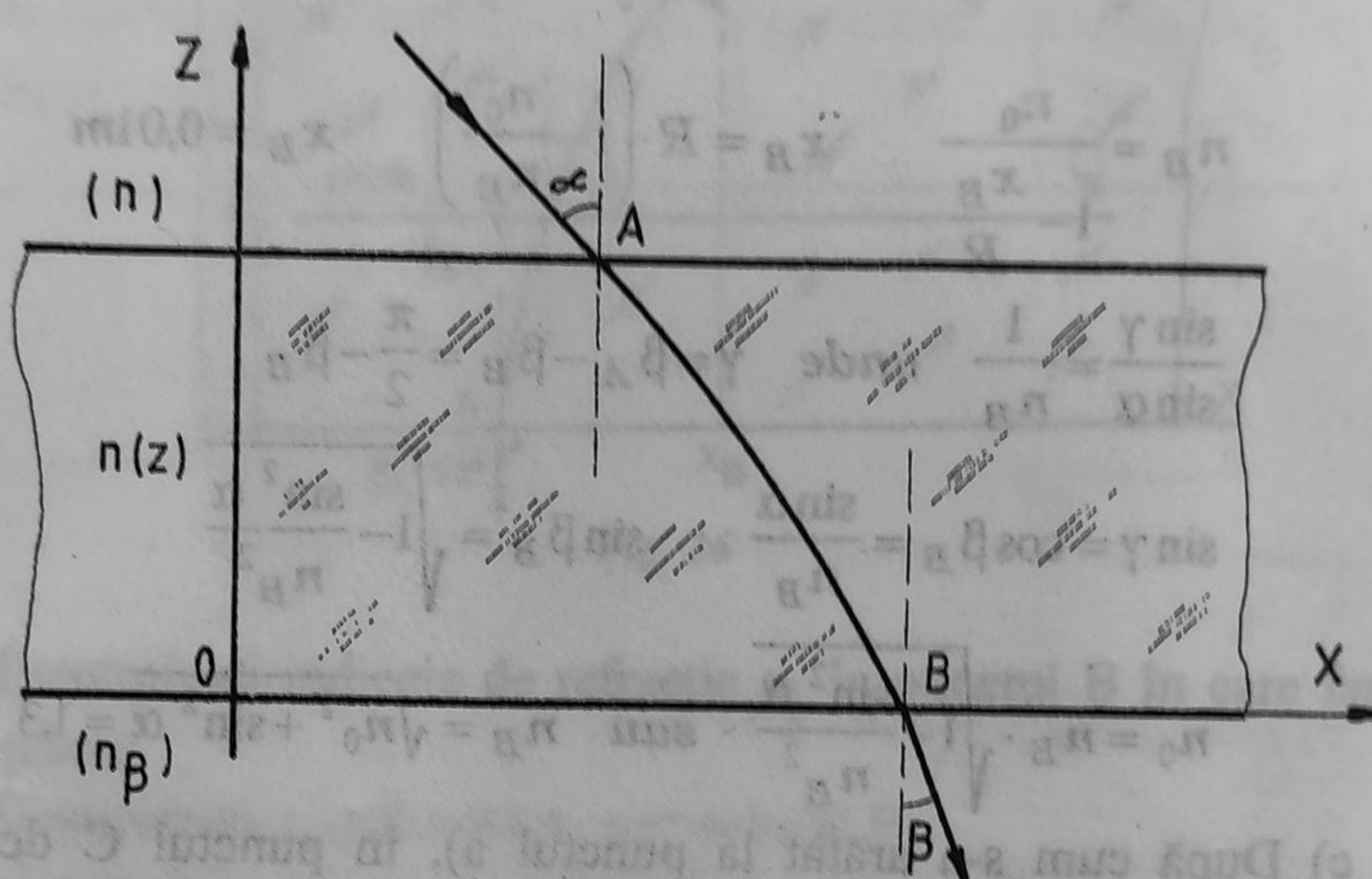


Fig. 28

b) Imaginați-vă că vă aflați în mijlocul unui pustiu plat. În depărtare vedeți ceva asemănător cu suprafața unei ape. Când vă apropiați de apă, ea se depărtează în mod corespunzător față de dv., astfel că distanța la aceasta rămâne tot timpul egală cu 250 m. Explicați acest fenomen, cunoscut și sub numele de *fata Morgana*.

c) Calculați temperatura  $t$  lângă suprafața Pământului pentru punctul precedent al problemei, presupunând că ochii dv se află la înălțimea de 1,6 m de suprafața acesteia. Știind că indicele de refracție al aerului este  $n$  pentru temperatura  $t = 15^\circ\text{C}$  și presiunea atmosferică normală este egală cu 1,000276 atm. Temperatura aerului la o înălțime mai mare de 1 m se consideră constantă și egală cu  $30^\circ\text{C}$ . Presiunea este normală 0,1013 MPa.



Se consideră că  $(n-1)$  este direct proporțional cu densitatea de particule de gaz. (Olimpiada Internațională - 1984 Elveția)

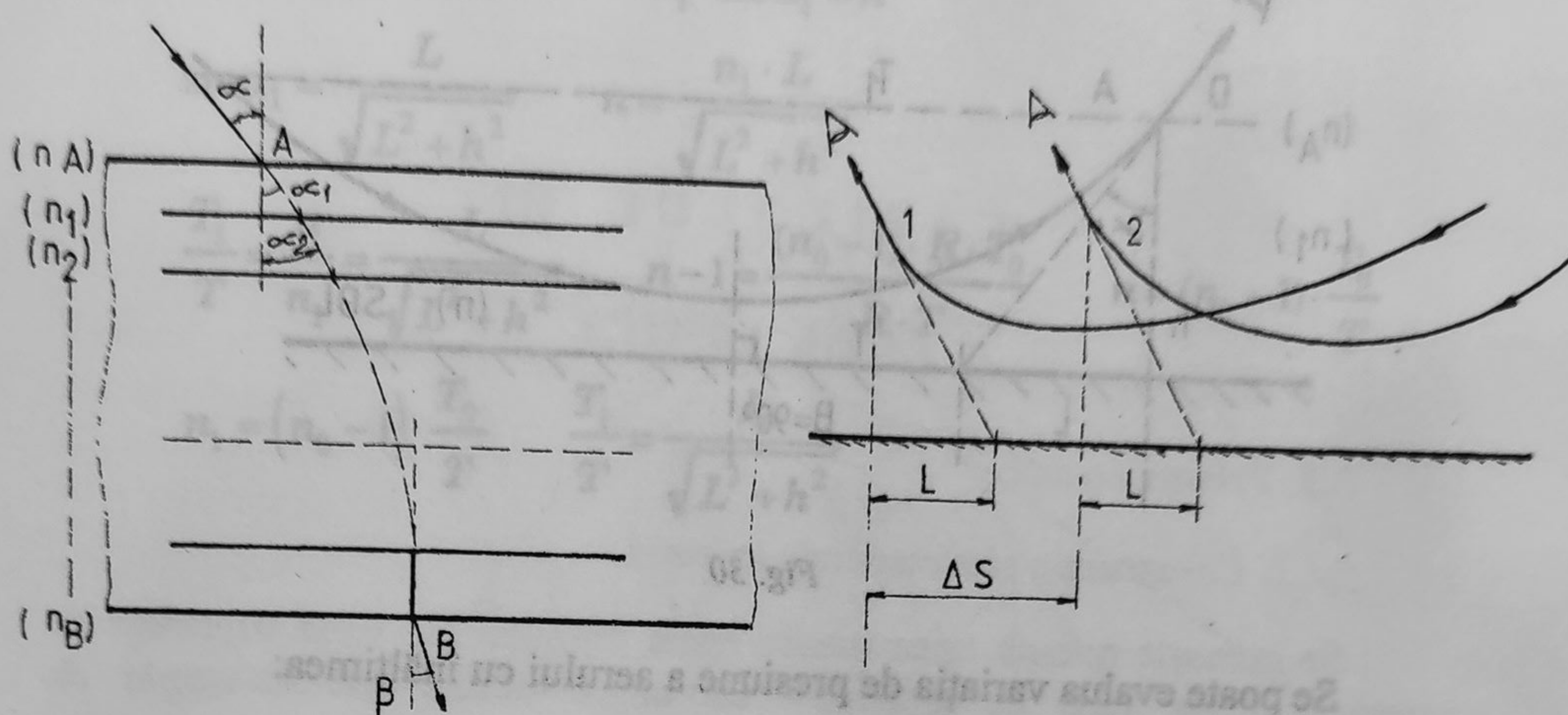


Fig. 29

a) Descompunem stratul de aer într-un număr mare de straturi paralele, fiecărui strat corespunzând un indice  $n_1, n_2, n_3, \dots$ . Scriind legea refracției pentru fiecare pereche de straturi succesive:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_1} = \frac{n_1}{n_A}, \quad \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} = \frac{n_3}{n_2}, \dots$$

de unde:

$$n_A \cdot \sin \alpha = n_1 \cdot \sin \alpha_1 = n_2 \cdot \sin \alpha_2 = \dots = n_B \cdot \sin \beta$$

b) Razele de lumină provenind de la cer, se refractă în straturile de aer de lângă suprafața Pământului, care are o temperatură mai mare și deci un indice  $n$  mai mic.

La îndeplinirea condiției de reflexie totală, este văzut *mirajul* care apare ca o suprafață de apă ce reflectă cerul.

Prin deplasarea observatorului pe distanța  $\Delta S$ , toată imaginea se deplasează astfel ca distanța până la iluzia optică rămâne aceeași.



c) Să considerăm raza care pleacă din marginea apei ca în figură:

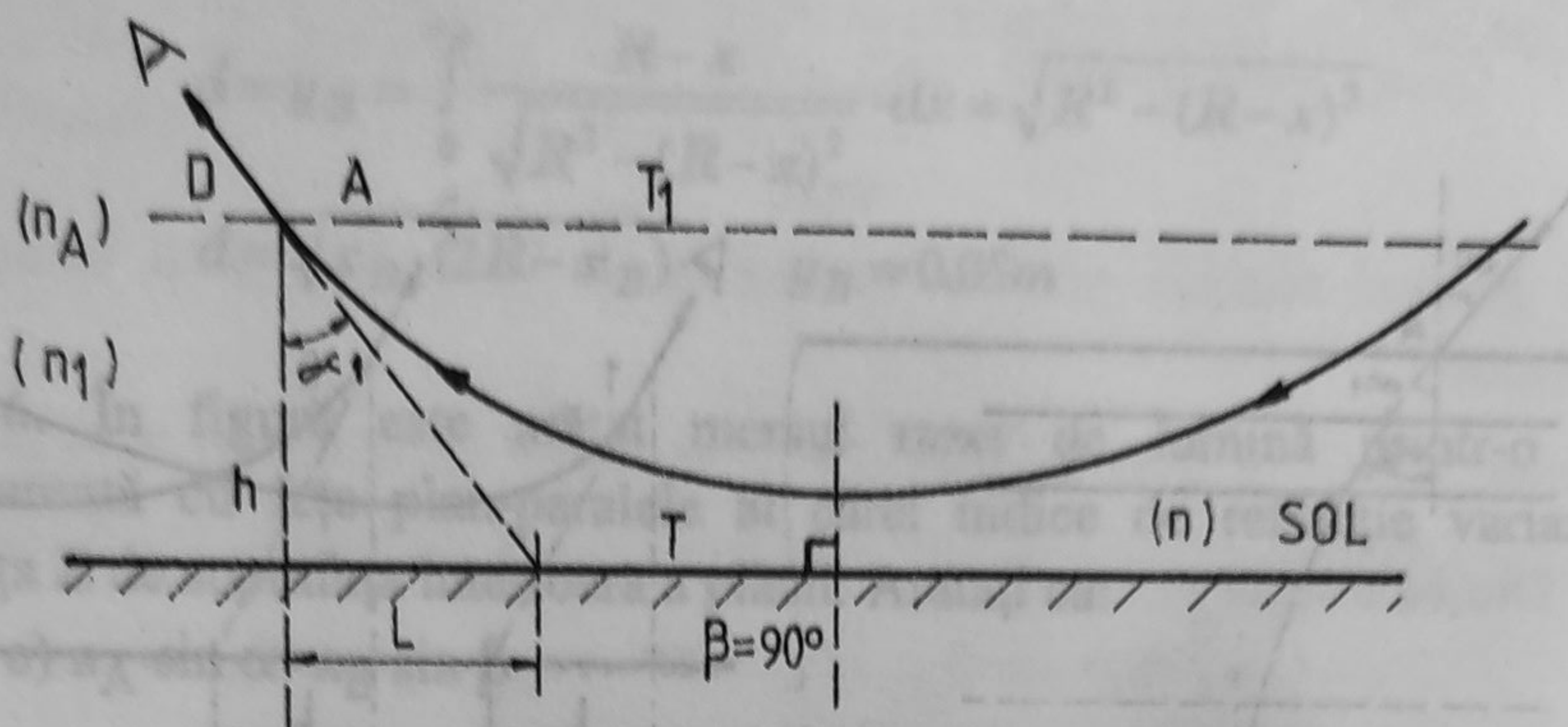


Fig. 30

Se poate evalua variația de presiune a aerului cu înălțimea:

$$\Delta p < \rho \cdot g \cdot h = \frac{p_A \cdot M}{R \cdot T_1} \cdot g \cdot h \quad \frac{\Delta p}{p_A} < \frac{M \cdot g \cdot h}{R \cdot T_1} = 1,8 \cdot 10^{-4}$$

$$n \cdot \sin \beta = n_1 \cdot \sin \alpha_k \quad \text{deoarece} \quad \sin \beta = \sin 90^\circ = 1$$

$$\text{atunci} \quad n_1 \cdot \sin \alpha_k = n$$

$\alpha_k$  - fiind unghiul critic la care se produce mirajul.

Din:

$$\sin \alpha = \frac{L}{\sqrt{L^2 + h^2}} = \text{rezultă} \quad n = \frac{L}{\sqrt{L^2 + h^2}} \cdot n_1$$

$$\text{din condiția } n-1 \approx \rho \quad \text{și} \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{p_A \cdot M}{R \cdot T} \quad n-1 = \frac{p_A \cdot M}{R \cdot T_0}$$

$$n-1 = \frac{p_a \cdot M}{R \cdot T} \quad t_0 = 15^\circ \text{C} \quad T_0 = 288 \text{ K} \quad t_1 = 30^\circ \quad T_1 = 303 \text{ K}$$

$$n = 1 + \frac{T_0}{T} \cdot (n_0 - 1) \quad n_1 = 1 + \frac{T_0}{T_1} \cdot (n_0 - 1) = 1,0002623$$

$$n = \frac{L}{\sqrt{L^2 + h^2}} \cdot n_1 = 1,0002418 \quad T = T_0 \cdot \frac{n_0 - 1}{n - 1} = 329 \text{ K}$$

$$t = 56^\circ \text{C}$$



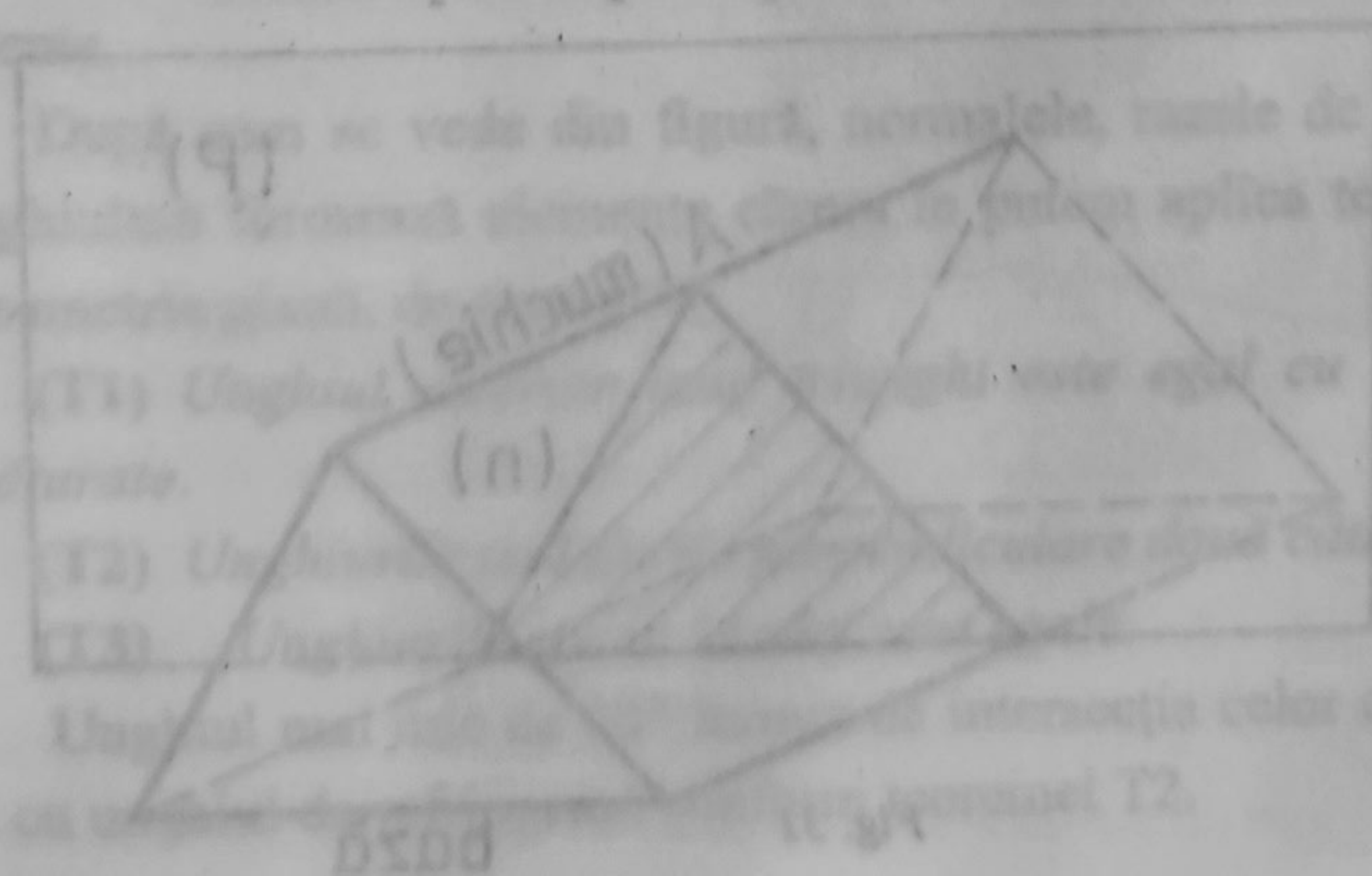
Deci se poate neglija variația de presiune cu înălțimea în comparație cu variația indicelui de refracție al aerului.

$$n_1 \cdot \sin \alpha_1 = n \cdot \sin 90^\circ \quad n_1 \cdot \sin \alpha_1 = n$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{L}{\sqrt{L^2 + h^2}} \quad n = \frac{n_1 \cdot L}{\sqrt{L^2 + h^2}}$$

$$\frac{T_1}{T} = \frac{n}{n_1} = \frac{L}{\sqrt{L^2 + h^2}} \quad n - 1 = \frac{(n_0 - 1) \cdot R \cdot T_0}{R \cdot T} \quad n = (n_0 - 1) \cdot \frac{T_0}{T}$$

$$n_1 = (n_0 - 1) \cdot \frac{T_0}{T} \quad \frac{T_1}{T} = \frac{L}{\sqrt{L^2 + h^2}}$$





## CAPITOLUL III

### PIESE OPTICE

#### 3.1. Prisma optică

##### 3.1.1. Construcția și elementele prisme

Se numește prismă orice mediu optic mărginit de două suprafețe de separație plane, care fac între ele un unghi diedru (numit *unghi de refringență*) diferit de zero.

Vom aplica legile refracției la prismă, făcând abstracție de fenomenul de dispersie. Acest fenomen constă în devierea cu unghiuri diferite a radiațiilor cu diferite lungimi de undă. În cele ce urmează vom considera că raza de lumină este monocromatică (corespunde unei singure lungimi de undă).

Studiul prisme prezintă interes atât pentru a explica mersul diferit al razelor de lumină prin lentilele convergente sau divergente, cât și pentru utilitatea ei, în diverse instrumente optice, sau pentru determinarea indicelui de refracție al unui mediu optic necunoscut.

Ducând un plan perpendicular pe muchiile prisme, ca în figura de mai jos, se obține o secțiune numită *secțiunea principală a prisme*.

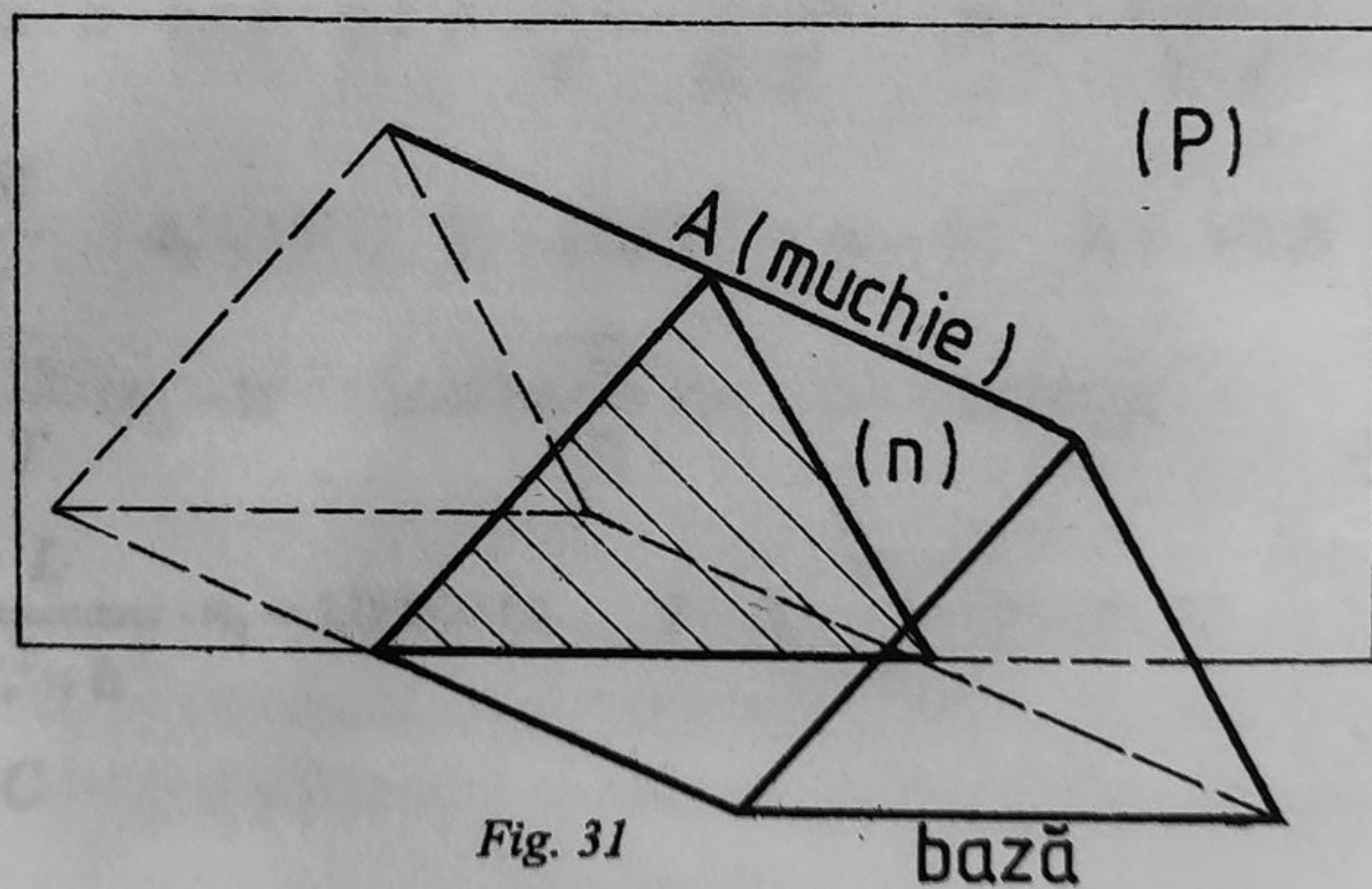


Fig. 31



*Muchea prismei* este linia de intersecție a celor două plane care delimitează prisma. În figura de mai jos se arată mersul razelor de lumină printr-o secțiune principală a prismei:

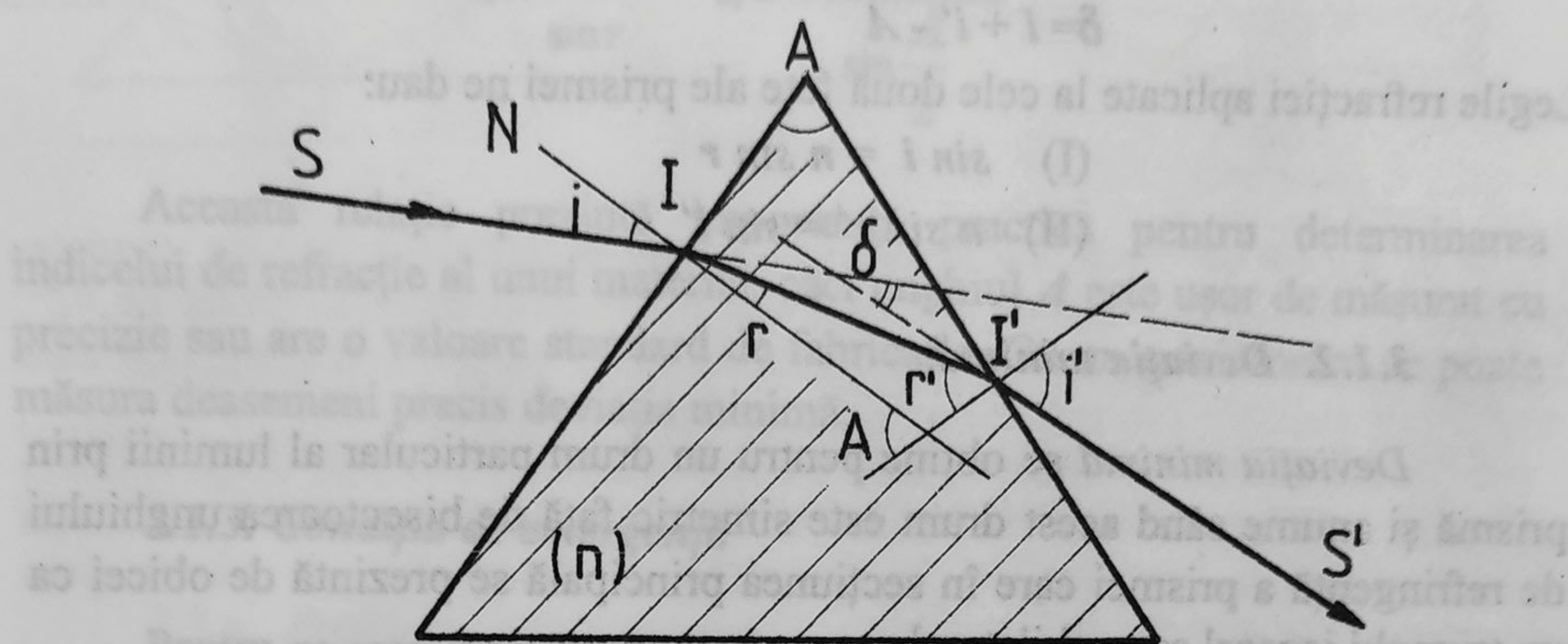


Fig. 32

În figură avem:

- SI - raza incidentă;
- $i$  - unghiul de incidență pe prima față;
- $r$  - unghiul de refracție în sticlă;
- S'I' - raza emergentă;
- $r'$  - unghiul de incidență pe a doua față;
- $i'$  - unghiul de refracție în aer;
- $\delta$  - unghiul de deviație al razei emergente față de direcția razei incidente.

După cum se vede din figură, normalele, razele de lumină, secțiunea triunghiulară formează elemente cărora le putem aplica teoreme elementare de geometrie plană, de exemplu:

(T1) *Unghiul exterior unui triunghi este egal cu suma unghiurilor nealăturate.*

(T2) *Unghiurile cu laturile perpendiculare două câte două sunt egale.*

(T3) *Unghiurile opuse la vârf sunt egale.*

Unghiul mai mic de  $90^\circ$  format de intersecția celor două normale este egal cu unghiul de refringentă conform teoremei T2.



Conform cu teorema T1 avem:

$$A = r + r'$$

$$\delta = (i - r) + (i' - r')$$

$$\delta = (i + i') - (r + r')$$

$$\delta = i + i' - A$$

Legile refracției aplicate la cele două fețe ale prisme ne dau:

$$(I) \quad \sin i = n \sin r$$

$$(II) \quad n \sin r' = \sin i'$$

### 3.1.2. Deviația minimă

*Deviația minimă* se obține pentru un drum particular al luminii prin prismă și anume când acest drum este simetric față de bisectoarea unghiului de refringentă a prisme care în secțiunea principală se prezintă de obicei ca un triunghi isoscel sau echilateral.

Se observă din expresia lui  $\delta$  că acesta depinde de unghiul de incidență  $i$ . Variind continuu acest unghi de la  $0^\circ$  la  $90^\circ$  se constată că scade până la o anumită valoare numită *unghi de deviație minimă*, după care crește din nou.

Valoarea minimă se obține din relațiile de mai sus pentru un mers simetric al razelor prin prismă, când:  $i = i'$  și  $r = r'$  deci când raza refractată de prima față, se propagă paralel cu baza, ca în figura de mai jos:

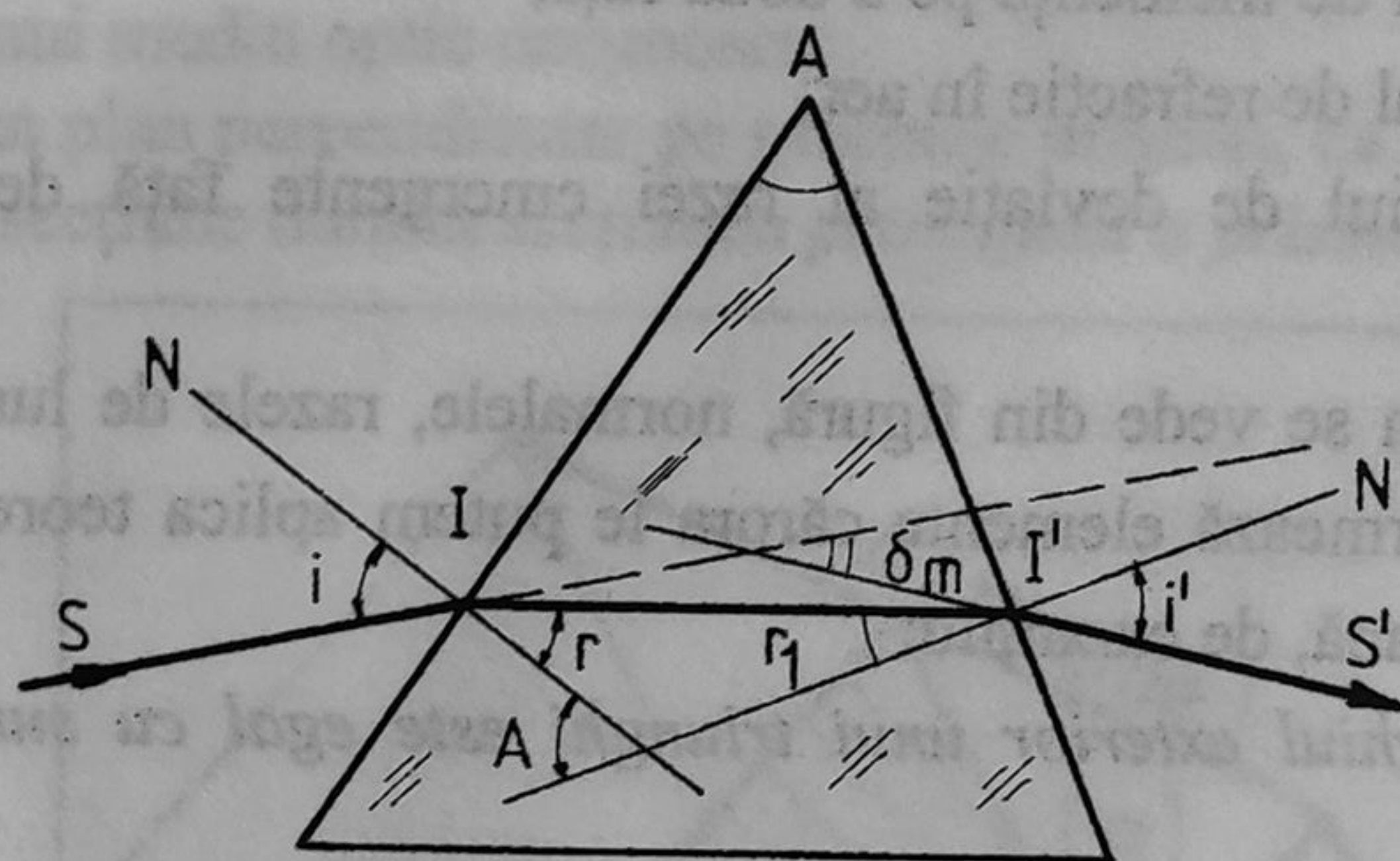


Fig. 33

În acest caz ecuațiile precedente devin mai simple:

$$A = 2 \cdot r \quad \delta_m = 2 \cdot i - A$$



$$A = 2 \cdot r \quad \delta_m = 2 \cdot i - A \quad A + \delta_m = 2 \cdot i \quad i = \frac{\delta_m + A}{2}$$

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} \quad n = \frac{\sin \frac{\delta_m + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

Această relație prezintă importanță practică pentru determinarea indicelui de refracție al unui material, căci unghiul  $A$  este ușor de măsurat cu precizie sau are o valoare standard de fabricație. Cu un goniometru se poate măsura deasemeni precis deviația minimă.

### 3.1.3. Condiția de emergență

Pentru ca raza din interiorul prisme să iasă în afară, prin suprafața a doua, trebuie să nu se producă reflexia totală, indiferent de unghiul de incidență pe prima față. Deci trebuie ca:  $r' \leq l$ .

Deoarece  $A = r + r'$   $r = A - r'$  punem condiția:  $r \leq A - l$

$$\sin i = n \cdot \sin r \quad \sin i \geq n \cdot \sin(A - l)$$

$$\text{pentru } i_{\max} = \frac{\pi}{2} \quad 1 \geq n \cdot \sin(A - l) \quad \frac{1}{n} \geq \sin(A - l)$$

$$\text{împreună cu condiția } \frac{1}{n} = \sin l$$

$$\text{obținem: } \sin l \geq \sin(A - l) \quad l \geq A - l \quad 2 \cdot l > A$$

$$\text{deci: } A < 2 \cdot l$$

*Exemplu:* sticla de crown are  $l = 40^\circ 50'$  pentru radiația galbenă de 550 nm. Pentru a ieși din prismă, indiferent de unghiul de incidență se ia  $A = 81^\circ 40'$ .

### 3.1.4. Prisma cu reflexie totală

Este o prismă cu unghiul de refringentă de  $90^\circ$  având secțiunea principală un triunghi dreptunghic (de obicei isoscel).

Unghiul limită pentru sticlă optică fiind de cca  $42^\circ$ , în această geometrie a prisme, se poate obține reflexia totală pe oricare din fețele și pe baza prisme așa după cum se poate vede din figura de mai jos.



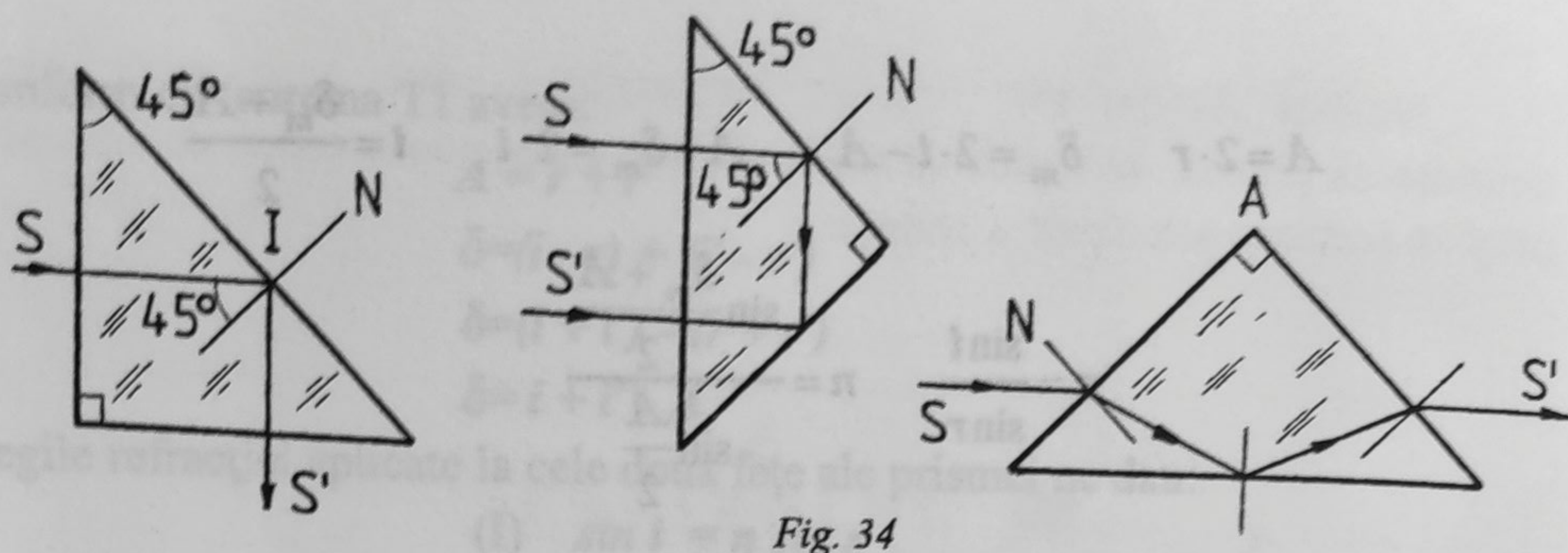


Fig. 34

În figură se vede că razele cu incidență normală trec ne deviate, unghiul de incidență fiind de  $45^\circ$  este mai mare decât unghiul limită de  $42^\circ$ . În tehnică, reflexia totală, este preferată reflexiei pe un strat reflectant care este supus alterării sub influența agenților fizici și chimici.

În plus, reflexia totală se face cu un randament mai bun decât reflexia oglindită. Prismele cu reflexie totală sunt folosite la construcția periscopeelor, a binoclelor, la aparatele de fotografiat cu vizare prin obiectiv și alte aparate de laborator.

### 3.1.5. Construcția imaginilor prin prismă

Pentru construirea imaginii unui punct luminos S prin prismă, sunt suficiente două raze divergente care cad pe o față a acesteia. Fascicolul devine convergent după trecerea prin prismă (raza 1 este deviată mai mult la ieșire decât raza 2) deci se va forma o imagine reală după cum se poate vedea din figură.  $\delta_1 = i_1 + i'_1 - A$   $\delta_2 = i_2 + i'_2 - A$   $\delta_1 > \delta_2$

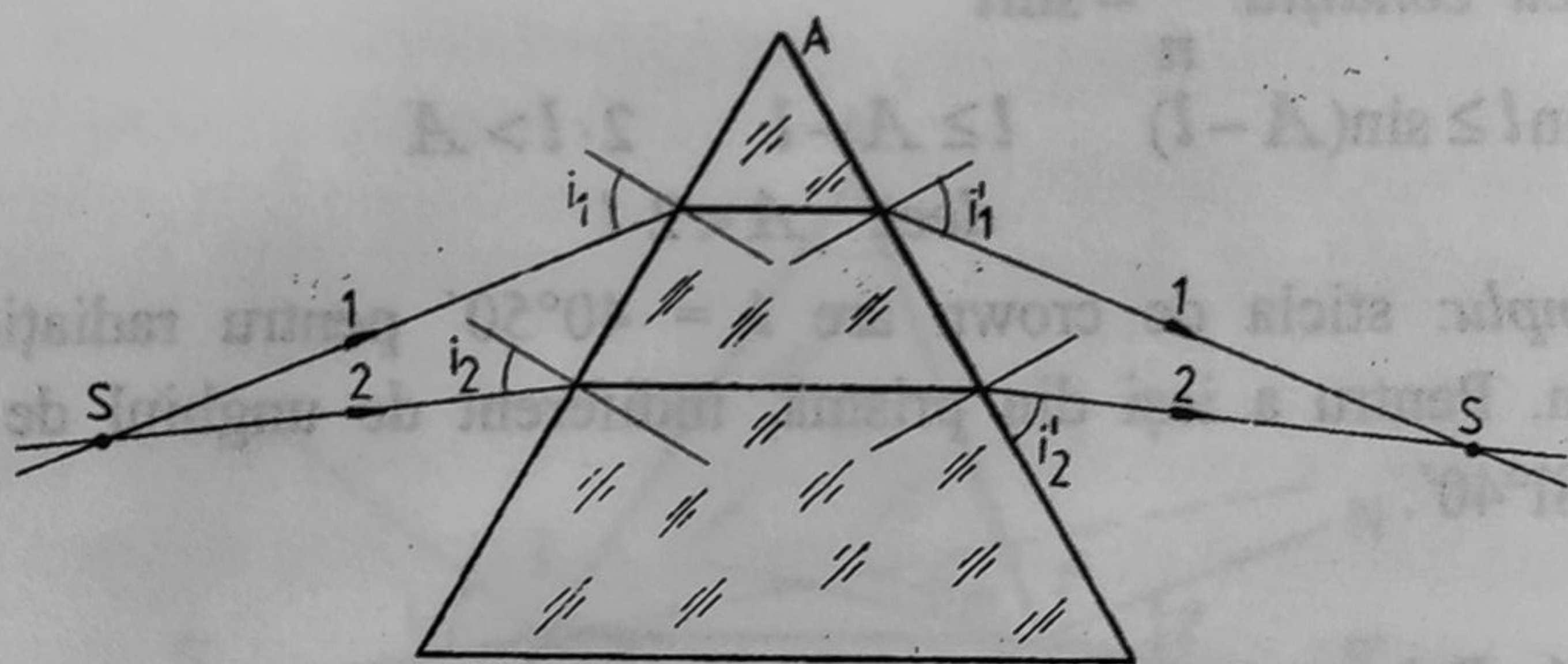


Fig. 35

După cum se vede din formula de deviație  $\delta = i + i' - A$  raza 1 va fi mai mult deviată în comparație cu raza 2, căci are unghiul de incidență mai mare. Cele două raze se vor intersecta formând o imagine reală.

O asociere de două prisme baza-bază explică convergența unei lentile biconvexe sau plan convexe, sau divergența unei lentile biconcave prin asocierea a două prisme puse vârf-vârf după cum se vede mai jos.



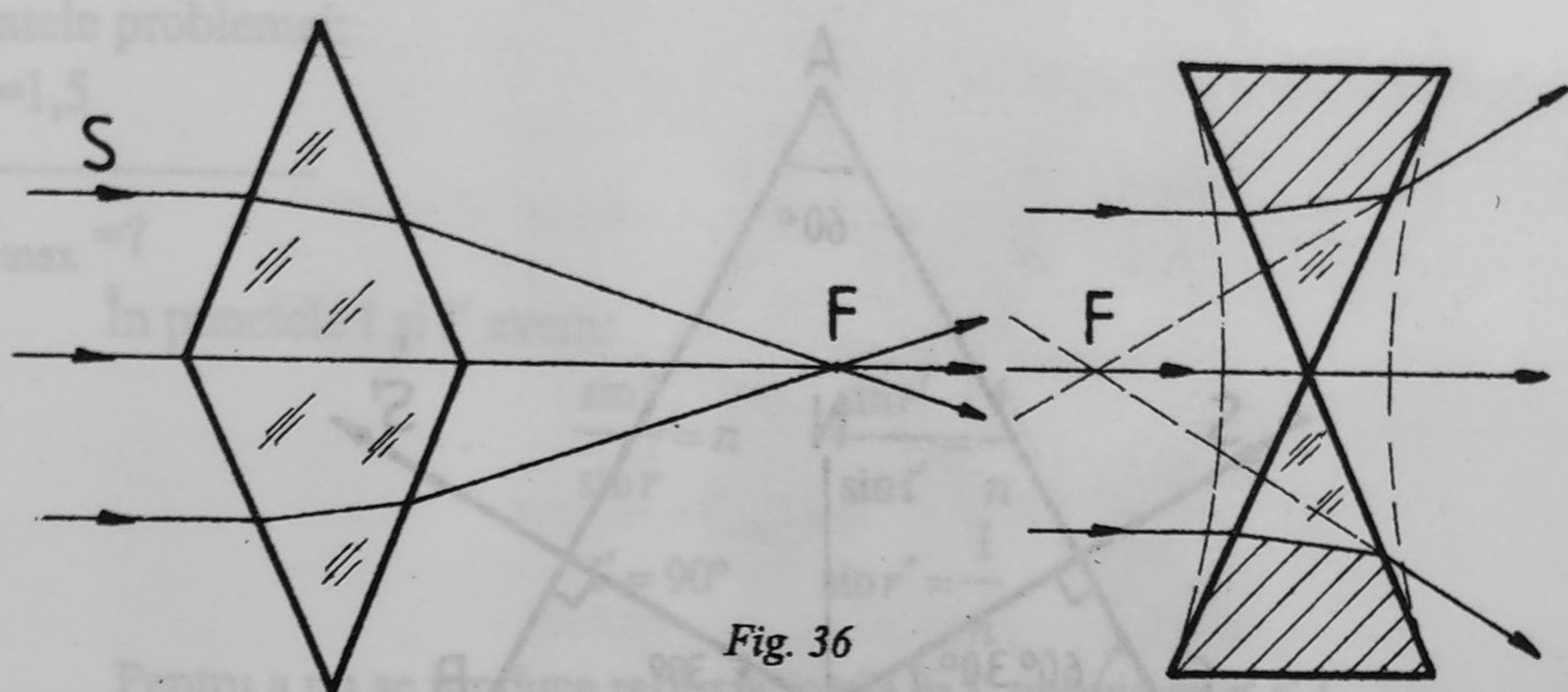


Fig. 36

O asociere de două prisme ale căror baze formează un mic unghi constituie *biprisma* Fresnel și este utilizată la obținerea de unde luminoase coerente. Este utilă în experiențele de optică interferențială.

### 3.1.6. Probleme rezolvate cu prisme

1. Ce unghi de refrigență are o prismă dacă este egal cu unghiul de deviație minimă? Se dă indicele de refracție al sticlei obișnuite  $n = 1,5$ .

Datele problemei:

$$A = 60^\circ \quad n = 1,5$$

$$A = ?$$

$$n = \frac{\sin A}{\sin \frac{A}{2}} \quad n \cdot \sin \frac{A}{2} = 2 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \frac{n}{2} \quad A = 2 \cdot \arccos \frac{n}{2}$$

Pentru sticlă obișnuită:

$$A = 2 \cdot \arccos 0,75 = 82,8^\circ \approx 83^\circ$$

2. O rază de lumină cade perpendicular pe fața unei prisme cu secțiunea de triunghi echilateral și iese prin cealaltă față.

- Să se deseneze mersul razelor de lumină;
- Să se calculeze unghiul format de raza incidentă și raza emergentă știind că  $n = 1,5$ ;
- Cum se modifică acest unghi prin introducerea prisme în apă?



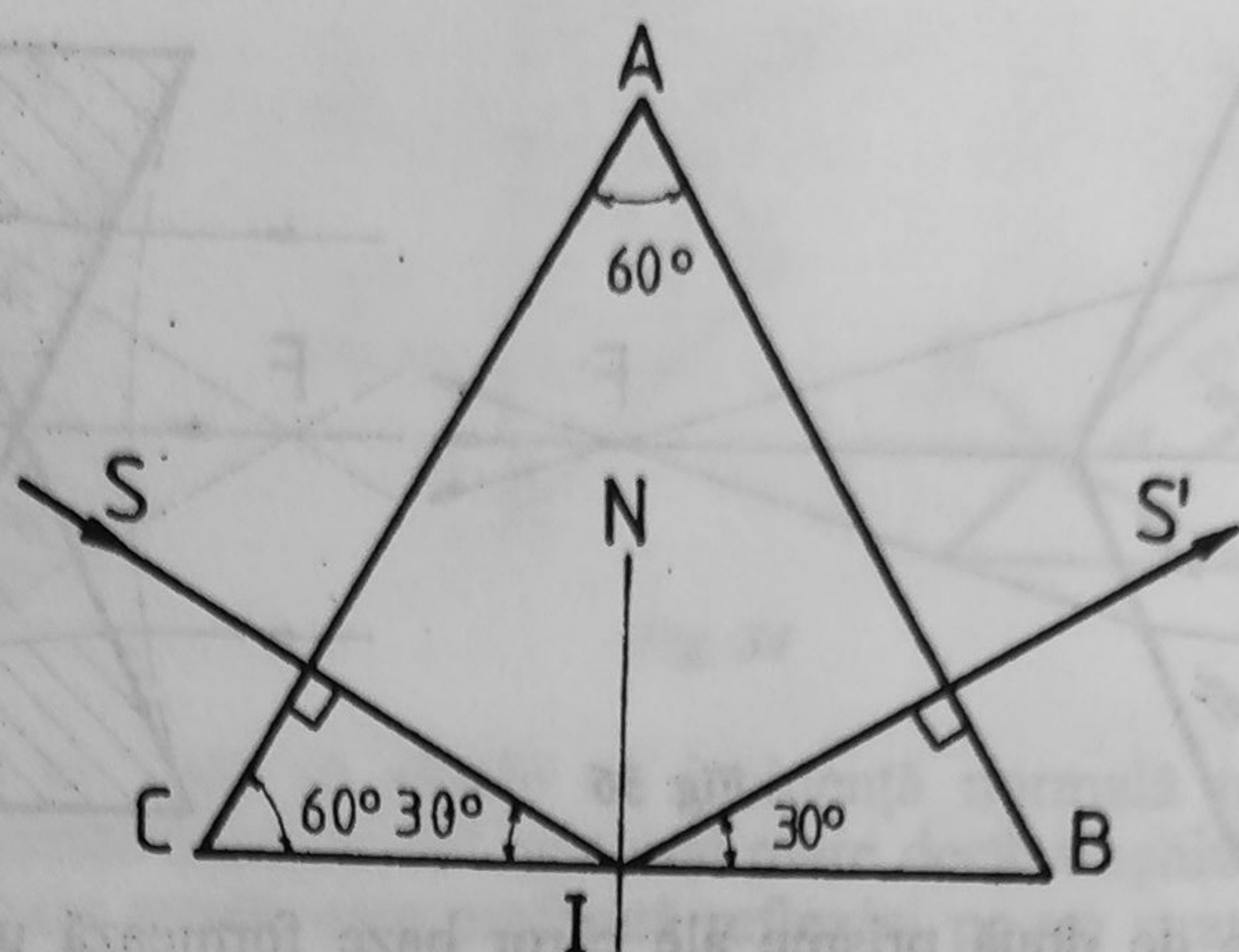


Fig. 37

Datele problemei:

$A=60^\circ$   $n=1,5$

a) construcția imaginii

b)  $\beta = ?$

c)  $\beta' = ?$

a) raza iese perpendicular pe a doua față

b)  $\beta = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$   $\sin l = \frac{1}{n}$   $i = 60^\circ$   $i > l$

c)  $\beta' = \beta = 120^\circ$  căci avem incidență normală.

3. O rază de lumină intră într-o prismă de sticlă cu  $n = 1,5$ . Care este valoarea maximă pe care o poate lua unghiul de refringență astfel încât raza de lumină să poată ieși prin a doua suprafață.

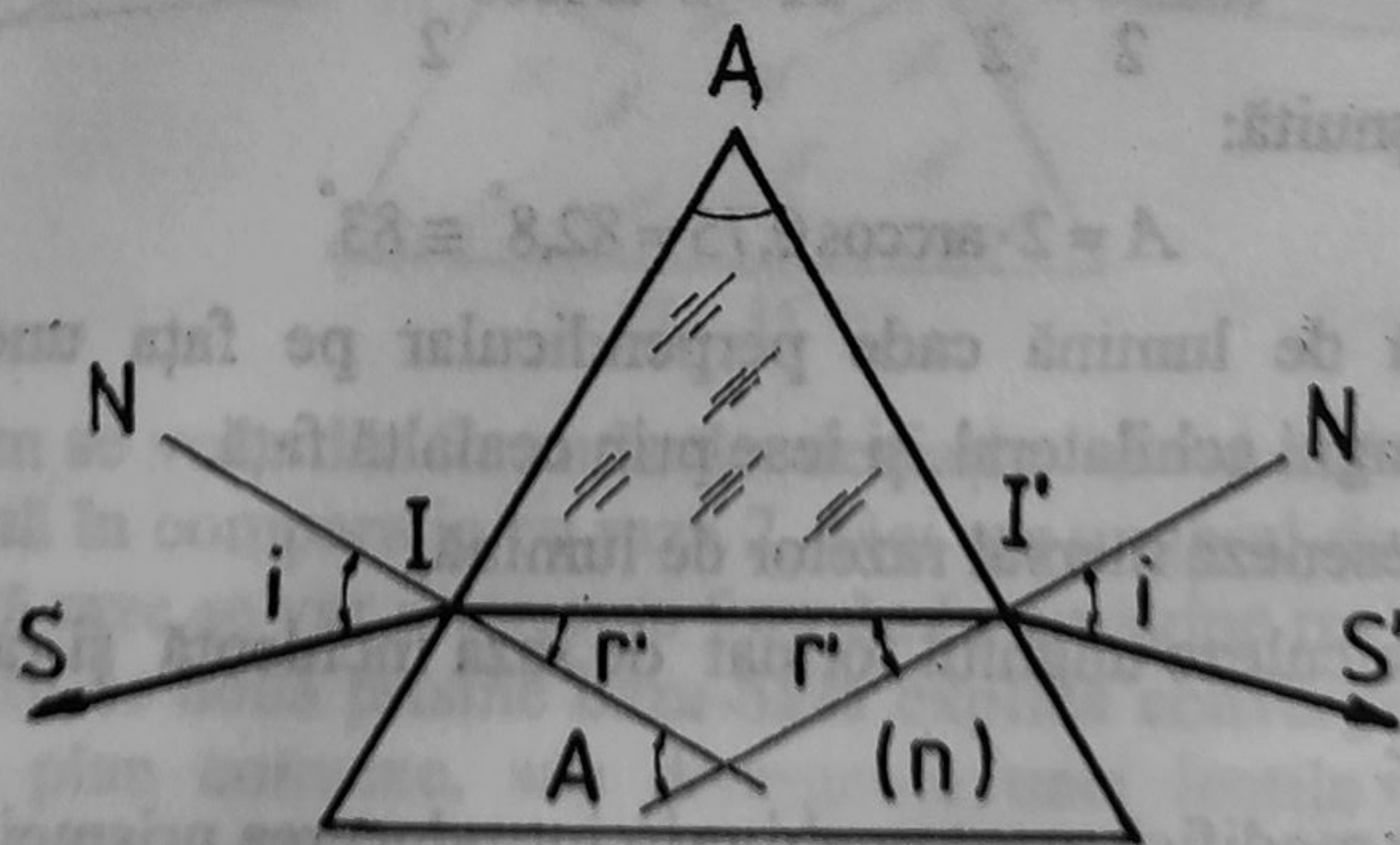


Fig. 38



Datele problemei:

$$n=1,5$$

$$A_{\max}=?$$

În punctele I și I' avem:

$$\begin{aligned} \frac{\sin i}{\sin r} &= n & \frac{\sin r'}{\sin i'} &= \frac{1}{n} \\ i' &= 90^\circ & \sin r' &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Pentru a nu se produce reflexia totală în I' trebuie ca  $r' \leq l$

$$r' = \arcsin \frac{1}{n} \quad \arcsin \frac{1}{n} \leq l$$

$$r' = 41,8^\circ \quad A \leq r + r' = 83,6^\circ$$

4. Care este unghiul minim de incidență pe o față a prisme de sticlă ( $n=1,5$ ) pentru ca raza de lumină să iasă din prismă prin cealaltă față, știind că unghiul de refrigență al prisme este de  $80^\circ$ .

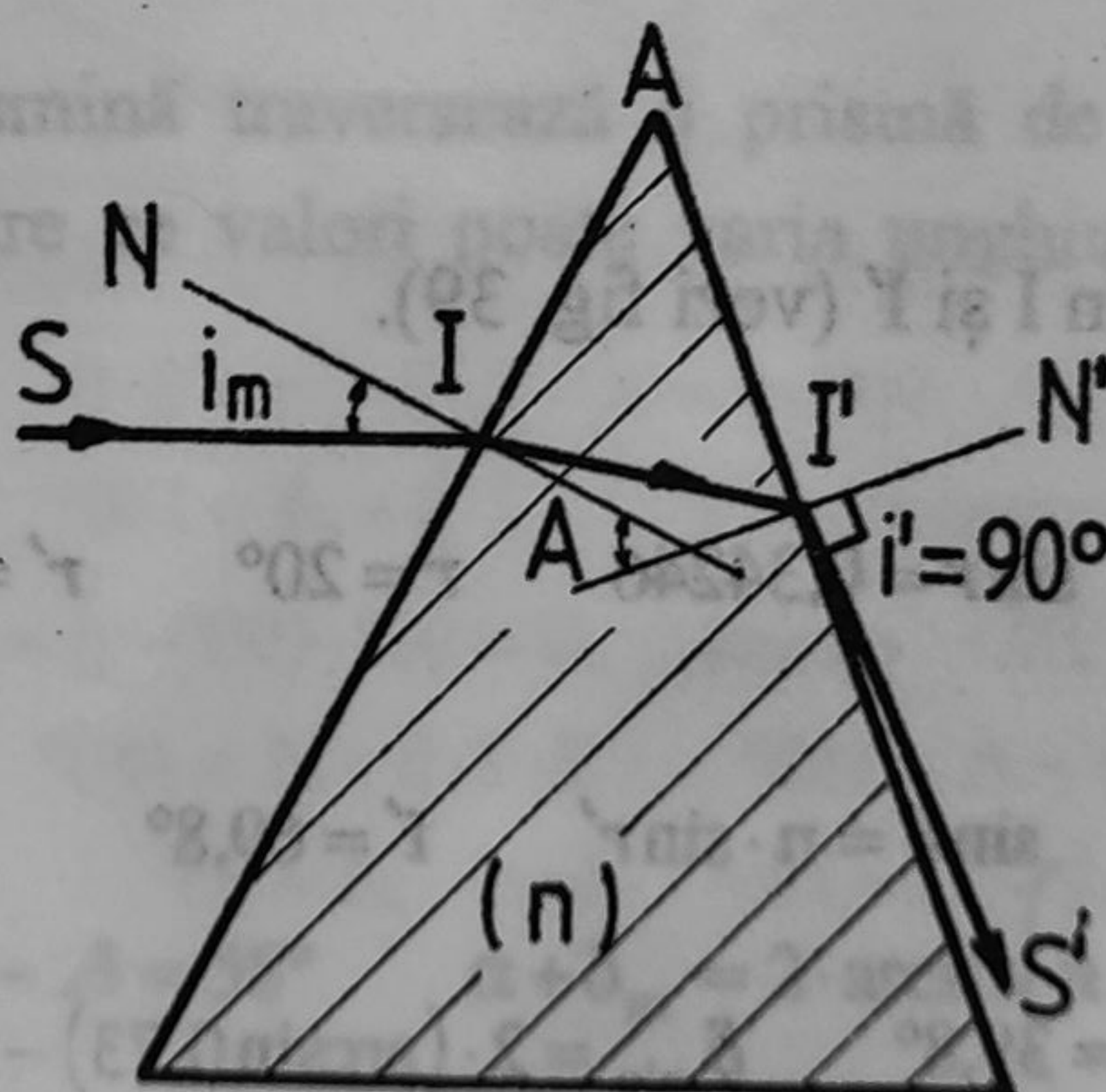


Fig. 39

Datele problemei:

$$n=1,5 \quad A=80^\circ$$

$$i_{\min}=?$$



Aplicăm legea refracției în I și I':

$$(I') \quad \frac{\sin r'}{\sin i'} = \frac{1}{n} \quad \sin r' = \frac{1}{n} \quad \text{căci } i' = 90^\circ$$

$$r' = \arcsin \frac{1}{n} = 41,8^\circ \quad A = r + r' \quad r = 40^\circ$$

$$(I) \quad \frac{\sin(i_{\min})}{\sin r} = n \quad \sin(i_{\min}) = n \cdot \sin r$$

$$\sin(i_{\min}) = 0,964182 \quad i_{\min} = 74,618^\circ$$

5. O prismă de cuarț are unghiul de refringentă de  $60^\circ$ . Prin aceasta trece o radiație monocromatică pentru care indicele de refracție corespunzător este  $n = 1,46$  sub un unghi de incidență de  $30^\circ$ . Să se determine deviația și deviația minimă a razei.

Datele problemei:

$$A = 60^\circ \quad n = 1,46$$

$$i = 30^\circ$$

---


$$\delta > \delta_{\min}$$

Aplicăm legea refracției în I și I' (vezi fig. 39).

$$(I) \quad \frac{\sin i}{\sin r} = n \quad \sin r = 0,34246 \quad r = 20^\circ \quad r' = A - r = 40^\circ$$

$$(I') \quad \frac{\sin r'}{\sin i'} = \frac{1}{n} \quad \sin i' = n \cdot \sin r' \quad i' = 69,8^\circ$$

$$\delta = i + i' - A = 39,8^\circ \quad \delta_{\min} = 2 \cdot (\arcsin 0,73) - 60^\circ = 37,8^\circ$$

6. Să se arate că unghiul de deviație al unei raze de lumină care traversează o prismă subțire de unghi de refringentă  $A$  nu depinde de unghiul de incidență și se poate scrie pentru razele incidente apropiate de normală sub forma:

$$\delta = (n-1) \cdot A$$



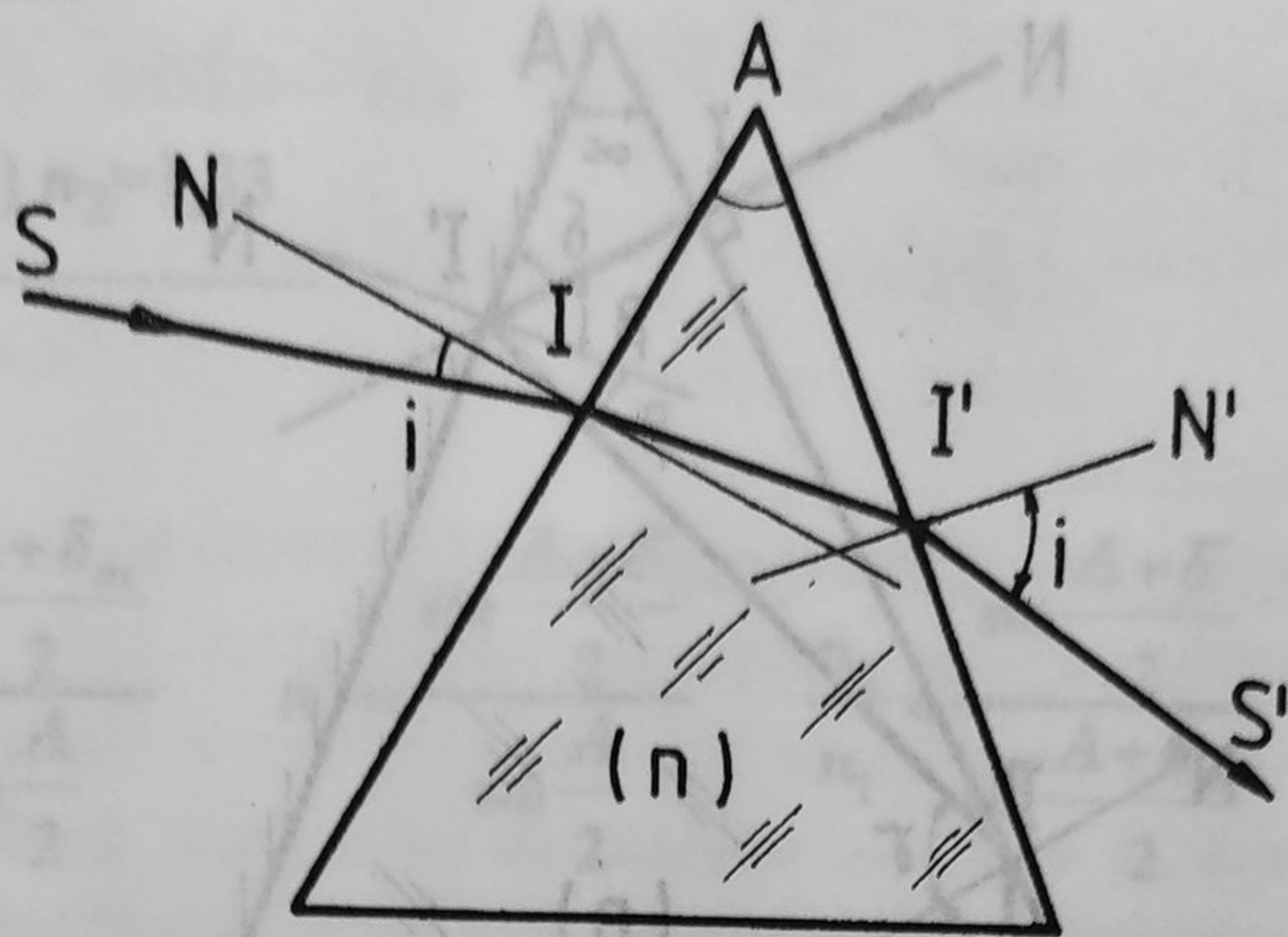


Fig. 40

Rezolvare:

$$\delta = i + i' - (r + r')$$

$$(I) \quad \frac{\sin i}{\sin r} = n \quad \text{pentru unghiuri mici} \quad \sin i \approx i \quad \text{radiani}$$

$$i \approx n \cdot r$$

$$(I') \quad \frac{\sin r'}{\sin i'} = \frac{1}{n} \quad i' \approx n \cdot r' \quad \delta = n \cdot (r + r') - (r + r') = n \cdot A$$

7. O rază de lumină traversează o prismă de sticlă cu unghiul de refringentă de  $60^\circ$ . Între ce valori poate varia unghiul de deviație al razei de lumină?

Datele problemei:

$$A = 60^\circ \quad n = 1,5$$

$$\Delta\delta = ?$$

$$\delta = i + i' - A = 58^\circ \quad \alpha + \delta_m = 2 \cdot \arcsin\left(n \cdot \sin \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\delta_m = 37^\circ \quad \delta \in [37^\circ, 58^\circ]$$

8. O prismă de sticlă ( $n=1,5$ ) are secțiunea de triunghi isoscel cu fața a doua argintată. O rază de lumină cade perpendicular pe prima față și după două reflexii totale succesive în interiorul prisme iese perpendicular pe baza prisme. Să se determine unghiul de refringentă.



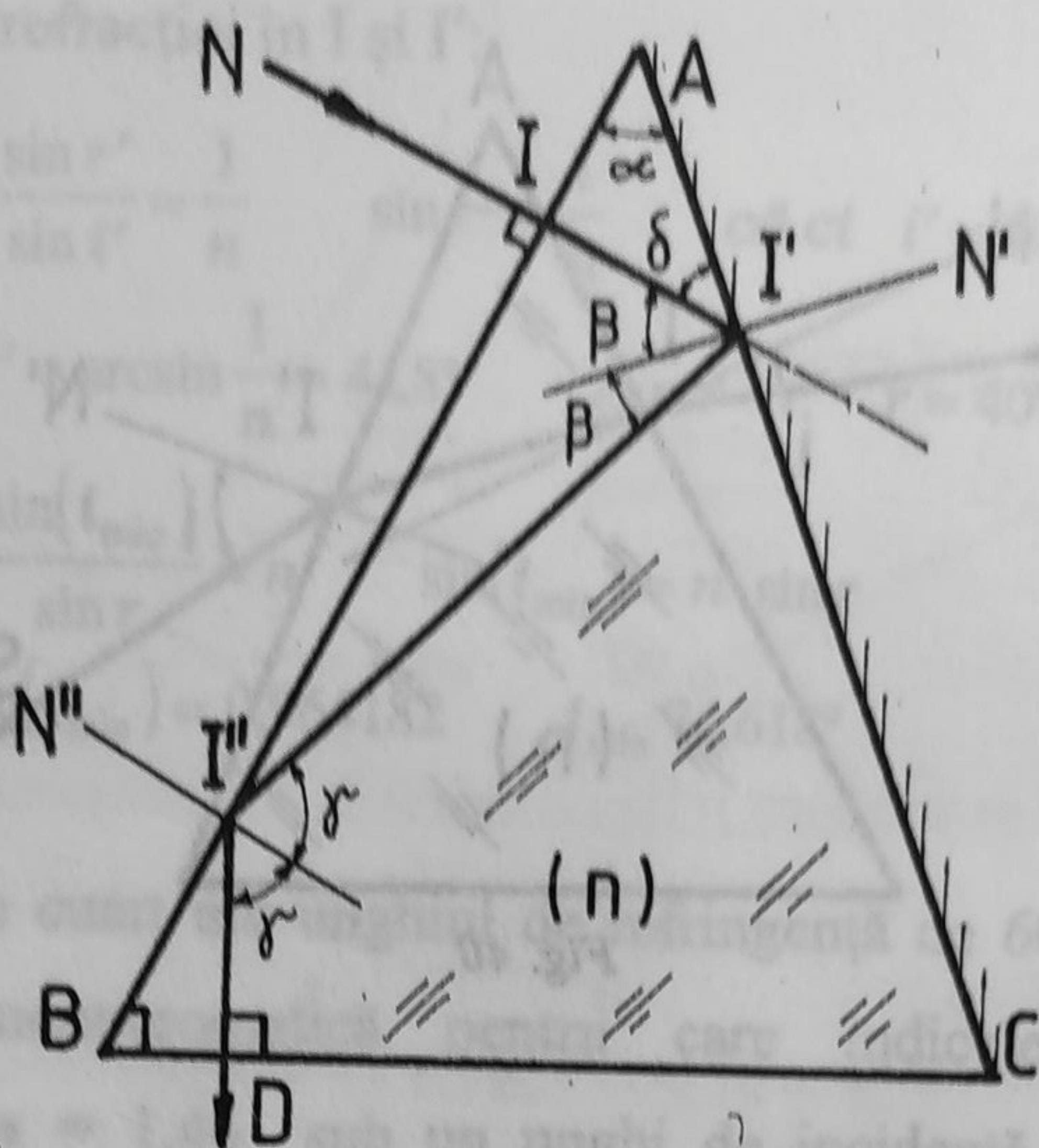


Fig.41

Datele problemei:

$$n=1,5 \quad i=90^\circ$$

$$B=C$$

$$A=\alpha=?$$

$$\text{In } \triangle IAI' \quad \alpha + \delta = 90^\circ \quad \beta + \delta = 90^\circ \quad \text{deci} \quad \alpha = \beta$$

$$\text{In } \triangle I'I'' \quad 90^\circ - \gamma = 90^\circ - 2 \cdot \beta \quad \gamma = 2 \cdot \beta$$

$$\text{Deoarece } B=C \quad 2 \cdot \beta + A = 180^\circ$$

$$\text{In } \triangle I'BD \quad \text{avem.} \quad B = 90^\circ - (90^\circ - \gamma) = \gamma$$

$$2 \cdot \gamma + A = 180^\circ \quad 2 \cdot 2 \cdot \beta + A = 180^\circ$$

$$4 \cdot A + A = 180^\circ \quad \text{deci} \quad A = 36^\circ$$

9. La trecerea printr-o prismă cu unghi de refringentă de  $60^\circ$ , din sticlă ( $n=1,5$ ) o rază de lumină suferă o deviație minimă de  $37^\circ$ . Prin cufundarea în apă ( $n=1,33$ ) a prisme, unghiul de deviație minimă se modifică în mod corespunzător. Să se explice ce fel de modificare (dacă crește sau scade) și apoi să se calculeze noul unghi de deviație minimă.



$$A=60^\circ \quad n_I=1,5$$

$$\delta_m = 37^\circ \text{ (în aer) } n_2 = 1,33$$

$\delta'_m = ?$

$$n_1 = \frac{\sin \frac{A + \delta_m}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \quad n_2 = \frac{\sin \frac{A + \delta'}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \quad \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \frac{A + \delta'}{2}}{\sin \frac{A + \delta_m}{2}} \quad \delta'_m = 8,6^\circ$$

**Fig. 42**

$$n_1 = 1,5 \quad A = 90^\circ$$

$$n_2 = 1,33$$

$\varphi_{\max} = ?$

In aer:

$$(I) \quad \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{n} \quad \sin i = \frac{1}{n} \quad i = 41,8^\circ \quad i \cong 42^\circ$$

$$\Delta IDC \quad 90^\circ + i + \varphi = 180^\circ \quad i + \varphi = 90^\circ$$

$$\varphi \leq 90^\circ - i \leq 48^\circ$$



În apă:

$$(I') \quad \frac{\sin i'}{\sin r'} = \frac{n_2}{n_1} \quad r' = 90^\circ \quad \sin i' = 0,8866 \quad i' = 62,5^\circ$$

$$i + \varphi' = 90^\circ \quad \varphi' \geq 90^\circ - i' \geq 27,5^\circ$$

Din dubla inegalitate:

$$\varphi \geq 48^\circ \text{ și } \varphi' \geq 27,5^\circ$$

rezultă:  $\varphi_{\max} \geq 48^\circ$  și reflexia se produce totdeauna!

11. O prismă de cuarț are unghiul de refringentă de  $60^\circ$ . Ce unghi formează două componente monocromatice la ieșirea din prismă cu direcția inițială, dacă raza de lumină compusă din aceste radiații trece prin prismă după o traiectorie cu deviație minimă. Se dau indicii de refracție ai prisme pentru cele două radiații monocromatice:

$$n_1(\lambda_1) = 1,470 \quad n_2(\lambda_2) = 1,455$$

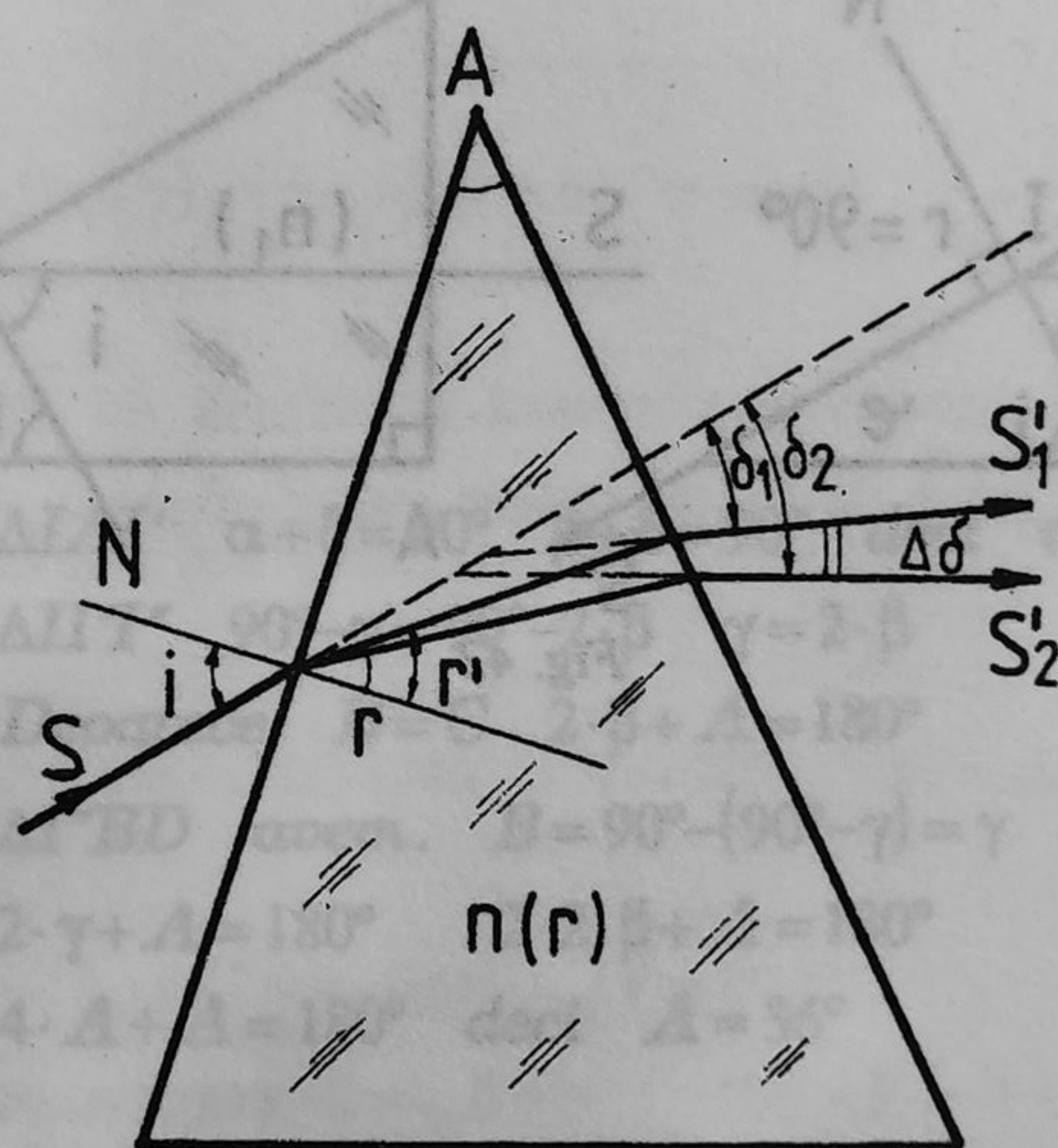


Fig. 43

Datele problemei:

$$A = 60^\circ \quad n_1 = 1,470$$

$$n_2 = 1,455$$

$$\theta_1 = ? \quad \theta_2 = ? \quad \Delta\delta = ?$$



$$\sin \frac{A + \delta_1}{2} = n_1 \cdot \sin \frac{A}{2} \quad \sin \frac{A + \delta_2}{2} = n_2 \cdot \sin \frac{A}{2}$$

$$A + \delta_1 = 2 \cdot \arcsin(n_1 \cdot \sin 30^\circ) \quad A + \delta_2 = 2 \cdot \arcsin(n_2 \cdot \sin 30^\circ)$$

$$\delta_1 = 34,6^\circ \quad \delta_2 = 33,35^\circ \quad \Delta\delta = \delta_1 - \delta_2 = 1,25^\circ$$

12. O prismă de sticlă ( $n=1,5$ ) cu unghiul de refringentă de  $60^\circ$  are o față în contact cu aerul, iar cealaltă în contact cu apa ( $n=1,33$ ). O rază de lumină cade sub un unghi de  $45^\circ$  pe prima față și iese prin a doua față în apă. Să se determine:

- Care este unghiul dintre raza incidentă și raza emergentă în apă;
- Care este unghiul minim de incidență ca să nu se producă reflexia totală pe fața din apă.

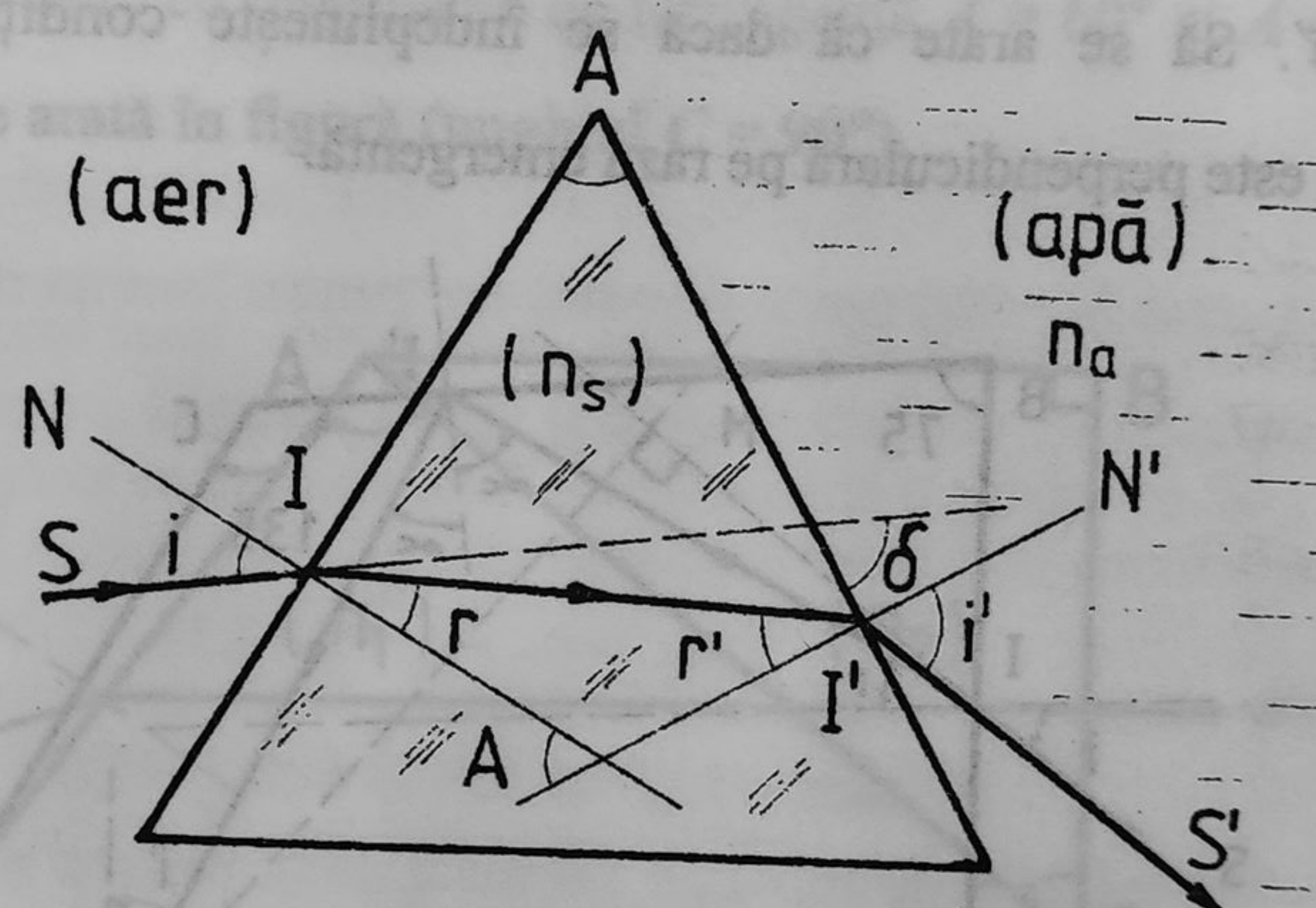


Fig. 44

Datele problemei:

$$n=1,5 \quad A=60^\circ$$

$$n_0=1,33 \quad i=45^\circ$$

$$\text{a) } \delta=?$$

$$\text{b) } i_{\min}=?$$

$$(I) \quad \frac{\sin i}{\sin r} = n_s \quad r = \arcsin\left(\frac{\sin i}{n_s}\right) = 28,12^\circ \quad r' = 31,88^\circ$$



$$(I') \quad \frac{\sin i'}{\sin r'} = \frac{n_a}{n_s} \quad \sin i' = \frac{n_a}{n_s} \cdot \sin r' \quad i' = 36,6^\circ \quad \delta = i + i' - A = 21,5^\circ$$

b)  $i' = 90^\circ$   $r' = 62,5^\circ$   $r = -2,5^\circ$  deci raza vine din I pe deasupra normalei NI. Avem în acest caz:

$$r = r' - A = 2,5^\circ$$

$$\frac{\sin i_{\max}}{\sin r} = n_s \quad i_{\max} = 3,75^\circ$$

13. Prisma lui Abbe' este o prismă care în secțiune se prezintă ca un patrulater cu unghiurile:  $A = 90^\circ$ ,  $B = 75^\circ$ ,  $C = 135^\circ$ ,  $D = 60^\circ$ . Raza de lumină intră pe fața AB sub unghiul de incidență  $i$  și iese pe fața AB sub unghiul  $i'$ . Să se arate că dacă se îndeplinește condiția:  $\sin i = \frac{n}{2}$  raza incidentă este perpendiculară pe raza emergentă.

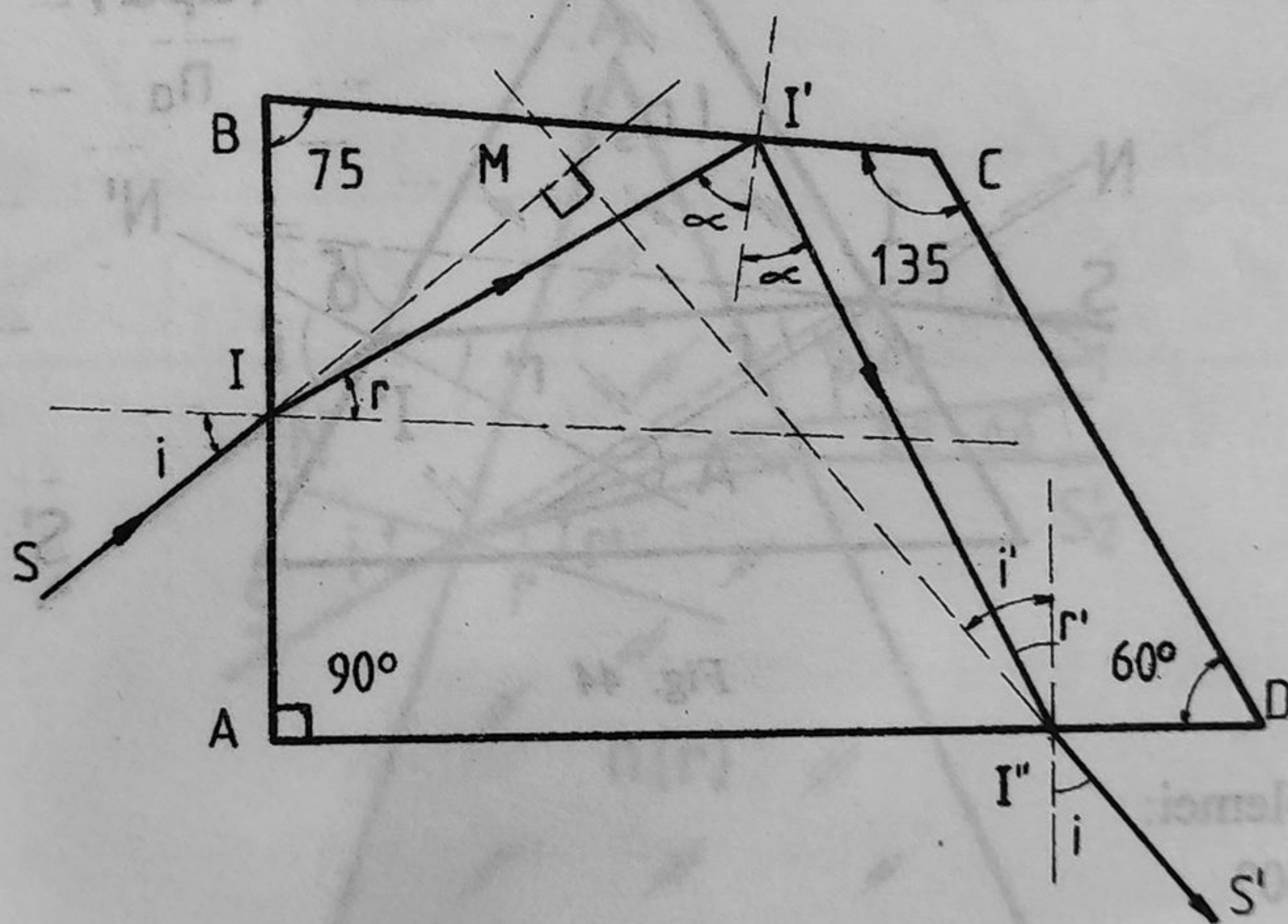


Fig. 45

Datele problemei:

$$A=90^\circ \quad B=75^\circ$$

$$C=135^\circ \quad D=60^\circ$$

SI  $\perp$  S'I'' prin ipoteză:



$$\sin r = \frac{1}{2} \quad r = 30^\circ \quad \angle BII' = 90^\circ - r = 60^\circ$$

$$\angle BI'I = \beta = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ \quad \alpha = 90^\circ - \beta = 45^\circ$$

$$\angle PI'C = 90^\circ - \alpha = 45^\circ$$

$$\angle DI'I' = 90^\circ + r' = 360^\circ - (135^\circ + 45^\circ + 60^\circ) = 120^\circ \quad r' = 30^\circ$$

$$(I') \quad n \cdot \sin r' = \sin i' \quad \frac{n}{2} = \sin i' \quad \sin i = \sin i' \rightarrow i' = i$$

În patrulaterul IMI''A avem:

$$MLA + A + AI'M + I'MI = 360^\circ$$

$$(90^\circ + i) + 90^\circ + (90^\circ - i') + I'MI = 360^\circ$$

$$I'MI = 90^\circ \quad \text{Deci } SM \perp MS'$$

14. Două prisme cu unghiurile de refringentă  $A = 60^\circ$  și  $A = 30^\circ$  sunt lipite după cum se arată în figură (unghiul  $C = 90^\circ$ ).

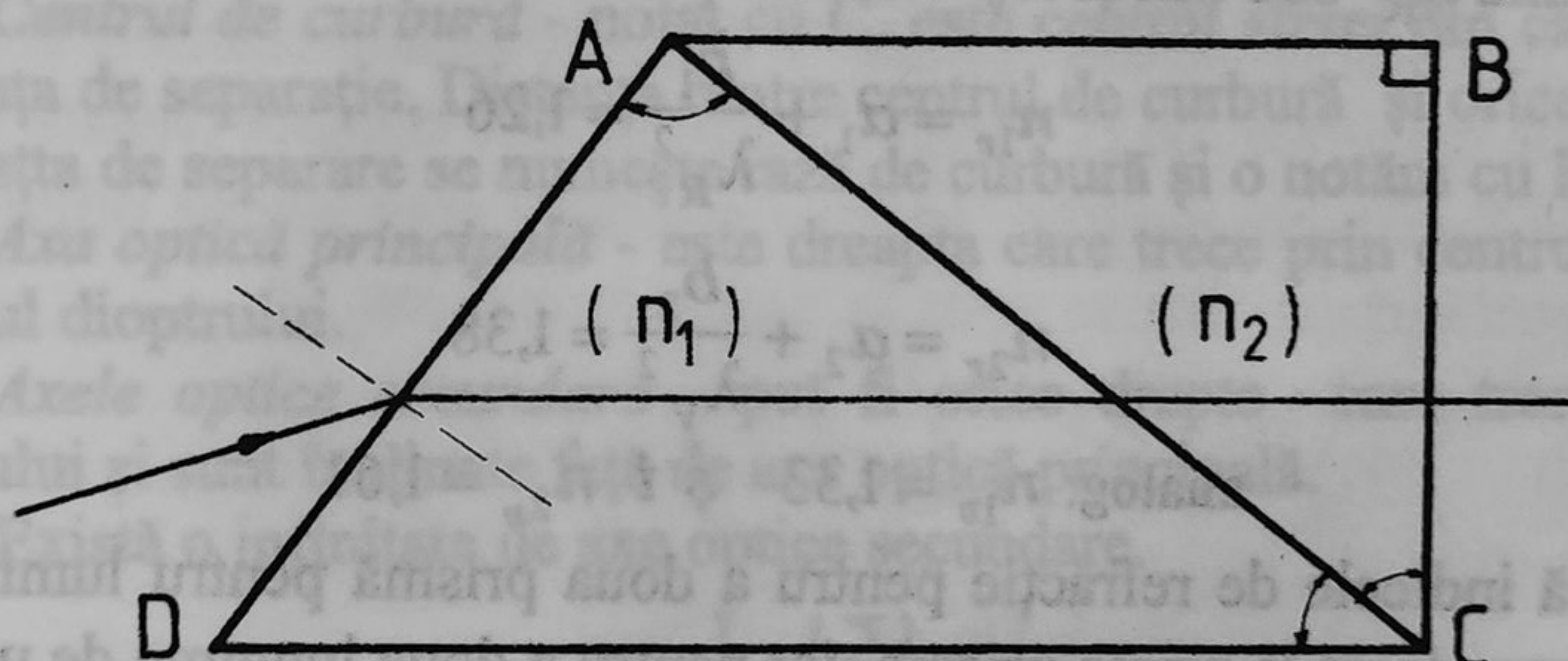


Fig. 46

Indicii de refracție se exprimă prin relațiile:

$$n_1 = a_1 + \frac{b_1}{\lambda^2} \quad n_2 = a_2 + \frac{b_2}{\lambda^2} \quad a_1 = 1,1 \quad b_1 = 10^5 \text{ nm} \quad a_2 = 1,3 \quad b_2 = 5 \cdot 10^4 \text{ nm}$$

a) Să se determine  $\lambda_0$  a radiației incidente pe sistemul de prisme, dacă unda se propagă fără deviație la suprafața AC pentru orice unghi de incidență pe suprafața AD. Să se determine deasemenea valorile lui  $n_1$  și  $n_2$  pentru această lungime de undă.



b) Desenați mersul razelor de lumină în sistemul de prisme pentru trei lungimi de undă diferite dacă unghiul de incidență pentru toate trei undele pe AD este același.

c) Determinați unghiul de deviație minimă în sistemul de prisme, a luminii cu lungimea de undă  $\lambda_0$ .

d) Determinați lungimea de undă a radiației incidente ce cade pe sistemul de prisme paralel cu baza DC și care din acesta tot paralel cu DC.

Rezolvare:

a) Pentru ca radiația cu  $\lambda_0$  să devieze la suprafața AC pentru orice unghi de incidență pe AD va trebui să avem același indice:

$$n_1 = n_2$$

$$a_1 + \frac{b_1}{\lambda_0^2} = a_2 + \frac{b_2}{\lambda_0^2} \quad \lambda_0 = \sqrt{\frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1}} = 500 \text{ nm}$$

$$n_1 = n_2 = n_0 = \frac{a_1 + b_1}{\lambda_0^2} = 1,5$$

b) Luând  $\lambda_R = 800 \text{ nm}$  și  $\lambda_V = 400 \text{ nm}$  pentru lumina roșie se obține:

$$n_{1r} = a_1 + \frac{b_1}{\lambda_R^2} = 1,26$$

$$n_{2r} = a_2 + \frac{b_2}{\lambda_V^2} = 1,38$$

$$\text{analog: } n_{1v} = 1,33 \quad \text{și } n_{2v} = 1,61$$

Adică indicele de refracție pentru a doua prismă pentru lumina roșie este mai mare decât la prima prismă, iar pentru a doua lungime de undă este invers. Pe baza acestor considerații vom duce traseele:

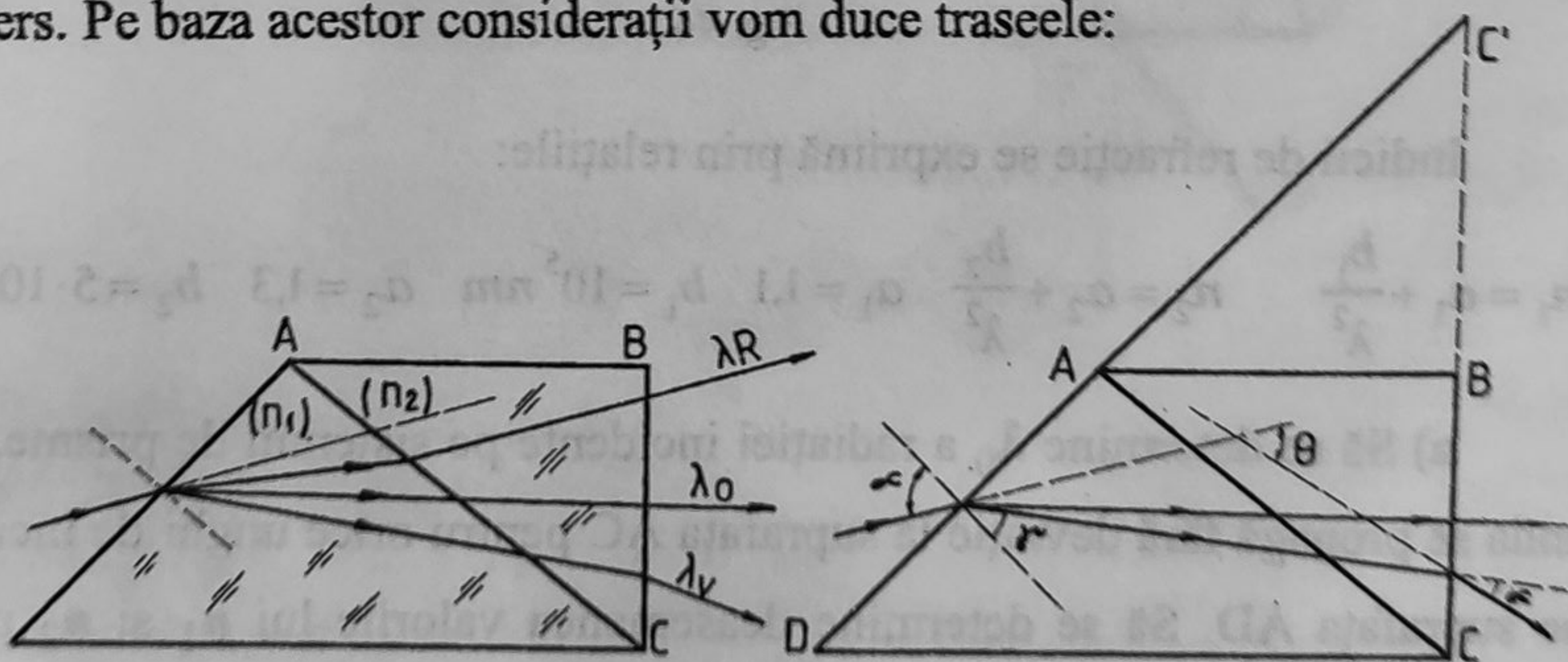


Fig. 47



Unghiul  $\theta$  va avea minim când unghiul  $\alpha$  este egal cu unghiul sub care iese raza la suprafața BC.

### 3.2. Dioptrul sferic

Prin *dioptru* se înțelege orice suprafață de separare a două medii optice cu indicii de refracție diferiți, cum sunt suprafețele de separare: *aer-apă*, *aer-sticlă*, *apă-sticlă* sau chiar straturi din același material dar cu densitate diferită cum este cazul aerului încălzit diferit.

După forma acestor suprafețe distingem *dioptrul plan* și *dioptrul sferic*. Întrucât dioptrul plan se poate trata ca un caz particular al dioptrului sferic (raza dioptrului tinde la infinit) vom începe studiul dioptrului sferic amănunțit.

#### 3.2.1. Elementele dioptrului sferic

Dioptrul sferic este orice suprafață sferică ce separă două medii optice cu indici de refracție diferiți. Elementele dioptrului sferic sunt următoarele:

*Vârful dioptrului* - notat cu O în figura de mai jos, este polul calotei sferice din care face parte. Este ales ca origine a sistemului de axe de coordonate xOy.

*Centrul de curbură* - notat cu C, este centrul sferei din care face parte suprafața de separație. Distanța dintre centrul de curbură și orice punct de pe suprafața de separare se numește rază de curbură și o notăm cu R.

*Axa optică principală* - este dreapta care trece prin centrul de curbură și vârful dioptrului.

*Axele optice secundare* - pot fi orice drepte care trec prin vârful dioptrului și sunt înclinate față de axa optică principală.

Există o infinitate de axe optice secundare.

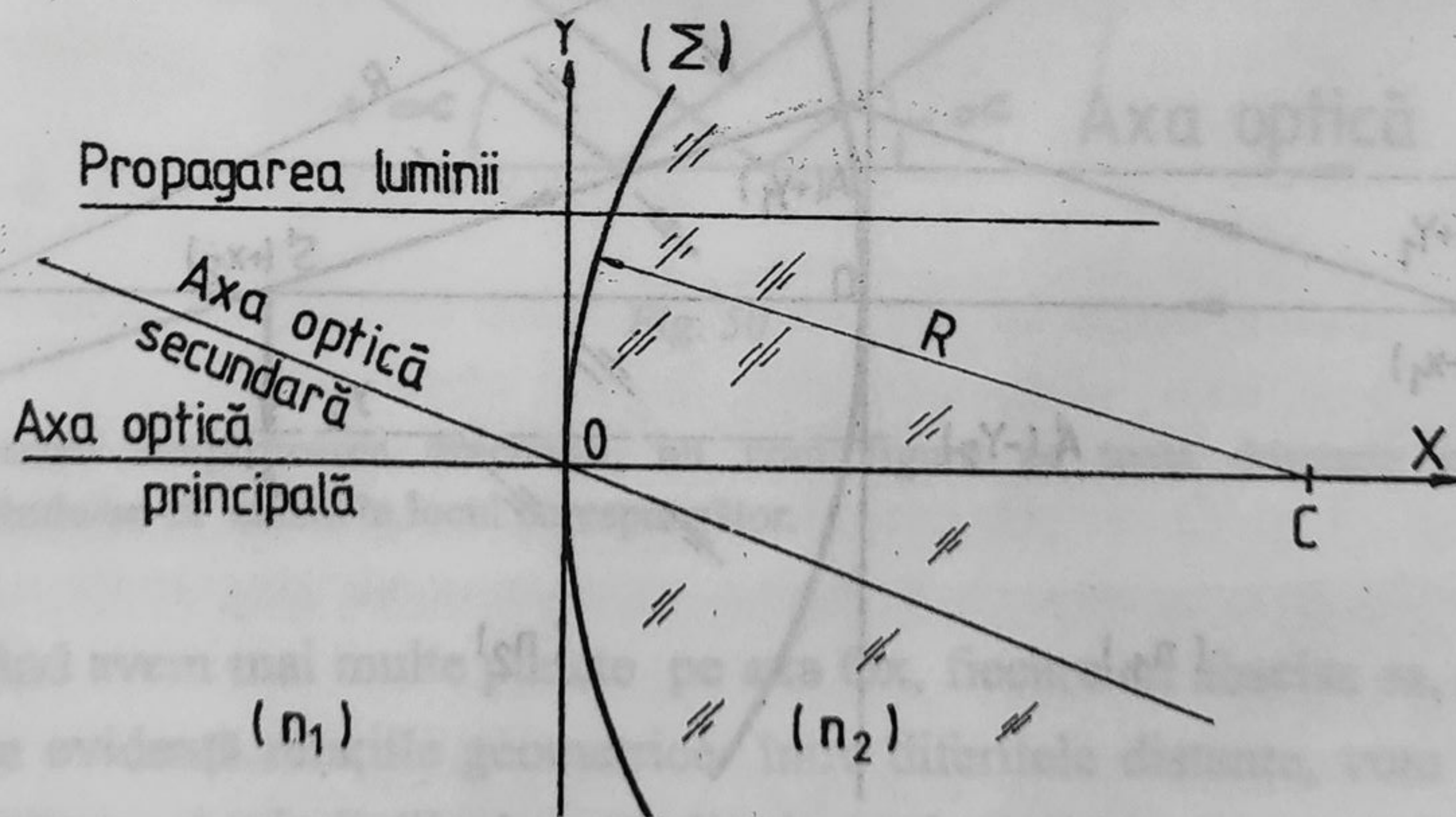


Fig. 48



### 3.2.2. Convenția de semne

Convenția de semne reflectă conținutul fizic al teoriei: semnul atribuit unei mărimi fizice face o deosebire din punct de vedere matematic între două mărimi fizice distincte cum sunt *obiectul* și *imaginea sa*, *razele de curbură* ale unor suprafețe care pot avea efect convergent sau efect divergent asupra razelor de lumină, etc.

Elementul nou al acestei convenții de semne este introducerea sistemului de coordonate  $xOy$  din algebra elementară, pentru măsurarea distanțelor și a convenției trigonometrice de semne pentru măsurarea unghiurilor.

Axa  $Ox$  se suprapune peste axa optică principală, alegând ca sens pozitiv al axei  $Ox$ , sensul propagării luminii prin sistem, iar originea  $O$  în vârful dioptrului sferic așa cum s-a spus. Axa  $Oy$  este perpendiculară pe  $Ox$  având sensul pozitiv în sus ca în algebră.

Cum de obicei axa  $Ox$  este orientată de la stânga spre dreapta, aceasta ne determină să alegem sensul de propagare a luminii de preferință de la stânga la dreapta. Când razele de lumină își vor schimba sensul, adică se vor propaga de la dreapta spre stânga (la sistemele optice complexe ce conțin și oglinzi) vom lua sistemul de coordonate orientat în sens invers.

Distanțele măsurate de la vârful dioptrului spre dreapta (sensul pozitiv al lui  $Ox$ ), vor fi distanțe *pozitive*, iar cele măsurate spre stânga originii vor fi distanțe *negative* după cum se vede în figura de mai jos.

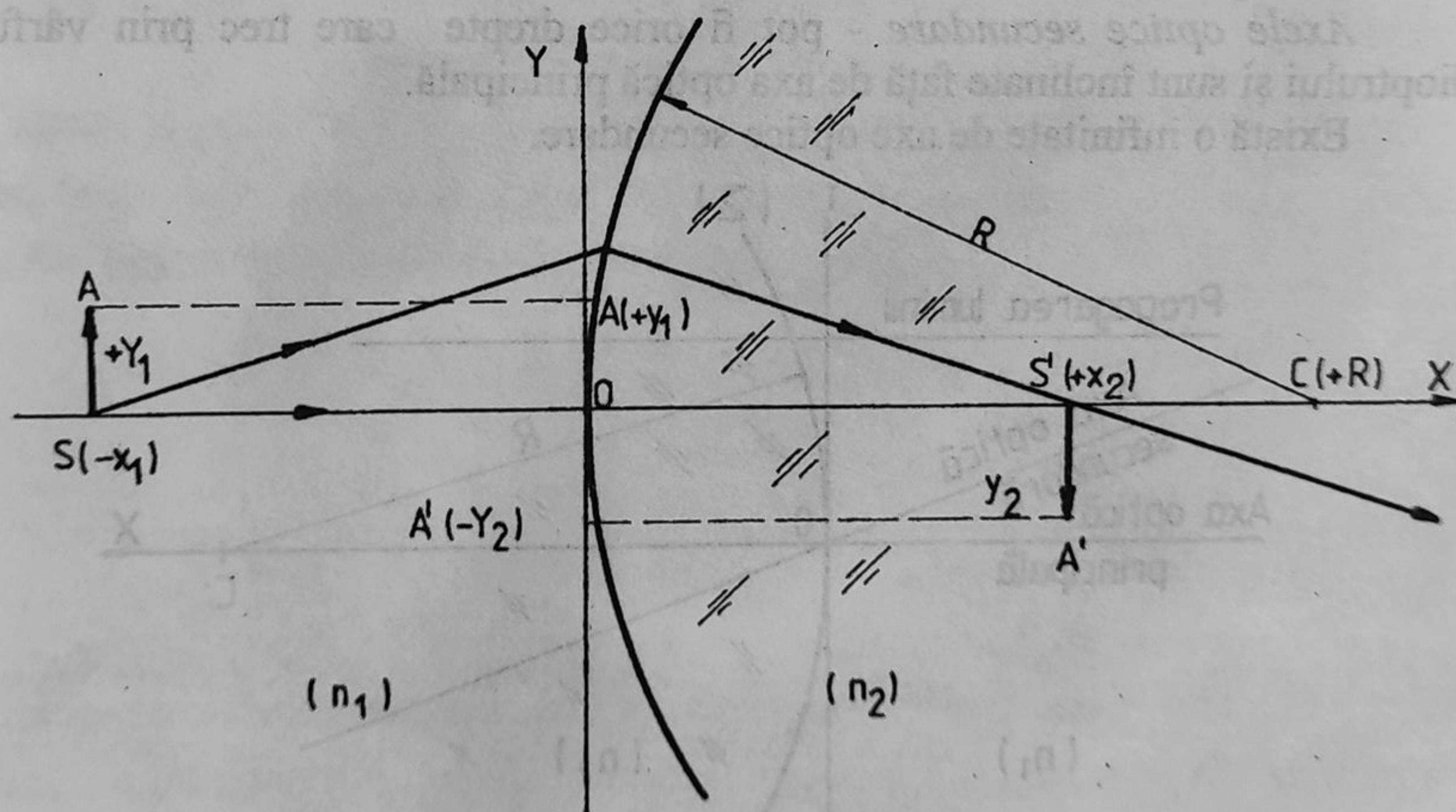


Fig. 49



S - este sursa punctiformă -obiect;

S' - este imaginea obiectului tot punctiformă;

$Y_1$  - este lungimea obiectului;

$Y_2$  - este lungimea imaginii.

De obicei avem de construit imaginile unor obiecte așezate perpendicular pe axa optică, deci vor fi orientate de alungul lui Oy în sens pozitiv sau negativ. Pentru a distinge obiectele de imaginile lor vom face

notațiile permanente: Obiecte:  $Y_1$   $Y_1'$   $Y_1''$  .....

Imagini:  $Y_2$   $Y_2'$   $Y_2''$  .....

rezervând indicele 1 pentru obiecte și indicele 2 pentru imagini.

Semnul lungimii obiectelor și al imaginilor va fi (+) dacă sunt orientate în sensul pozitiv al axei Oy și negativ dacă sunt orientate invers. În acest fel, imaginea dreaptă se va distinge de cea inversată prin semnul minus, indiferent dacă este reală sau virtuală.

Unghiul format de o rază de lumină cu axa optică este considerat pozitiv atunci când rotirea acestei raze către axa optică, de unghi mic, pentru a se suprapune se face în sensul trigonometric și este negativ când rotirea se face în sensul orar, după cum se vede mai jos:

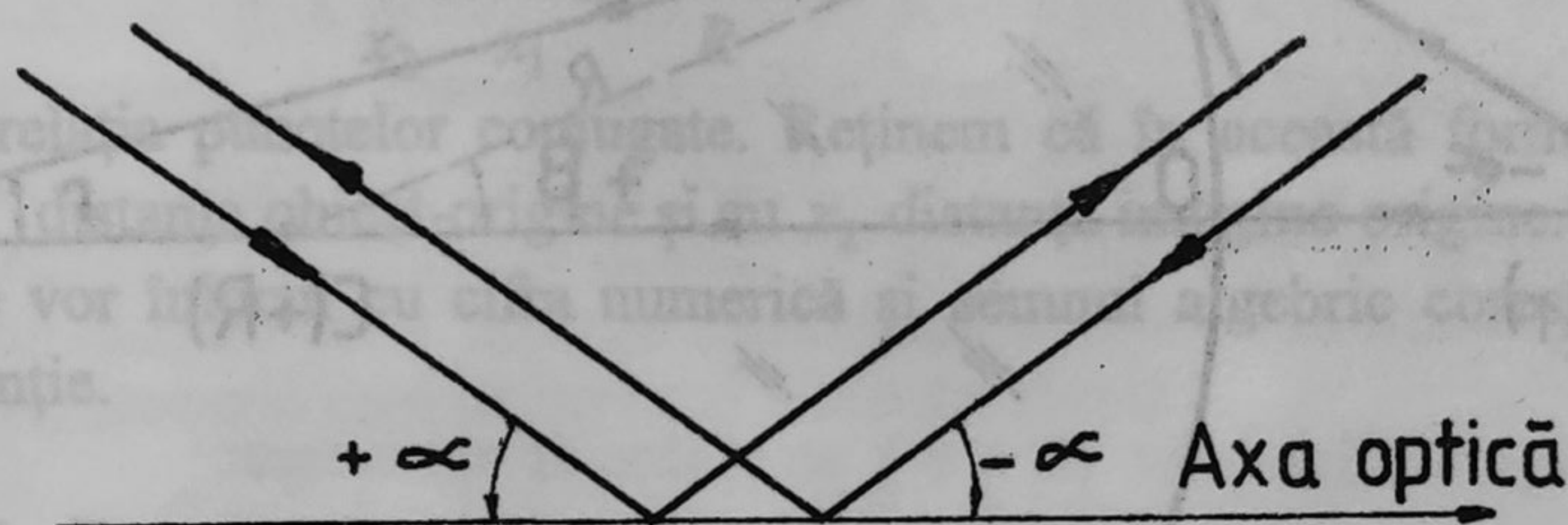


Fig. 50

**NOTĂ:** Pentru simplificarea desenului, nu vom figura pe toate desenele axa Oy, subînțelegându-se că există în locul corespunzător.

Când avem mai multe puncte pe axa Ox, fiecare cu abscisa sa, pentru a pune în evidență relațiile geometrice între diferitele distanțe, vom indica aceste distanțe și prin liniile de cotă din desenul tehnic.



### 3.2.3. Relația punctelor conjugate

(Prima formulă fundamentală a dioptrului sferic)

Este vorba de o relație algebrică care leagă distanțele obiect-origine și imagine-origine de indicii de refracție și de raza de curbură a dioptrului sferic. Vom folosi indicii  $1$  pentru indicarea tuturor distanțelor care apar în mediul incident (de unde vine lumina) și indicii  $2$  pentru indicarea distanțelor care apar în interiorul dioptrului, unde se refractă razele reale.

Dacă mersul luminii se continuă și într-un al treilea mediu, vom folosi indicii  $3$  în mod corespunzător, numai pentru a exprima legătura dintre cele trei medii. Dacă nu este nevoie de o asemenea legătură, ci doar de relația dintre două medii alăturate, vom muta originea sistemului de coordonate în vârful următorului dioptru.

Luăm în considerație numai razele paraxiale și presupunem că radiația este monocromatică pentru a neglija momentan fenomenele de dispersie. În figura de mai jos se arată mersul razelor de lumină prin suprafața de separație:

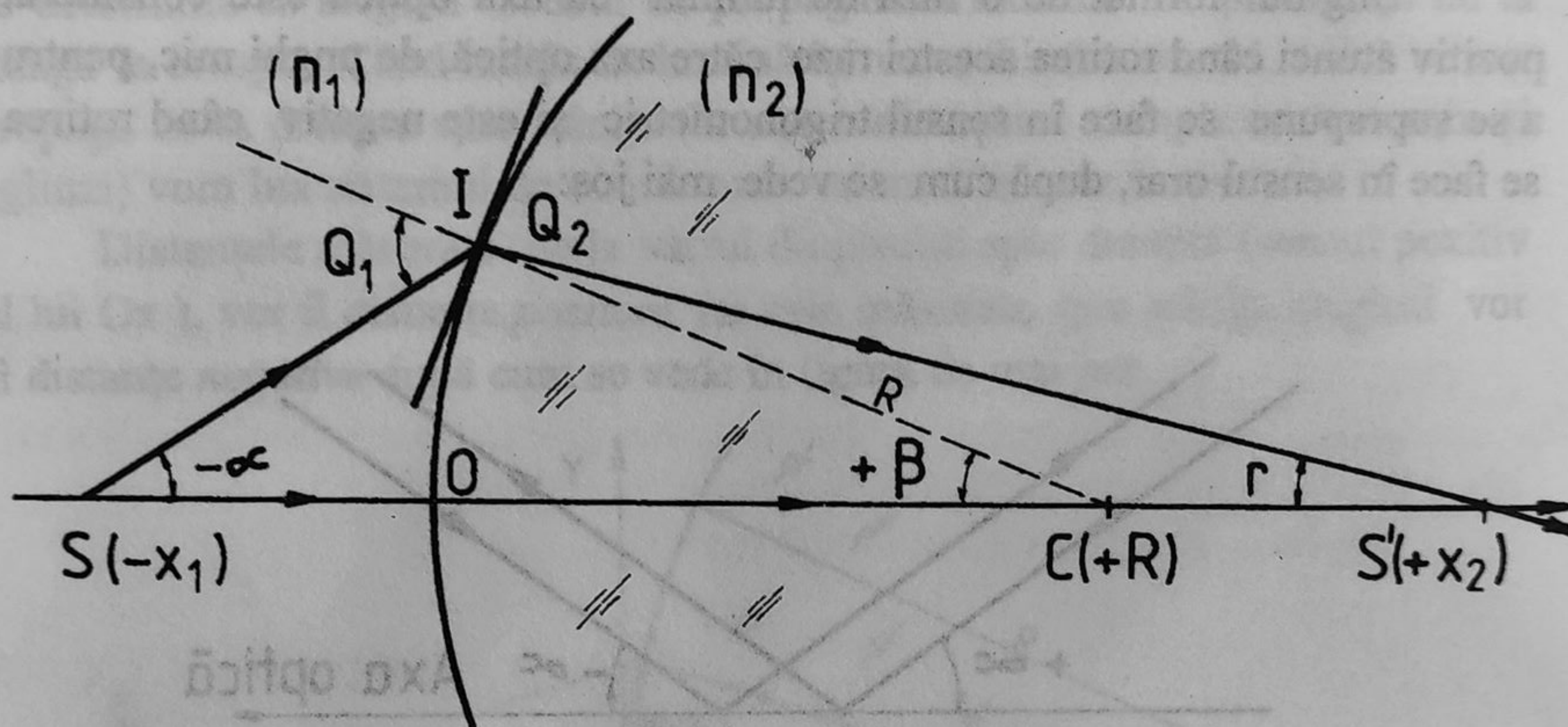


Fig. 51

Porțiunile mici din suprafața dioptrului din jurul punctelor de incidență  $I$  și  $O$  se pot considera aproximativ plane iar  $R$  joacă rolul de normală în zona respectivă. Pentru raze paraxiale unghiurile  $\alpha, \beta, \gamma$  sunt mici astfel că putem scrie:

$$n_1 \cdot \theta_1 \equiv n_2 \cdot \theta_2 \quad \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \theta_1$$



Aplicăm teorema *TI* amintită mai înainte și obținem:

$$\theta_1 = -\alpha + \beta \quad \beta = \theta_2 + \gamma = \frac{n_1}{n_2} \cdot \theta_1 + \gamma$$

$$\beta = \frac{n_1}{n_2}(-\alpha + \beta) + \gamma \quad n_2 \cdot \beta = -n_1 \cdot \alpha + n_1 \cdot \beta + n_2 \cdot \gamma$$

$$\beta \cdot (n_2 - n_1) = n_2 \cdot \gamma - n_1 \cdot \alpha$$

Din această relație putem obține formula fundamentală a dioptrului sferic în aproximația gaussiană:

$$OI = R \cdot \beta \quad \beta = \frac{OI}{R} \quad OI = x_2 \cdot \gamma \quad \gamma = \frac{OI}{x_2}$$

$$OI = (-x_1) \cdot (-\alpha) \quad \alpha = \frac{OI}{x_1}$$

Înlocuind în relația de mai sus:

$$\frac{OI}{R} \cdot (n_2 - n_1) = OI \cdot \left( \frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} \right)$$

$$\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

numită și relația punctelor conjugate. Reținem că în această formulă am notat cu  $x_1$  distanța obiect-origine și cu  $x_2$  distanța imagine-origine. Ambele distanțe se vor înlocui cu cifra numerică și semnul algebric corespunzător prin convenție.

#### 3.2.4. Focarele dioptrului sferic

Este utilă introducerea unei noi mărimi numită **distanță focală** (o vom nota cu  $f$ ) care înlocuie unele mărimi greu măsurabile cum sunt: *raza de curbură, indicele de refracție*, cu o distanță ușor măsurabilă experimental: distanța de la centrul lentilei la focar.

**Focarul** este un punct particular pe axa optică în care se strâng razele (sau prelungirile lor) ce vin paralel cu axa optică, după trecerea prin sistem.

**Focarul imagine** - Când obiectul se află la razele emergente se strâng într-un punct numit *focar-imagine* depărtat la distanța  $f_2 > 0$  de dioptrul convergent. La dioptrul divergent razele ce vin paralel se împrăștie după



refracție dar astfel că toate prelungirile acestor raze se intersectează într-un singur punct care se numește tot focar-imagine dar distanța la acesta  $f_2 < 0$ .

În figura de mai jos se arată focarele imagine pentru cele două tipuri de dioptri sferici: *convergent* și *divergent*.

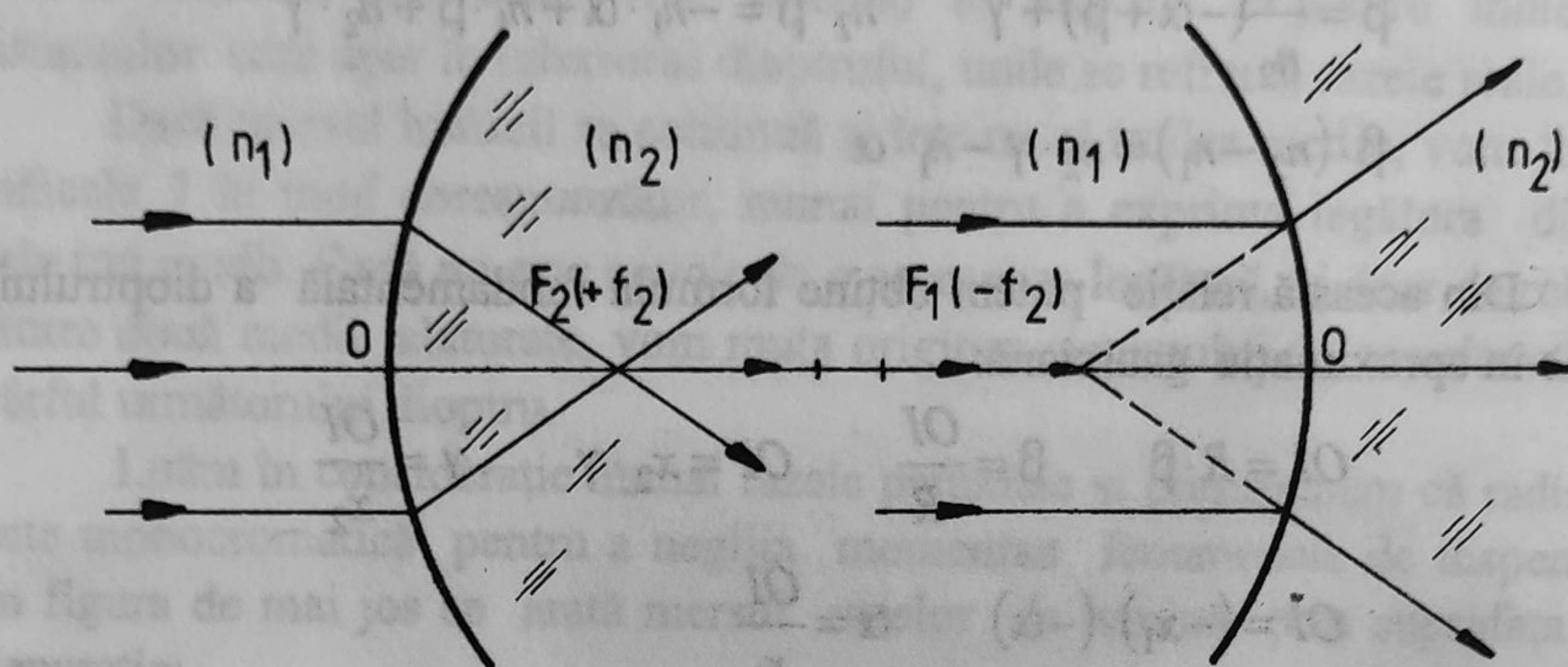


Fig. 52

Distanța focală se găsește din formula fundamentală a dioptrului sferic punând condiția ca distanța  $x_1$  să tindă la  $\infty$ .

Pentru *dioptrul convergent* ( $R > 0$ ) se obține:

$$\begin{aligned} -x_1 \rightarrow -\infty \quad x_2 = f_2 = f \quad \text{focar real} \\ \frac{n_2}{f_2} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad \frac{1}{f_2} = \frac{n_2 - n_1}{n_2} \cdot \frac{1}{R} \quad f_2 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} \cdot R \end{aligned}$$

Pentru *dioptrul divergent* ( $R < 0$ ) se obține de asemenea:

$$\begin{aligned} -x_1 \rightarrow -\infty \quad x_2 = -f_2 = -f \quad \text{focar imaginar} \\ \frac{n_2}{f_2} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad \frac{1}{f_2} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 \cdot R} \quad f_2 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} \cdot R \end{aligned}$$

Fie că dioptrul este convergent sau divergent, distanța focală se calculează la fel. Dioptrul convergent are deci un focar imagine real iar dioptrul divergent un focar imagine virtual.

*Focarul obiect* - este punctul de unde pleacă razele în mod divergent dar este astfel situat încât razele emergente se vor propaga paralel cu axa



optică, deci imaginea se formează la infinit. În figura de mai jos se poate vedea focarul obiect pentru două feluri de curburi ale dioptrului:

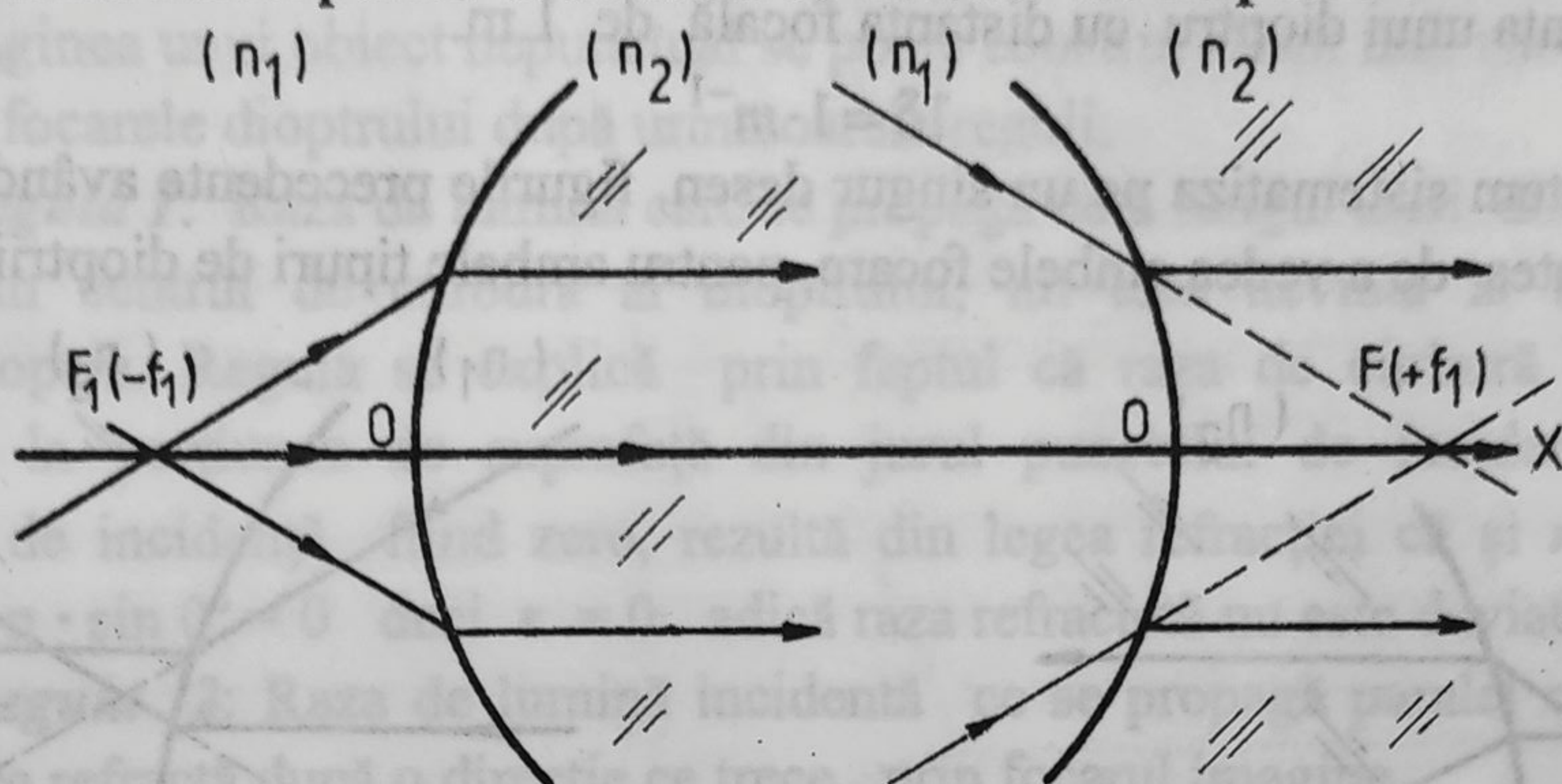


Fig. 53

Pentru dioptrul convergent:

$$\frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad f_1 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} \cdot R \quad (R > 0)$$

Pentru dioptrul divergent:

$$\frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad f_1 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} \cdot R \quad (R < 0)$$

**Convergența dioptrului** - Pentru a caracteriza puterea de deviere a razelor de lumină și a deosebi efectul de convergență a razelor produs de dioptrul convergent de efectul de împrăștiere a razelor, produs de dioptrul divergent, se introduce noțiunea de convergență astfel:

Se numește *convergență a unui dioptru*, mărimea ce caracterizează puterea unui dioptru de a strânge razele mai aproape sau mai departe de acesta și este numeric egal cu inversul distanței focale:

$$C = \frac{1}{f} \quad [C]_{SI} = m^{-1} = 1\delta \quad \text{numit dioptrie}$$

Cu cât  $f$  este mai mic cu atât puterea de a strânge razele mai aproape de dioptru este mai mare, și deci cu atât  $C$  este mai mare. Uneori în loc de convergență se mai spune *putere optică*.

**Convenția de semn:**

- Dioptrul convergent, având focarul imagine  $F_2$  în partea pozitivă a axei, prin definiție, are convergență pozitivă.

- Dioptrul divergent, are focarul  $F_2$  în partea negativă a axei Ox deci prin definiție are convergență negativă:

$$C < 0 \quad C = -\frac{1}{f}$$



Unitatea de măsură este dioptrul care se notează cu  $\delta$  și reprezintă convergența unui dioptru cu distanța focală de 1 m.

$$1\delta = 1 \cdot m^{-1}$$

Putem sistematiza pe un singur desen, figurile precedente având astfel posibilitatea de a vedea ambele focare pentru ambele tipuri de dioptrii.

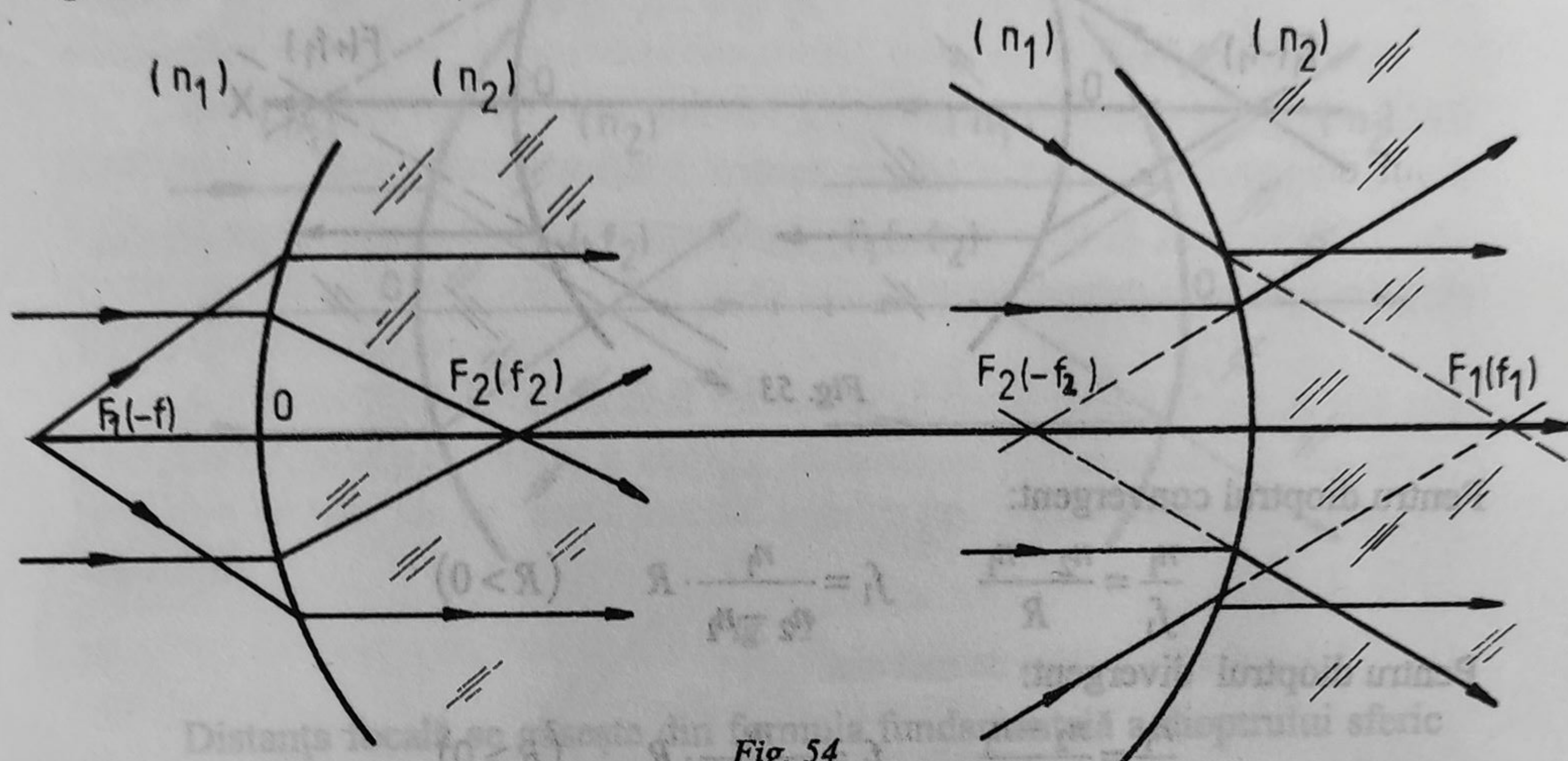


Fig. 54

În figură,  $F_2$  reprezintă focarul imagine și semnul său determină semnul convergenței dioptrului:

- la dioptrul convergent  $C = \frac{1}{+f_2}$   $C > 0$

- la dioptrul divergent  $C = \frac{1}{-f_2}$   $C < 0$

Folosind expresiile pentru cele două distanțe focale, ușor măsurabile experimental și obținem:

$$n_1 = \frac{n_2 - n_1}{R} \cdot f_1 \quad n_2 = \frac{n_2 - n_1}{R} \cdot f_2$$

din relația  $\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}$  obținem

$$\frac{n_2 - n_1}{R} \cdot \frac{f_2}{x_2} - \frac{n_2 - n_1}{R} \cdot \frac{f_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

$$\frac{f_2}{x_2} - \frac{f_1}{x_1} = 1$$



### 3.2.5. Construcția imaginilor în dioptrul sferic

Imaginea unui obiect nepunctual se poate construi acum mai ușor având definite focarele dioptrului după următoarele reguli:

**Regula 1:** Raza de lumină care se propagă de-a lungul unei direcții ce trece prin centrul de curbură al dioptrului, nu este deviată la trecerea prin dioptru. Regula se explică prin faptul că raza de curbură  $R$  este normală la porțiunea de suprafață din jurul punctului de incidență, iar unghiul de incidență fiind zero, rezultă din legea refracției că și  $r = 0^\circ$ :  $\sin r = n \cdot \sin 0^\circ = 0$  deci  $r = 0$  adică raza refractată nu este deviată.

**Regula 2:** Raza de lumină incidentă ce se propagă paralel cu axa optică, se refractă după o direcție ce trece prin focarul imagine.

**Regula 3:** Raza de lumină incidentă ce se propagă după o direcție ce trece prin focarul obiect, după refracție se propagă paralel cu axa optică.

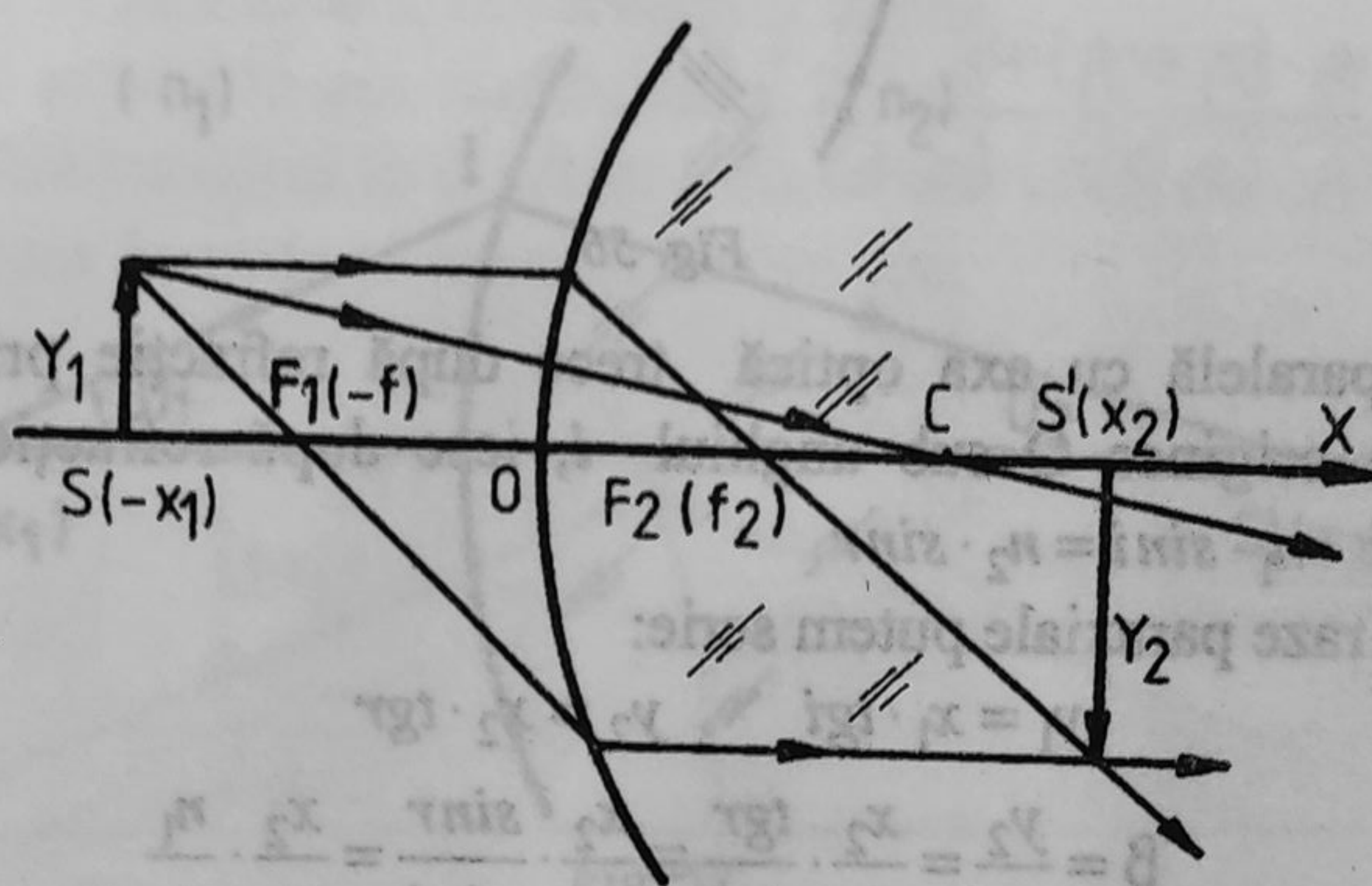


Fig. 55

### 3.2.6. Mărirea liniară transversală

( A doua relație fundamentală a dioptrului sferic )

Mărimea imaginii depinde de poziția obiectului față de vârful dioptrului O. Se numește *mărire liniară* raportul algebric dintre lungimea imaginii și lungimea obiectului așezat perpendicular pe axa optică principală:

$$\beta = \frac{y_2}{y_1}$$



**Convenție de semn pentru mărirea liniară:**

- Imaginea se află de aceeași parte cu obiectul:  $\beta > 0$  căci, sau ambele sunt pozitive:  $y_1 > 0$  și  $y_2 > 0$  sau ambele sunt negative:  $y_1 < 0$  sau  $y_2 < 0$  și raportul lor dă un număr pozitiv.

- Imaginea este răsturnată în raport cu obiectul (inversă):  $y_1 > 0$  cu  $y_2 < 0$ , raportul lor este negativ.

Dependența măririi liniare  $\beta$  de distanțele  $x_1, x_2$  se deduce cu ajutorul figurii de mai jos:

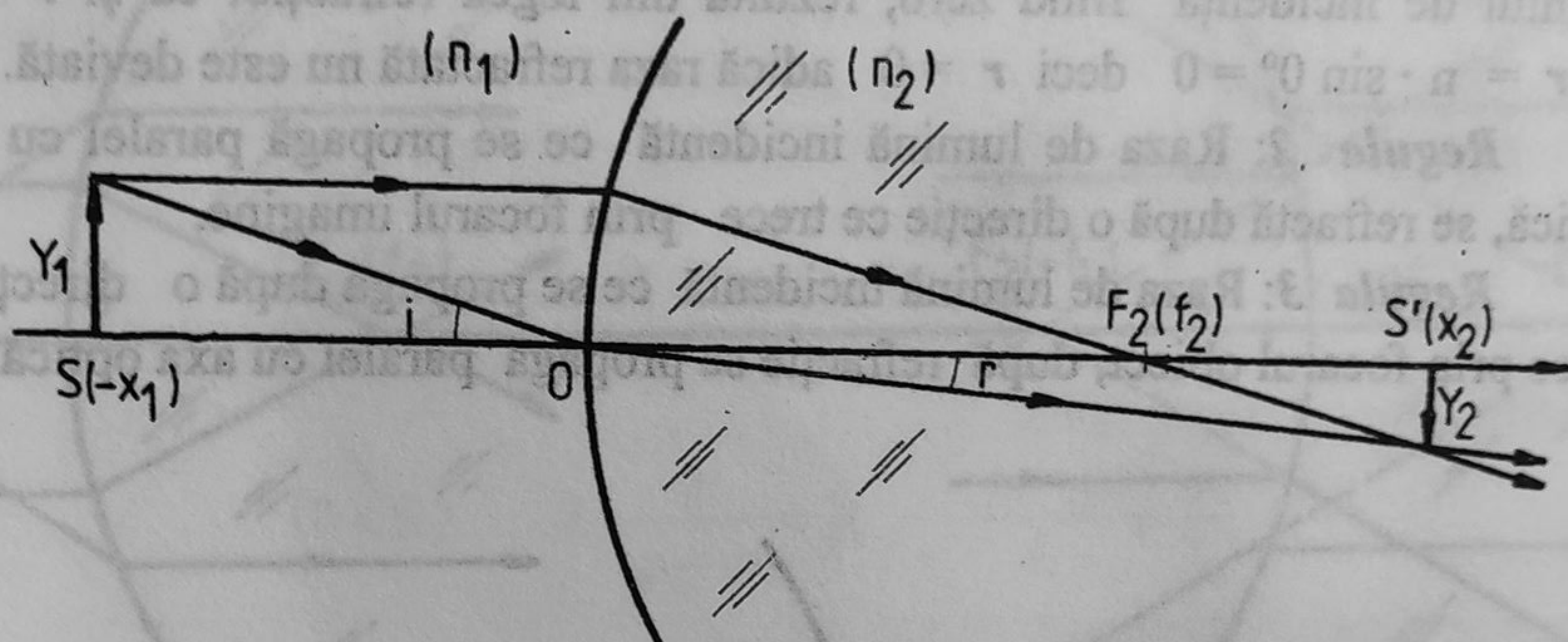


Fig. 56

Raza paralelă cu axa optică trece după refracție prin focar. Raza incidentă în originea O sub unghiul  $i$ , iese după refracție sub unghiul  $r$  astfel încât:  $n_1 \cdot \sin i = n_2 \cdot \sin r$ .

Pentru raze paraxiale putem scrie:

$$y_1 = x_1 \cdot \operatorname{tgi} \quad y_2 = x_2 \cdot \operatorname{tgr}$$

$$\beta = \frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{\operatorname{tgr}}{\operatorname{tgi}} \equiv \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{\sin r}{\sin i} = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{n_1}{n_2}$$

$$\beta = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{n_1}{n_2}$$

unde  $x_1$  și  $x_2$  se vor înlocui cu numere însoțite de semnele algebrice corespunzătoare convenției. Mărirea liniară se mai poate exprima și în funcție de distanțele focale obiect și imagine, respectiv  $f_1$  și  $f_2$ .

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{n_1 \cdot R}{n_2 - n_1} \cdot \frac{n_2 - n_1}{n_2 \cdot R} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\beta = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{f_1}{f_2}$$



### 3.2.7. Formula Lagrange - Helmholtz

Această formulă face legătura dintre mărirea liniară transversală ( $\beta$ ) și mărirea unghiulară ( $g$ ) a dioptrului.

Pentru un dioptru dat, produsul dintre mărirea unghiulară  $g$  și mărirea liniară  $\beta$ , este constant și egal cu raportul indicilor de refracție:

$$\beta \cdot g = \frac{n_1}{n_2}$$

Pentru a demonstra această relație să definim mărirea unghiulară  $g$  ca raportul dintre tangenta unghiului format de raza refractată cu axa optică ( $u_2$ ) și tangenta unghiului format de raza incidentă cu axa optică ( $u_1$ ):

$$g = \frac{tgu_2}{tgu_1} \quad \text{sau} \quad g \equiv \frac{u_2}{u_1} \quad (\text{de } X \text{ ori})$$

pentru raze paraxiale. În figura de mai jos se arată cum apare mărirea unghiulară într-un dioptru:

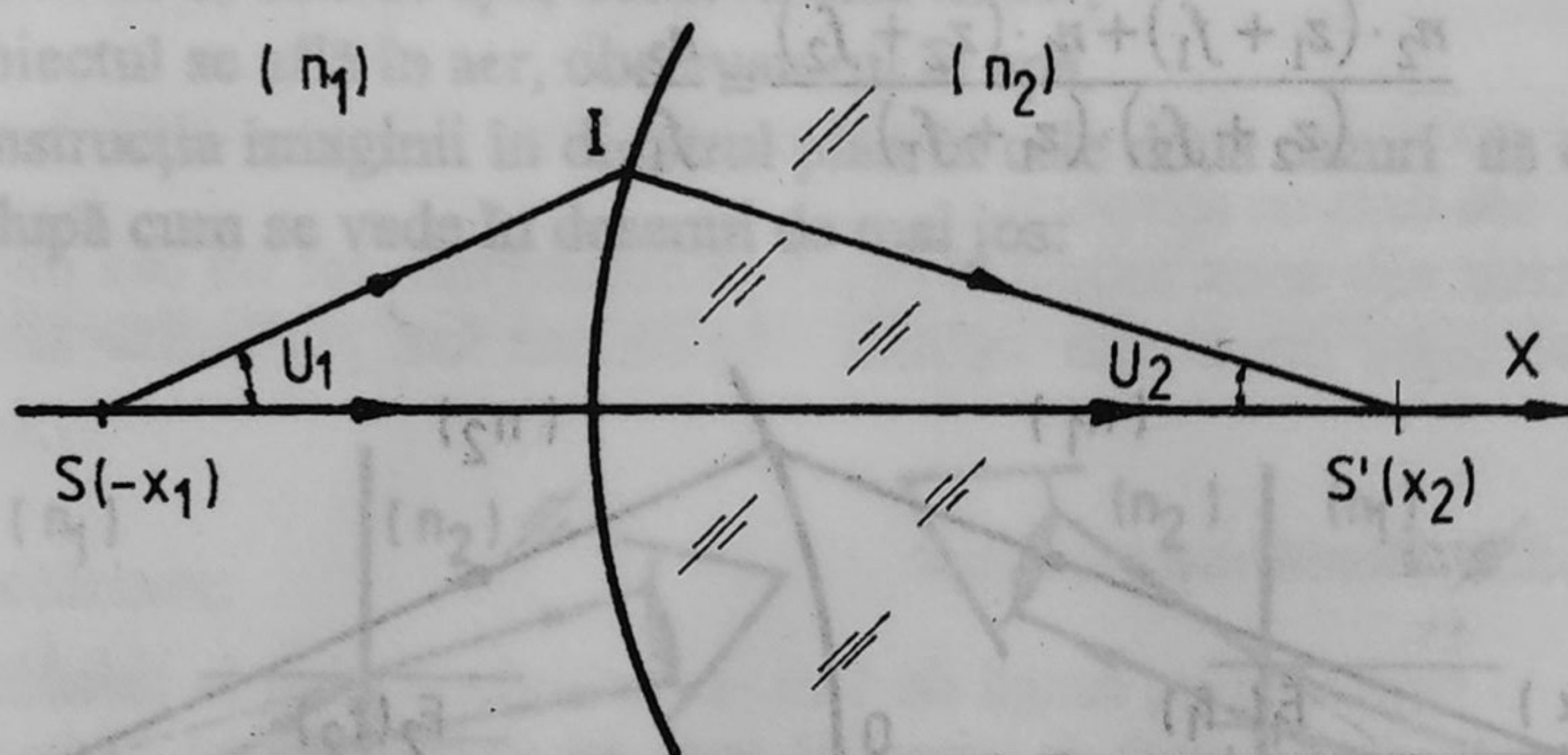


Fig. 57

Se observă că  $g$  este cu atât mai mare cu cât imaginea  $S'$  este mai aproape de vârful dioptrului, deci cu cât puterea optică a dioptrului este mai mare. Pentru unghiuri mici formula pentru  $g$  devine:

$$x_1 \cdot tgu_1 = IO \quad x_2 \cdot tgu_2 = IO \quad \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{tgu_2}{tgu_1} = 1 \quad \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{u_2}{u_1} \approx 1$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \beta \cdot \frac{f_2}{f_1} \quad g = \frac{u_2}{u_1} \quad \text{deci} \quad \beta \cdot \frac{f_2}{f_1} \cdot g = 1 \quad \beta \cdot g = \frac{f_1}{f_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\beta \cdot g = \frac{n_1}{n_2}$$



### 3.2.8. Formula lui Newton

Constituie o altă formă pentru formula dioptrului sferic, care se obține luând ca origine nu vârful dioptrului ci focarele lui:

$F_1$  ca origine a distanțelor la punctul obiect ( $SF_1 = z_1$ );

$F_2$  ca origine a distanțelor la punctul imagine ( $S'F_2 = z_2$ ).

În figura de mai jos vom prezenta punctele conjugate S și S' peste care suprapunem cele două sisteme de coordonate: cel algebric cu originea în vârful dioptrului și cele două origini în focarele  $F_1$  și  $F_2$ .

$$x_1 = -(z_1 + f_1) \quad x_2 = z_2 + f_2 \quad \frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

$$\text{deoarece } \frac{n_2 - n_1}{R} = \frac{n_2}{f_2} \text{ scriem } \frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2}{f_2}$$

$$\frac{n_2}{z_2 + f_2} + \frac{n_1}{z_1 + f_1} = \frac{n_2}{f_2}$$

$$\frac{n_2 \cdot (z_1 + f_1) + n_1 \cdot (z_2 + f_2)}{(z_2 + f_2) \cdot (z_1 + f_1)} = \frac{n_2}{f_1}$$

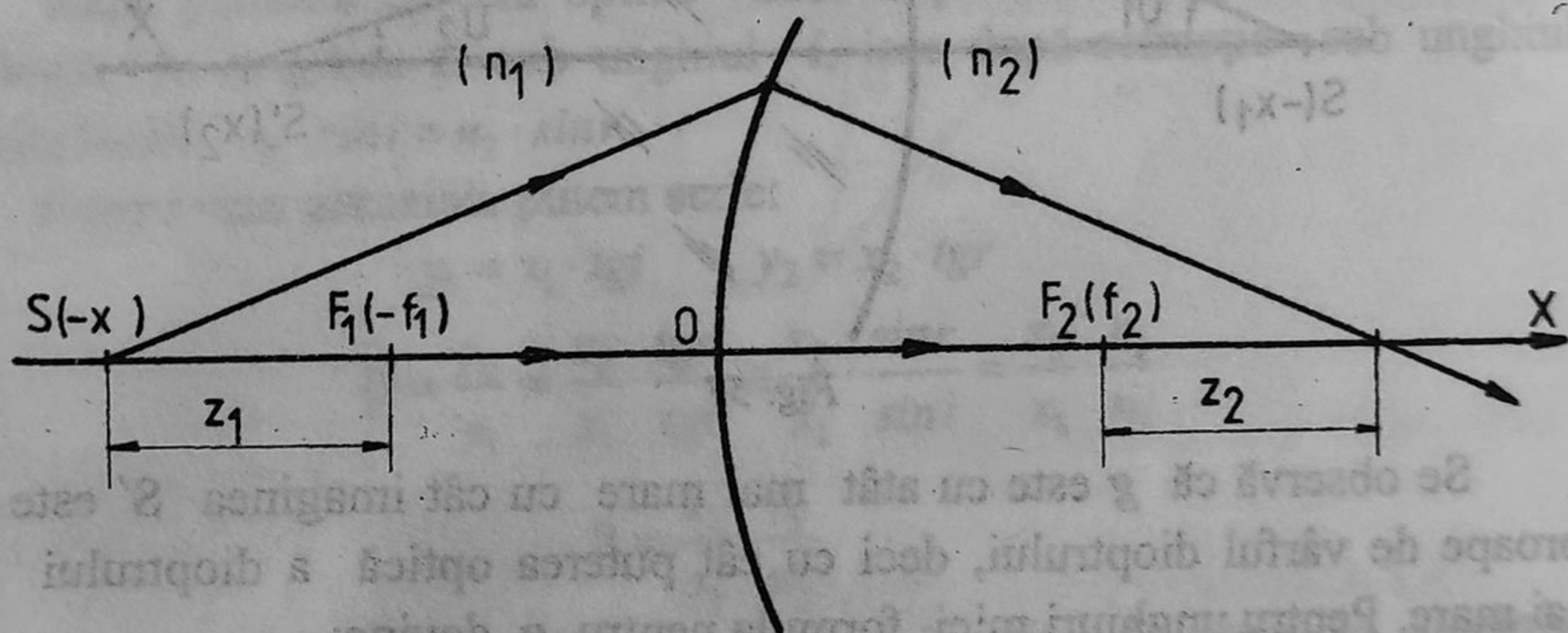


Fig 58

$f_2 \cdot (n_2 \cdot z_1 + n_2 \cdot f_1 + n_1 \cdot z_2 + n_1 \cdot f_2) = n_2 \cdot (z_2 + f_2) \cdot (z_1 + f_1)$   
am demonstrat:  $n_1 \cdot f_2 = n_2 \cdot f_1$  pentru că se reduc unii termeni.

$$n_1 \cdot f_2^2 = n_2 \cdot z_1 \cdot z_2 \quad n_2 \cdot f_1 \cdot f_2 = n_2 \cdot z_1 \cdot z_2$$

$$f_1 \cdot f_2 = z_1 \cdot z_2 \quad \text{sau} \quad \frac{f_1}{z_1} = \frac{z_2}{f_2}$$



### 3.3. Dioptrul plan

Dacă suprafața de separare este plană, raza sa de curbură poate fi considerată infinit de mare și din prima relație a punctelor conjugate se obține:

$$\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = 0 \quad \frac{n_2}{x_2} = \frac{n_1}{x_1} \quad \text{sau} \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$x_2 = x_1 \cdot \frac{n_2}{n_1}$$

#### 3.3.1. Dioptrul plan transparent

Imaginea unui obiect creată de dioptrul plan format din suprafața de separație aer-apă constituie iluzie optică deoarece atunci când obiectul se află în apă și observatorul primește razele de la acesta în aer, imaginea îi apare mai aproape de suprafață decât în realitate. Avem două cazuri:

- Obiectul se află în apă, observatorul în aer;
- Obiectul se află în aer, observatorul în apă.

Construcția imaginii în dioptrul plan în cele două cazuri dă o imagine virtuală după cum se vede în desenul de mai jos:

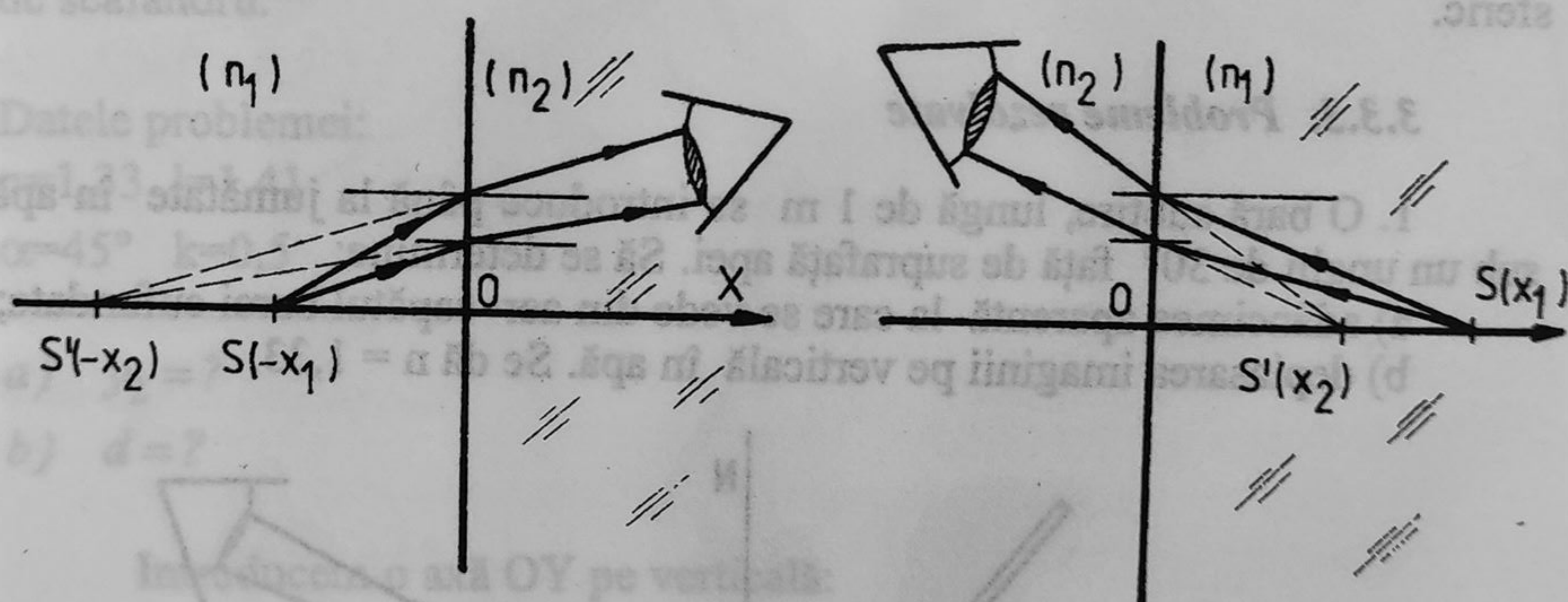


Fig. 59

$$a) \quad n_2 > n_1 \quad n = \frac{n_2}{n_1} = 1,37 \quad x_2 = n \cdot x_1$$

$$\text{deci } x_2 > x_1 \quad n_2 > n_1 \Rightarrow i > r$$

deci raza se apropie de normală.



$$b) \quad n_2 < n_1 \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{n} = \frac{1}{1,37} \quad \text{deci} \quad x_2 = \frac{x_1}{n}$$

$$x_2 < x_1 \quad n_2 < n_1 \Rightarrow i < r$$

deci raza se depărtează de normală.

### 3.3.2. Dioptrul plan reflectant (oglinnda plană)

Presupunând că suprafața de separație a dioptrului plan este o suprafață reflectantă, atunci în mod formal putem scrie:

$$n_2 = -n_1$$

și deci:

$$x_2 = x_1 \cdot \frac{-n_1}{n_2} \quad \text{sau} \quad x_2 = -x_1$$

adică imaginea se află la o distanță egală și de cealaltă parte a suprafeței de separație așa cum este cazul oglinzii plane.

Mărirea liniară definită astfel:

$$\beta = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{n_1}{n_2}$$

devine în acest caz:  $\beta = +1$ , deci imaginea este virtuală, dreaptă și egală cu obiectul, așa cum ne așteptam.

Privit sub acest aspect, oglinda plană devine, tot un caz particular al dioptrului plan, după cum oglinda sferică, un caz particular al dioptrului sferic.

### 3.3.3. Probleme rezolvate

1. O bară subțire, lungă de 1 m se introduce până la jumătate în apă sub un unghi de  $30^\circ$  față de suprafața apei. Să se determine:

- adâncimea aparentă la care se vede din aer capătul barei cufundate;
- deplasarea imaginii pe verticală în apă. Se dă  $n = 1,33$ .

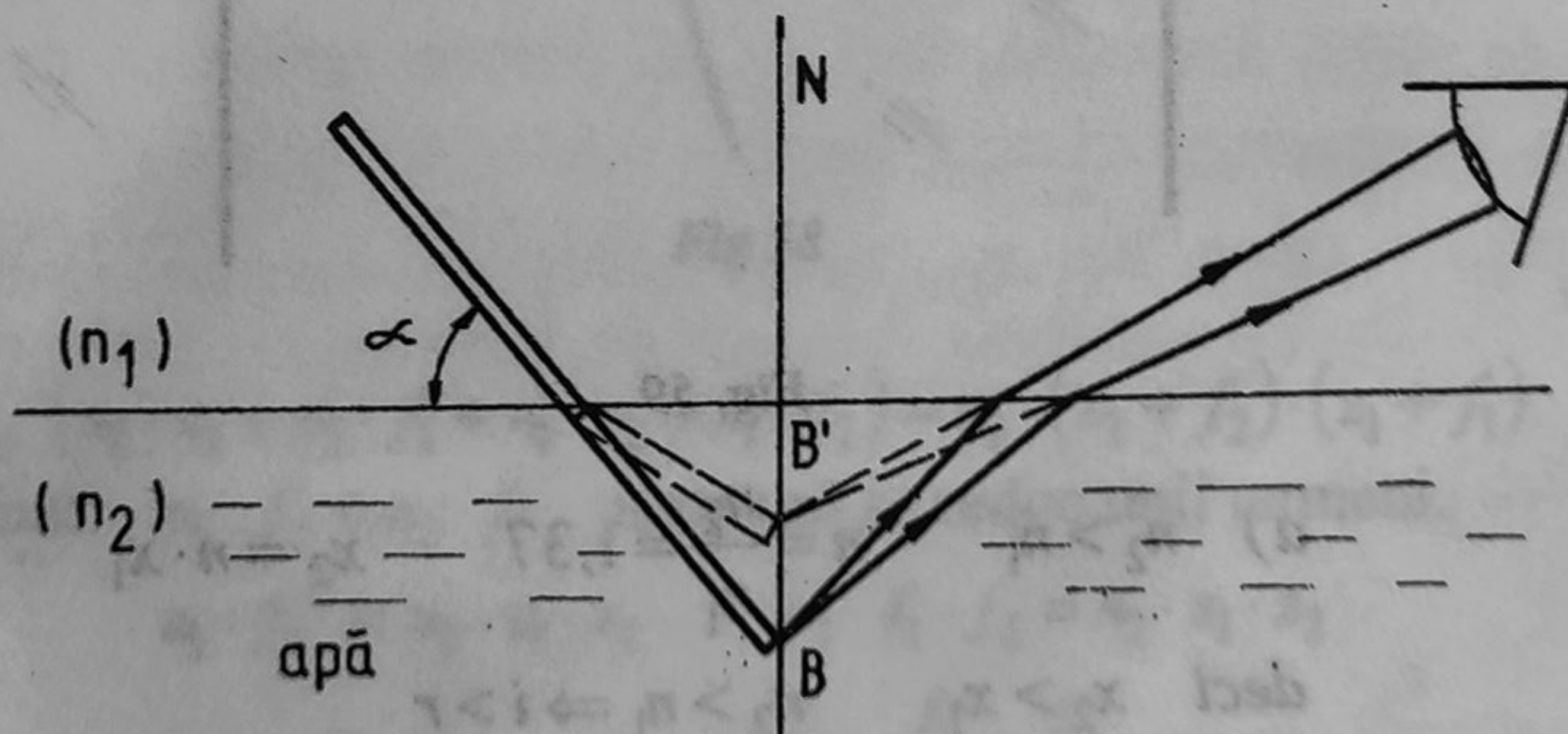


Fig. 60



Datele problemei:

$$n=1,33 \quad l=1 \text{ m} \quad k=0,5$$

$$\alpha=30^\circ$$

a)  $x_2 = ?$

b)  $\Delta x = ?$

$$OB = x_1 \quad OB' = x_2 \quad \Delta x = BB'$$

$$a) \quad x_1 = \frac{l}{2} \cdot \sin \alpha \quad x_2 = \frac{x_1}{n} = \frac{l}{2 \cdot n} \cdot \sin \alpha = 18,2 \text{ cm}$$

$$b) \quad \Delta x = x_1 - x_2 = x_1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = x_1 \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{l}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \sin \alpha = 6 \text{ cm}$$

2. O tijă subțire lungă de 1,41 m, este scoasă din apă până la jumătate de către un scafandru, la o înclinație de  $45^\circ$  față de normală. Să se determine:

a) înălțimea aparentă la care scafandru vede capătul tijei ieșită deasupra apei;

b) distanța pe verticală dintre capătul din aer și capătul din apă văzut de scafandru.

Datele problemei:

$$n=1,33 \quad l=1,41$$

$$\alpha=45^\circ \quad k=0,5$$

a)  $y_2 = ?$

b)  $d = ?$

Introducem o axă OY pe verticală:

$$OA = y_1 \quad \text{și} \quad OA' = y_2 \quad \text{cu} \quad n_2 > n_1$$

$$a) \quad y_2 = n \cdot y_1 \quad y_1 = \frac{l}{2} \cdot \sin \alpha = 0,5 \text{ m}$$

$$y_2 = 1,33 \cdot 0,5 \text{ m} = 0,665 \text{ m}$$

$$b) \quad d = \Delta y = y_2 - y_1 = 0,165 \text{ m}$$



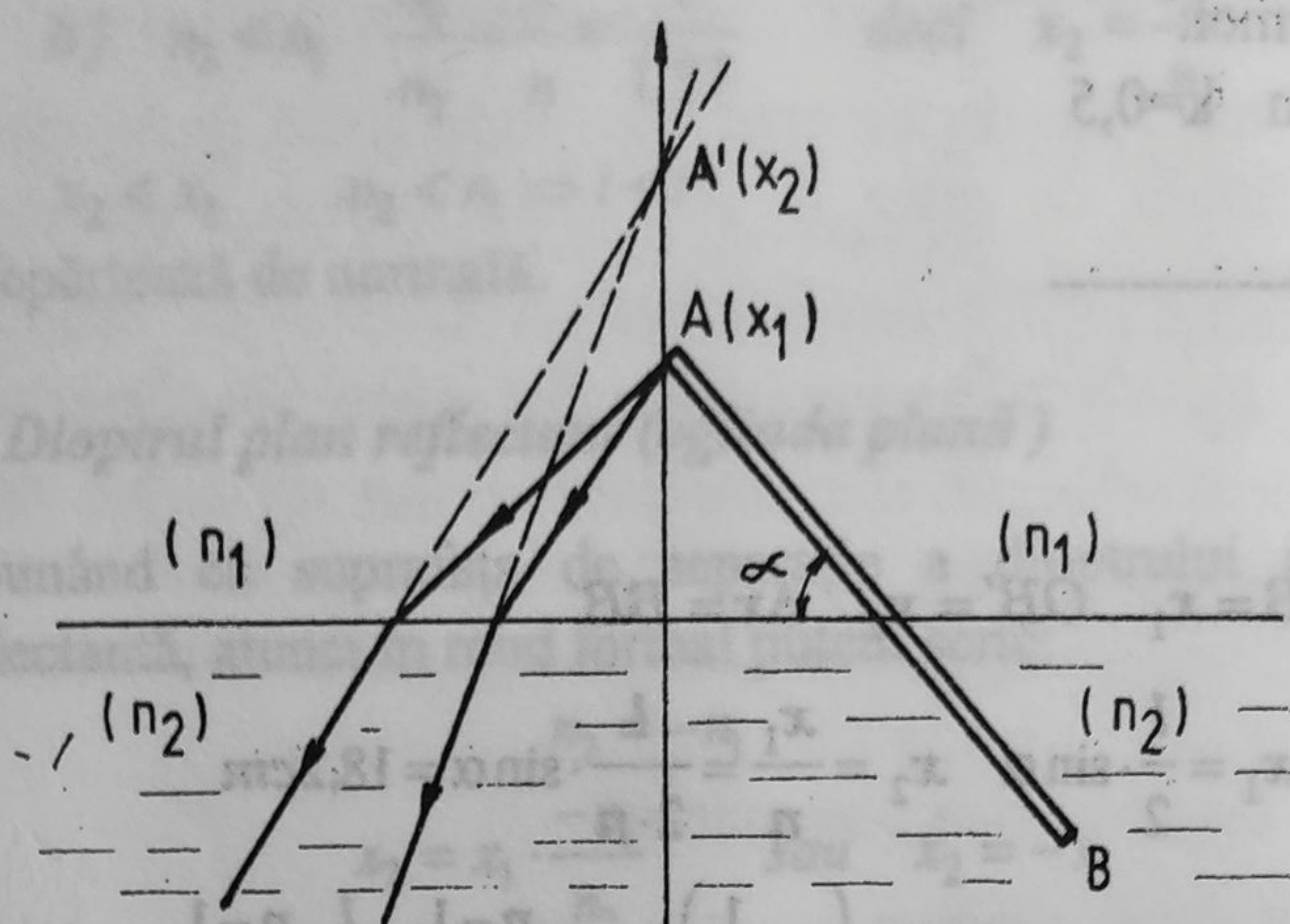


Fig. 61

3. În fața unui cilindru de sticlă ( $n = 1,5$ ) cu raza de 5cm, la o distanță de 2 cm se află un punct luminos. Să se afle:

- la ce distanță se formează imaginea sa în interiorul cilindrului de sticlă;
- care este distanța focală a acestui dioptru.

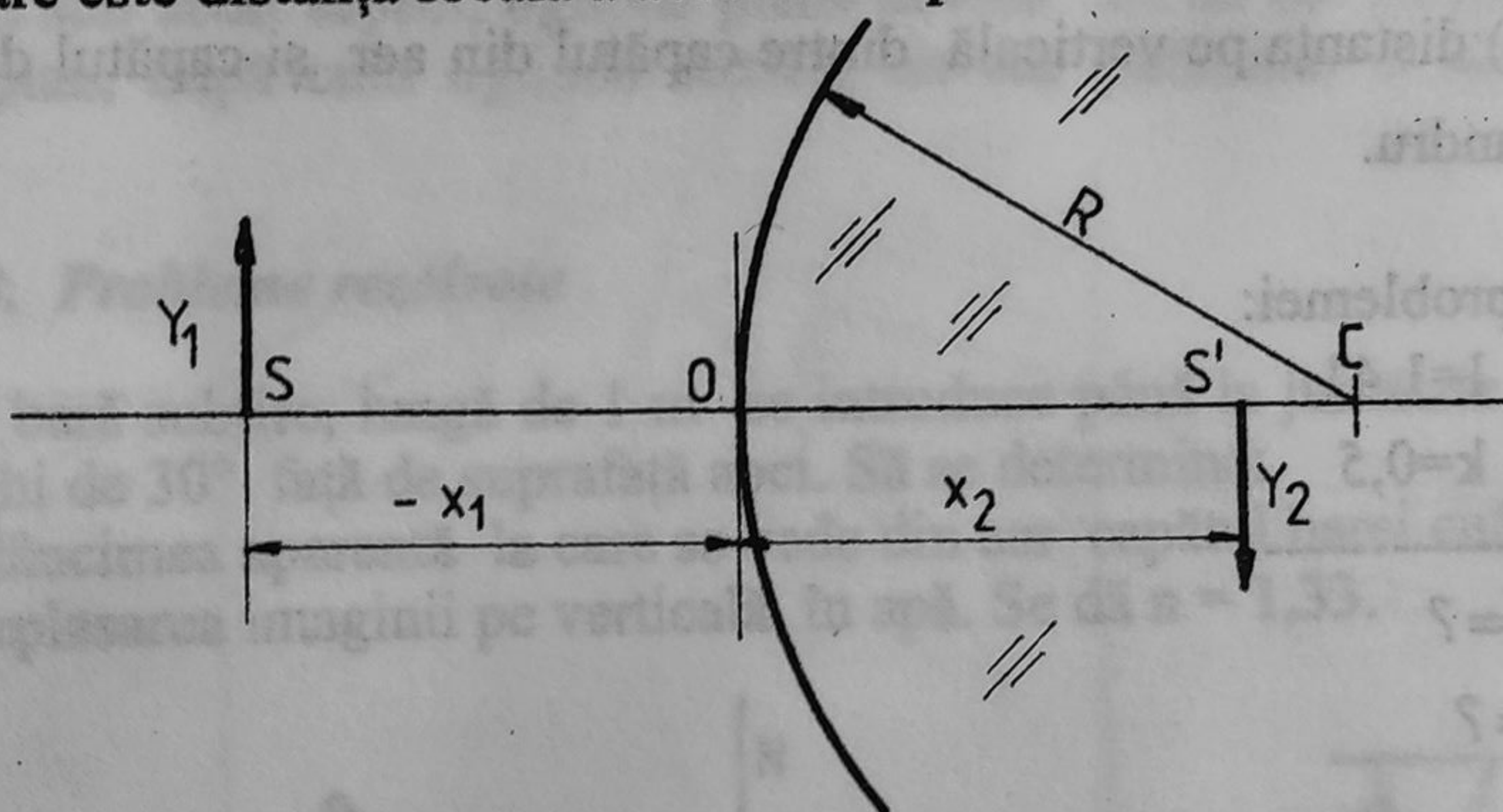


Fig. 62

Datele problemei:

$$R = 5\text{cm} \quad x_1 = 2\text{cm}$$

$$n_2 = 1,5 \quad n_1 = 1$$

a)  $x_2 = ?$

b)  $f = ?$



$$a) \quad \frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad \frac{n_2}{x_2} = \frac{n_1}{x_1} + \frac{n_2 - n_1}{R}$$

$$\frac{x_2}{n_2} = \frac{1}{\frac{n_1}{x_1} + \frac{n_2 - n_1}{R}} \quad x_2 = \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \frac{n_2 - n_1}{R}} = 2,5 \text{ cm}$$

$$b) \quad f_2 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} \cdot R = 15 \text{ cm}$$

Deci imaginea iese în afara cilindrului.

4. În fața unui perete cilindric de sticlă ( $n=1,5$ ), cu raza de 50 cm se află un obiect luminos cu lungimea de 2 cm, aflat la distanța de 10 cm de perete. Să se afle:

a) focarele dioptrului;

b) distanța la care se formează imaginea în interiorul sticlei, la fața de intrare;

c) mărirea liniară și unghiulară.

Datele problemei:

$$n=1,5 \quad R=50 \text{ cm}$$

$$y_1=2 \text{ cm} \quad x_1=10 \text{ cm}$$

$$a) \quad f_1=? \quad f_2=?$$

$$b) \quad x_2=?$$

$$c) \quad \beta=?$$

$$d) \quad g=?$$

Vezi figura precedentă.

$$n = \frac{n_2}{n_1} = 1,5$$

$$a) \quad f_1 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} \cdot R = 100 \text{ cm} \quad f_2 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} \cdot R = 150 \text{ cm}$$

$$b) \quad \frac{f_2}{x_2} - \frac{f_1}{x_1} = 1 \quad \frac{x_2}{f_2} = \frac{x_1}{x_1 + f_1} \quad x_2 = f_2 \cdot \frac{x_1}{x_1 + f_1} = 13,63 \text{ cm}$$

$$c) \quad \beta = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{f_1}{f_2} = 1,81 \quad d) \quad g = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{n_1}{n_2} = 0,37 \quad X$$



### 3.4. Oglinzi sferice

Depunând un strat lucios (argint) pe o suprafață sferică (pe față sau dos), se obține oglinda sferică. În funcție de suprafața pe care se depune stratul lucios, putem avea *oglinzi concave* sau *oglinzi convexe*. Felul oglinzii se stabilește în funcție de poziția observatorului care privește suprafața lucioasă în direcția și în sensul de propagare a luminii incidente:

*Oglinda este concavă* - dacă observatorul care primește lumina reflectată se află în interiorul curburii;

*Oglinda este convexă* - dacă observatorul care primește lumina reflectată se află în exteriorul curburii.

În figura de mai jos se arată cele două feluri de oglinzi:

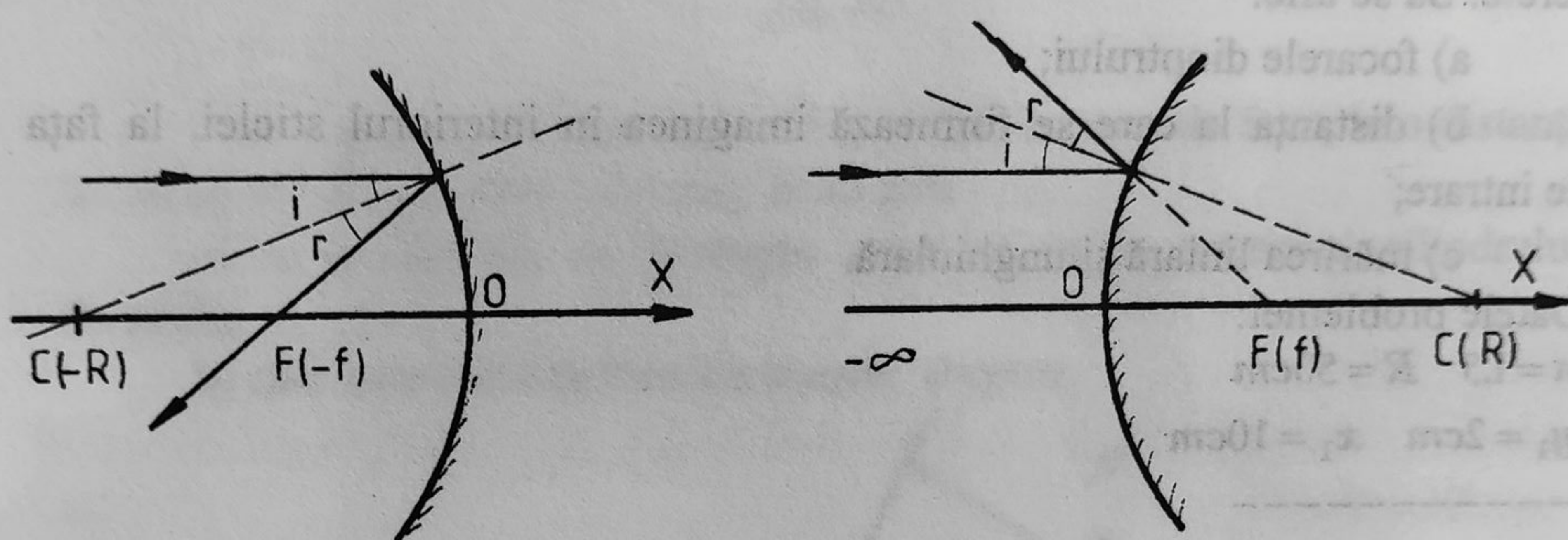


Fig. 63

Oglinda sferică este un caz particular al dioptrului sferic și anume cazul când lumina se întoarce în mediul din care a venit.

În acest fel formulele oglinzii sferice se deduc din formulele dioptrului sferic punând condiția formală:  $n_2 = -n_1$

Deasemenea construcția imaginilor într-o oglindă sferică se va face după niște reguli asemănătoare.

#### 3.4.1. Elementele oglinzii sferice

*Vârful oglinzii* - notat cu O, este polul calotei sferice din care face parte oglinda sferică. Se ia ca origine a sistemului de coordonate xOy.

*Centrul de curbură al oglinzii* - notat cu C, este centrul sferei din care face parte suprafața sferică a oglinzii;



*Axa optică principală* - este dreapta care unește vârful oglinzii cu centrul de curbura;

*Axele optice secundare*, sunt o infinitate de drepte înclinate față de axa optică principală ce trec prin vârful O;

*Focarul oglinzii* - notat cu F, este punctul în care se strâng razele reflectate de oglinda concavă când obiectul este depărtat la infinit iar razele de la acesta vin paralel cu axa optică; sau punctul unde se intersectează prelungirile razelor reflectate de oglinda convexă.

*Distanța focală* - notată cu  $f$ , este distanța de la focar la vârful oglinzii.

*Raza de curbura* - notată cu  $R$ , este egală cu distanța dintre centrul de curbura și orice punct de pe suprafața oglinzii.

### 3.4.2. Convenția de semn pentru distanțe și unghiuri

Distanțele măsurate de alungul axelor Ox și Oy sunt pozitive dacă sunt îndreptate în sensul pozitiv al axelor (axa Ox fiind orientată în sensul propagării luminii):

Distanțele măsurate de alungul axelor sunt negative dacă sunt îndreptate în sensul negativ al axelor;

Semnul unghiurilor este dat de convenția trigonometrică amintită. În această convenție, raza de curbura a oglinzii concave este totdeauna negativă, iar raza de curbura a oglinzii convexe este totdeauna pozitivă. Aceleași semne le au distanțele focale care se exprimă printr-o relație simplă în funcție de raza de curbura.

### 3.4.3. Formulele oglinzilor sferice

Fie o oglindă concavă ce formează imaginea  $S'$  a unui obiect  $S$  așezat pe axa optică la distanța  $(-\infty)$  după cum se vede din figura de mai jos:

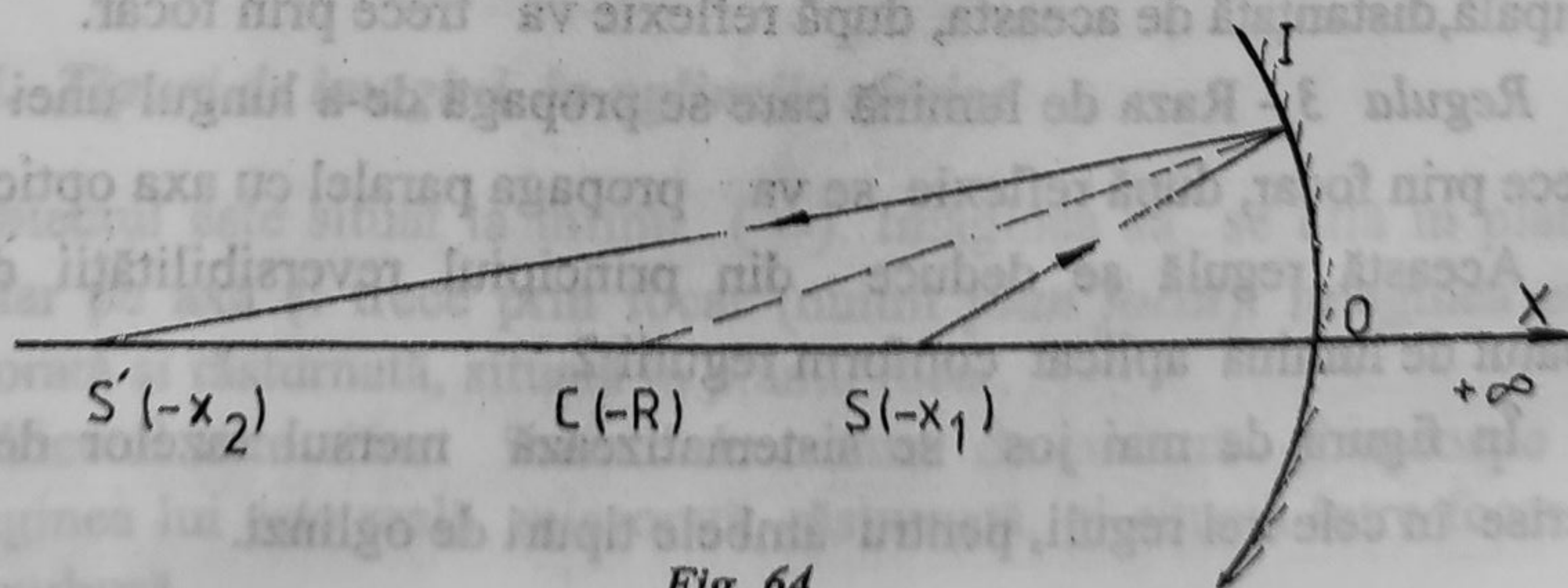


Fig. 64



$$\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad \beta = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{n_1}{n_2} \quad \text{devin pentru } n_2 = -n_1$$

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{2}{R} \quad \beta = -\frac{x_2}{x_1}$$

În locul celor două distanțe focale - imagine și obiect, vom avea o singură distanță focală  $f$ . Formulele oglinzilor sferice sunt deci:

$$f = f_1 = f_2 = \frac{-n_1}{-(n_1 + n_2)} \cdot R \quad f = \frac{R}{2}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f} \quad \beta = -\frac{x_2}{x_1}$$

#### 3.4.4. Construcția imaginilor în oglinda sferică

Formula oglinzilor ne asigură că oglinda sferică dă o imagine diferită pentru fiecare poziție a obiectului. Construcția unei imagini se poate face cu rigla și compasul dacă se cunoaște mersul câtorva raze după reflexie prezentate mai jos sub forma a trei reguli.

**Regula 1** - Raza de lumină care se propagă de-a lungul axei optice principale, se întoarce după reflexie, după aceeași direcție.

Acest lucru rezultă din legea reflexiei  $i=0^\circ$   $r=0^\circ$ . Din același motiv, orice rază care se propagă de-a lungul unei drepte ce trece prin centrul de curbură, după reflexie se va propaga de-a lungul aceleiași direcții dar în sens contrar.

**Regula 2** - Raza de lumină care se propagă paralel cu axa optică principală, distanțată de aceasta, după reflexie va trece prin focar.

**Regula 3** - Raza de lumină care se propagă de-a lungul unei direcții ce trece prin focar, după reflexie se va propaga paralel cu axa optică.

Această regulă se deduce din principiul reversibilității drumului străbătut de lumină aplicat conform regulii 2.

În figura de mai jos se sistematizează mersul razelor de lumină descrise în cele trei reguli, pentru ambele tipuri de oglinzi.



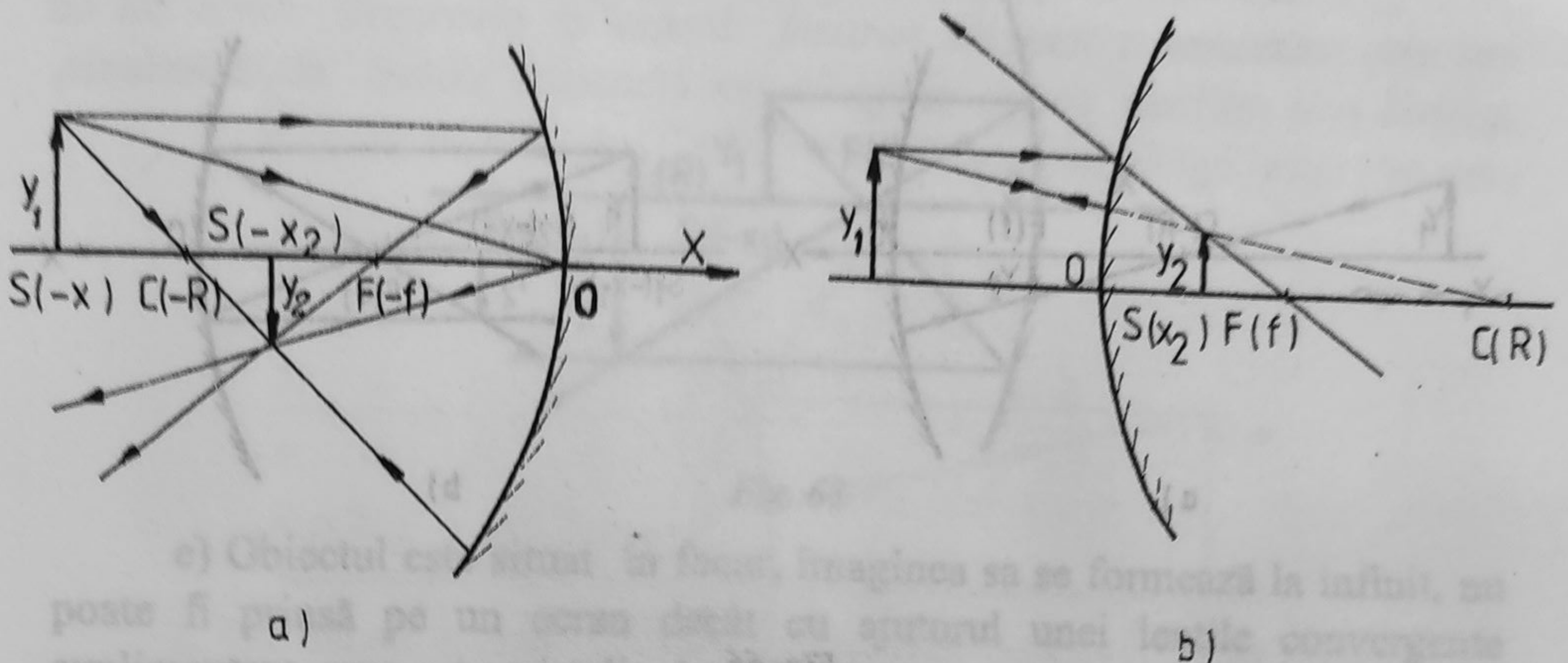


Fig. 65

Pe desen se indică de asemenea și semnele distanțelor ce intervin pentru fixarea convenției la oglinzi.

a)  $\beta < 0$  deoarece  $y_1 > 0$   $y_2 < 0$   $x_2 < 0$   $x_1 < 0$   $R < 0$

b)  $\beta > 0$  deoarece  $y_1 > 0$   $y_2 > 0$   $x_2 < 0$   $x_1 < 0$   $R > 0$

Cu ajutorul acestor trei reguli, putem construi imaginile unor obiecte nepunctuale, extinse în spațiu, dat fiind că orice obiect vizibil poate fi considerat format dintr-o infinitate de puncte luminoase de la care pleacă raze în mod divergent.

Pentru construirea întregii imagini, este suficient să considerăm doar punctele extreme, din care unul să se afle pe axa optică, căci imaginea sa se va găsi tot pe axa optică.

În cele ce urmează vom lua un obiect liniar  $S$  așezat perpendicular pe axa optică principală și vom construi numai imaginea vârfului  $S'$ , după care vom coborî verticala pe axa unde găsim imaginea bazei obiectului.

### 3.4.5. Tipuri de imagini în oglinzile sferice

a) Obiectul este situat la infinit ( $-\infty$ ). Imaginea sa se află în planul perpendicular pe axă și trece prin focar (numit *plan focal*). Imaginea este reală, micșorată și răsturnată, situată în planul focal.

b) Obiectul este situat înaintea de centrul de curbură și aproape de acesta, imaginea lui este reală, micșorată, răsturnată și situată între focar și centrul de curbură.



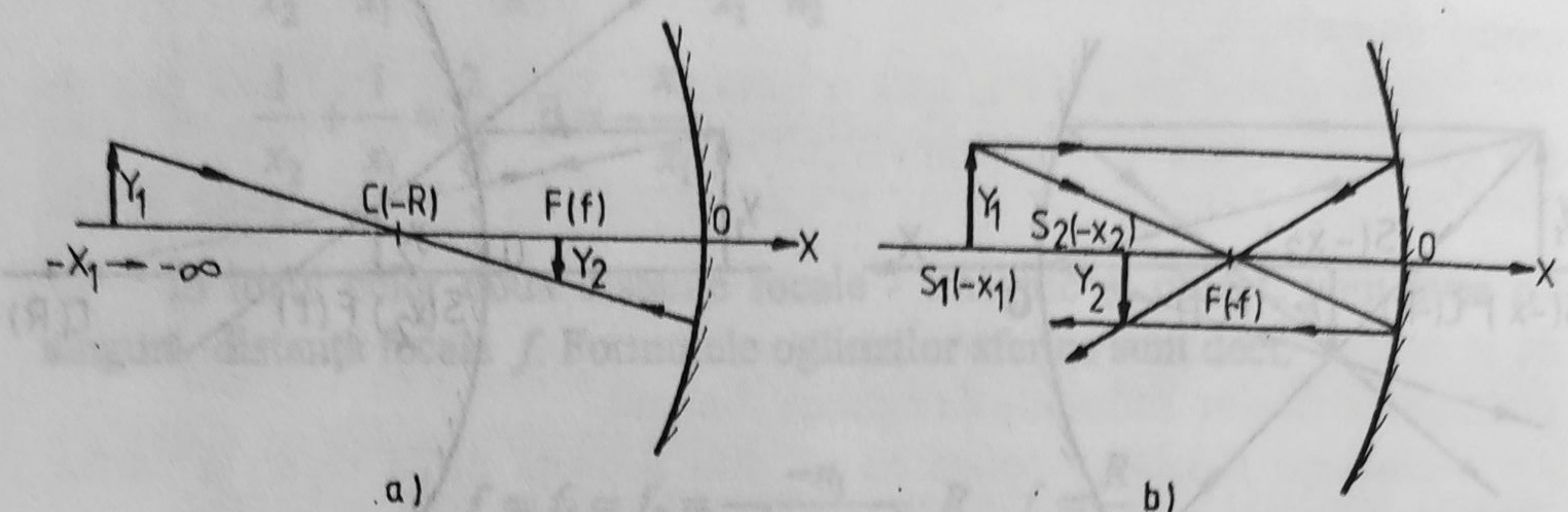


Fig. 66

c) Obiectul este situat în centrul de curbură, imaginea lui este reală, răsturnată, egală cu obiectul și situată tot în centrul de curbură.

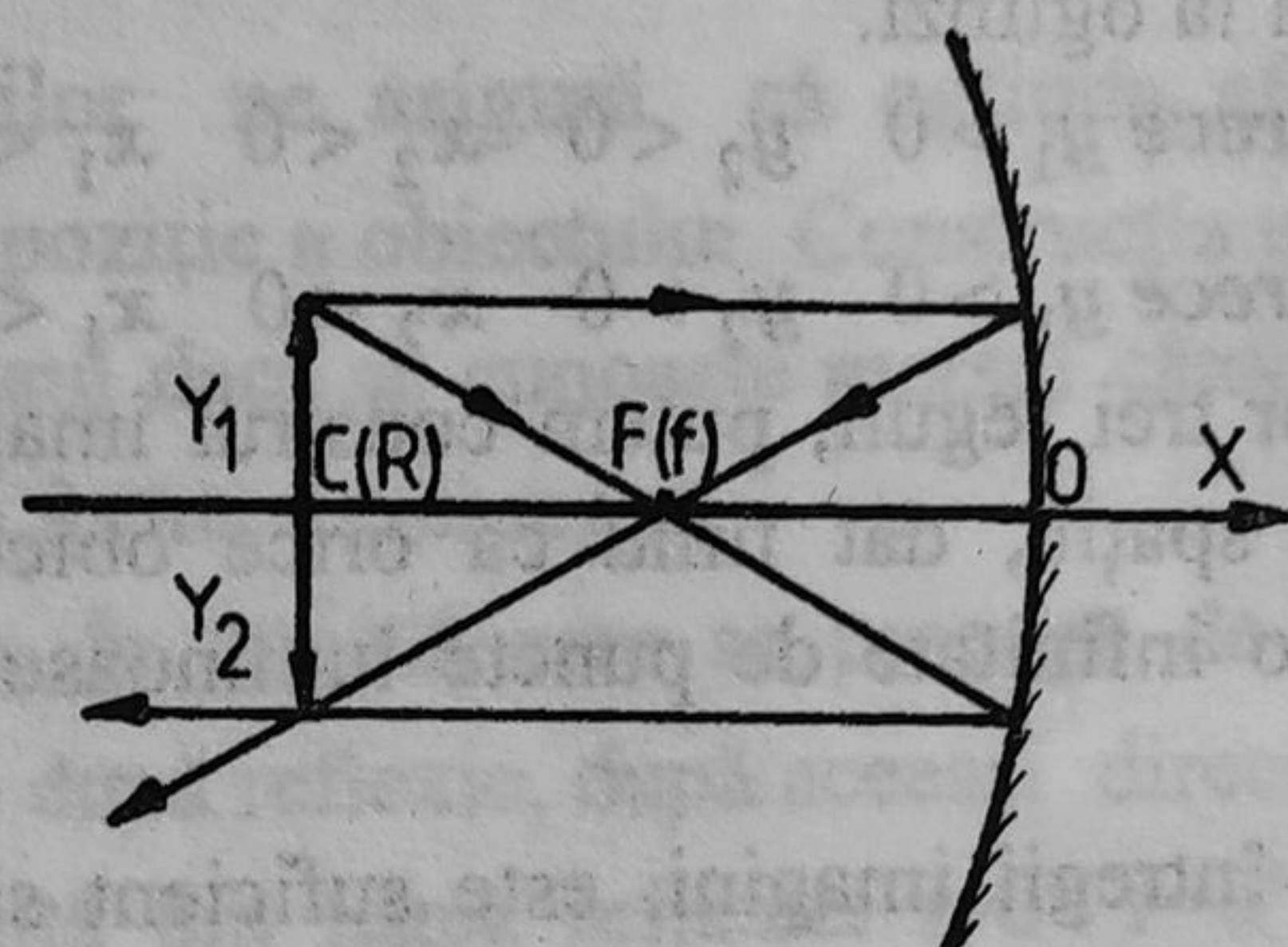


Fig. 67

Pentru acest caz particular putem scrie:

$$x_1 = -R \text{ si } f = \frac{R}{2} \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{x_2} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x_1} = -\frac{2}{R} + \frac{1}{R} = -\frac{1}{R} \quad x_2 = -R$$

deci imaginea este situată tot în centrul de curbură C.

d) Obiectul este situat între centrul de curbură și focar, imaginea lui este reală, răsturnată și mărită, situată mai departe de centrul de curbură.



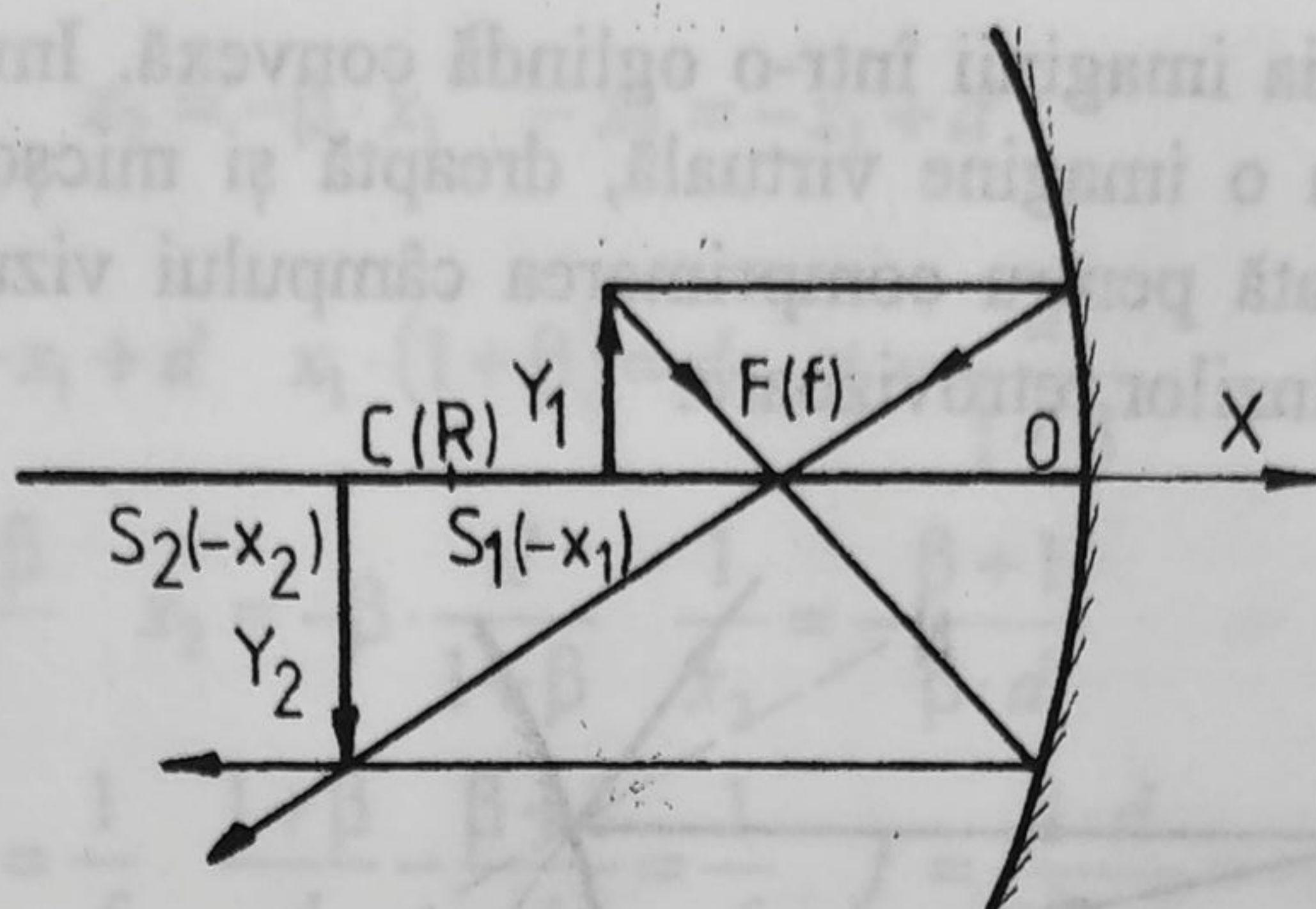


Fig. 68

e) Obiectul este situat în focar, imaginea sa se formează la infinit, nu poate fi prinsă pe un ecran decât cu ajutorul unei lentile convergente suplimentare, cum este cristalinul ochiului.

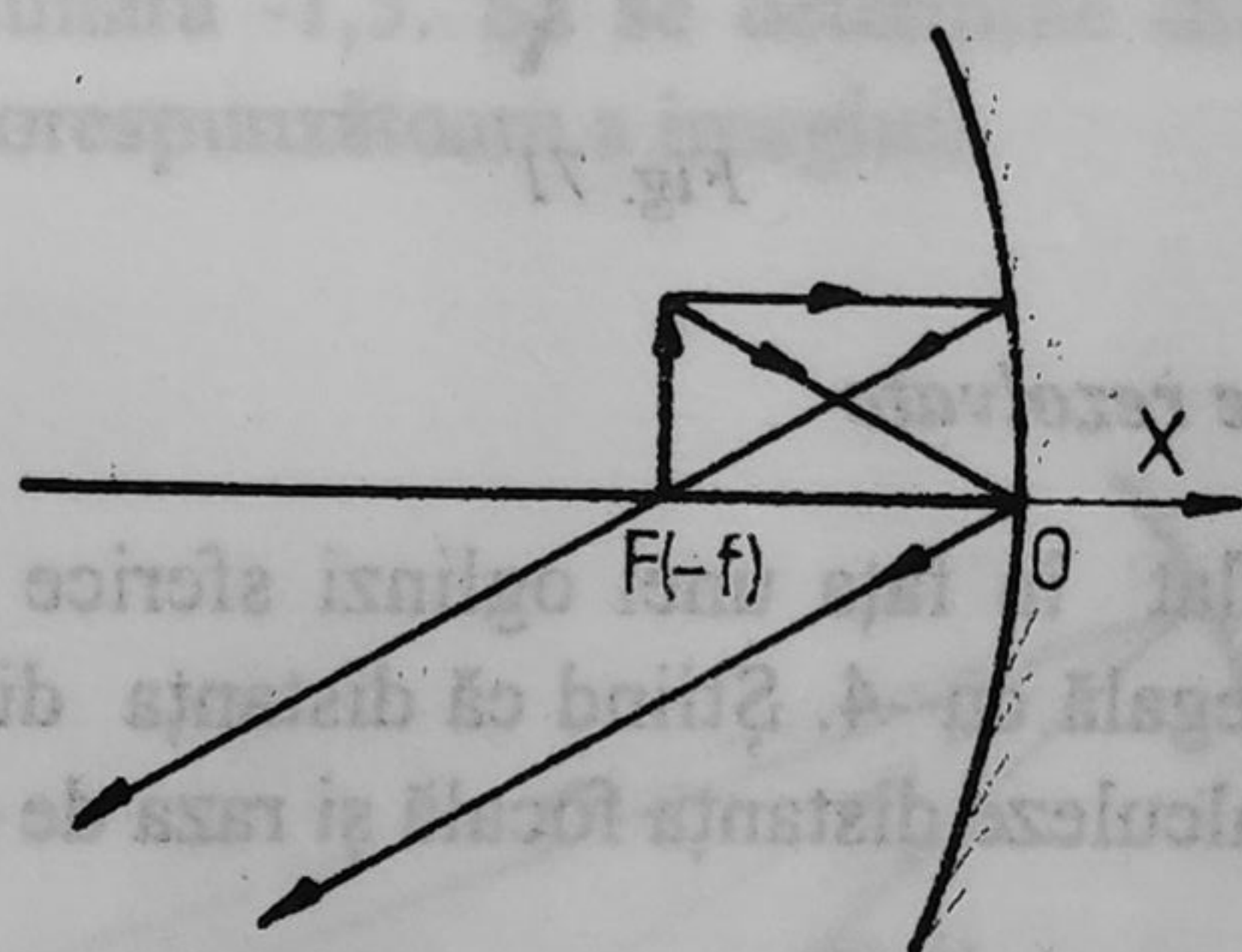


Fig. 69

Acest caz este utilizat la construcția proiectoarelor, pentru a obține fluxuri de lumină paralele cu axa optică.

f) Obiectul este situat între focar și vârful oglinzii, imaginea sa este virtuală, dreaptă și mărită. Imaginea nu poate fi prinsă direct pe ecran, poate fi văzută doar cu ochiul.

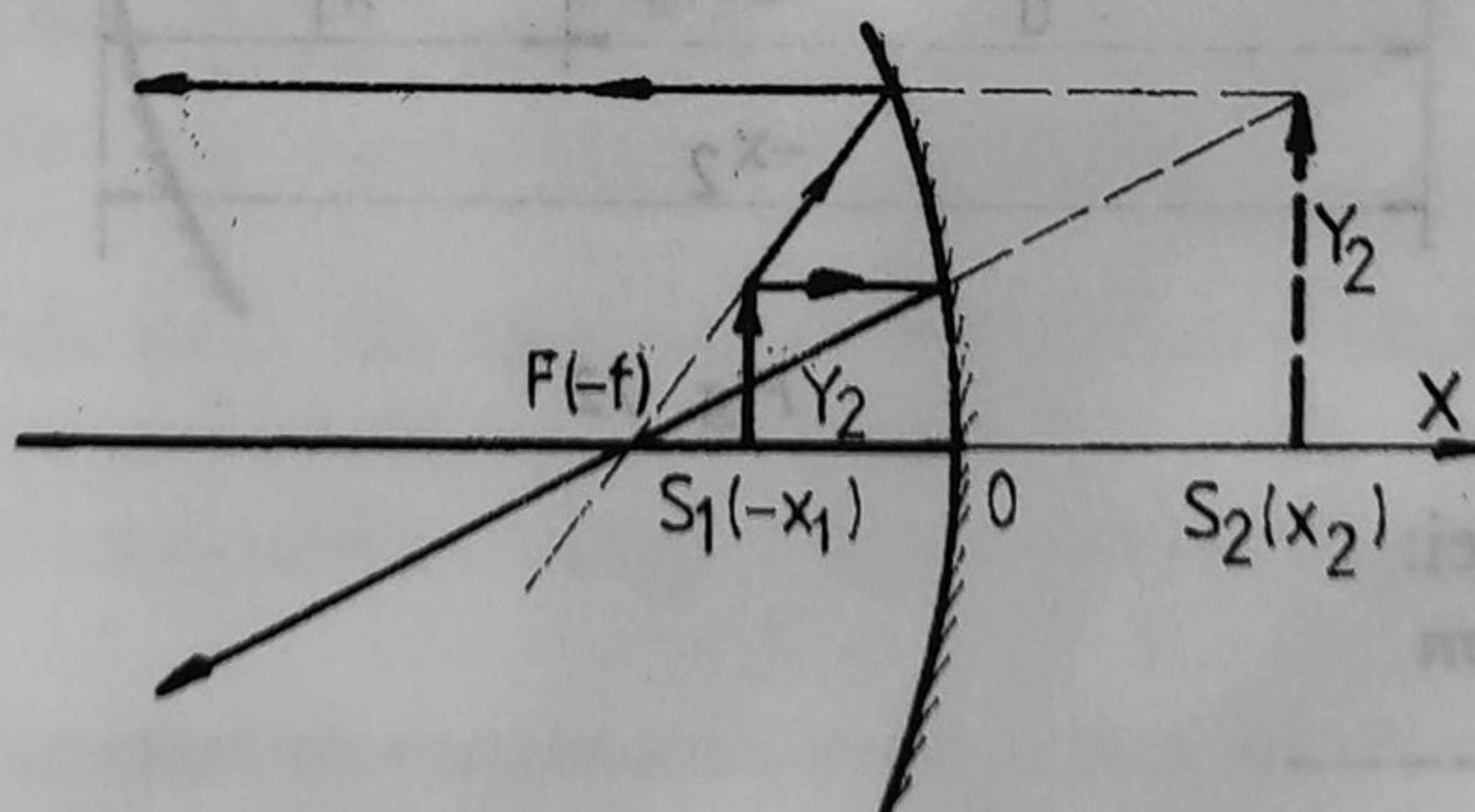


Fig. 70



g) Construcția imaginii într-o oglindă convexă. Imaginea unui obiect real este totdeauna o imagine virtuală, dreaptă și micșorată. Acest fel de oglindă este utilizată pentru comprimarea câmpului vizual după reflexie, cum este cazul oglinzilor retrovizoare.

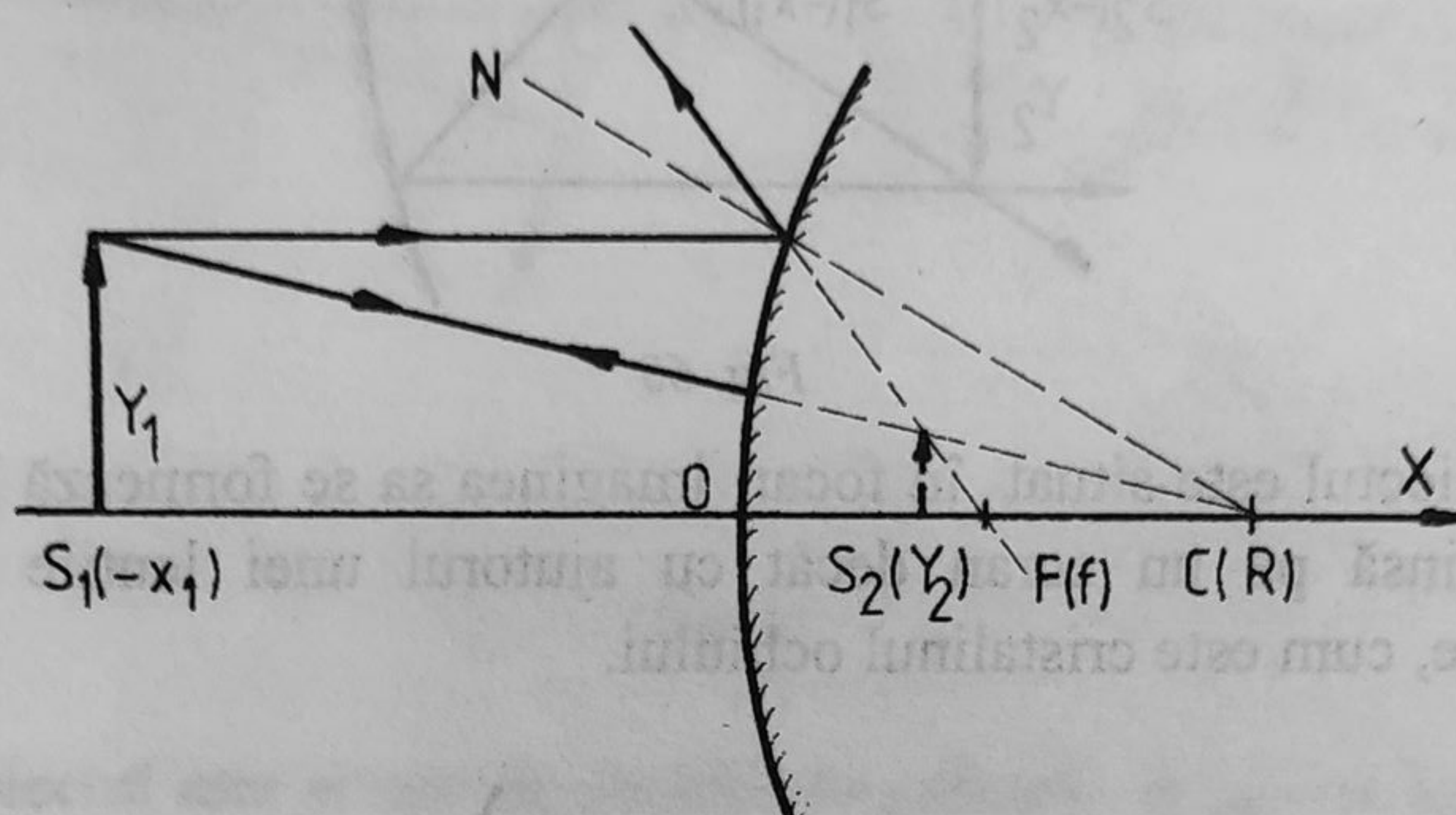


Fig. 71

### 3.4.6. Probleme rezolvate

1. Un obiect aflat în fața unei oglinzi sferice formează o imagine având mărirea liniară egală cu -4. Știind că distanța dintre obiect și imagine este de 24 cm să se calculeze distanța focală și raza de curbură.

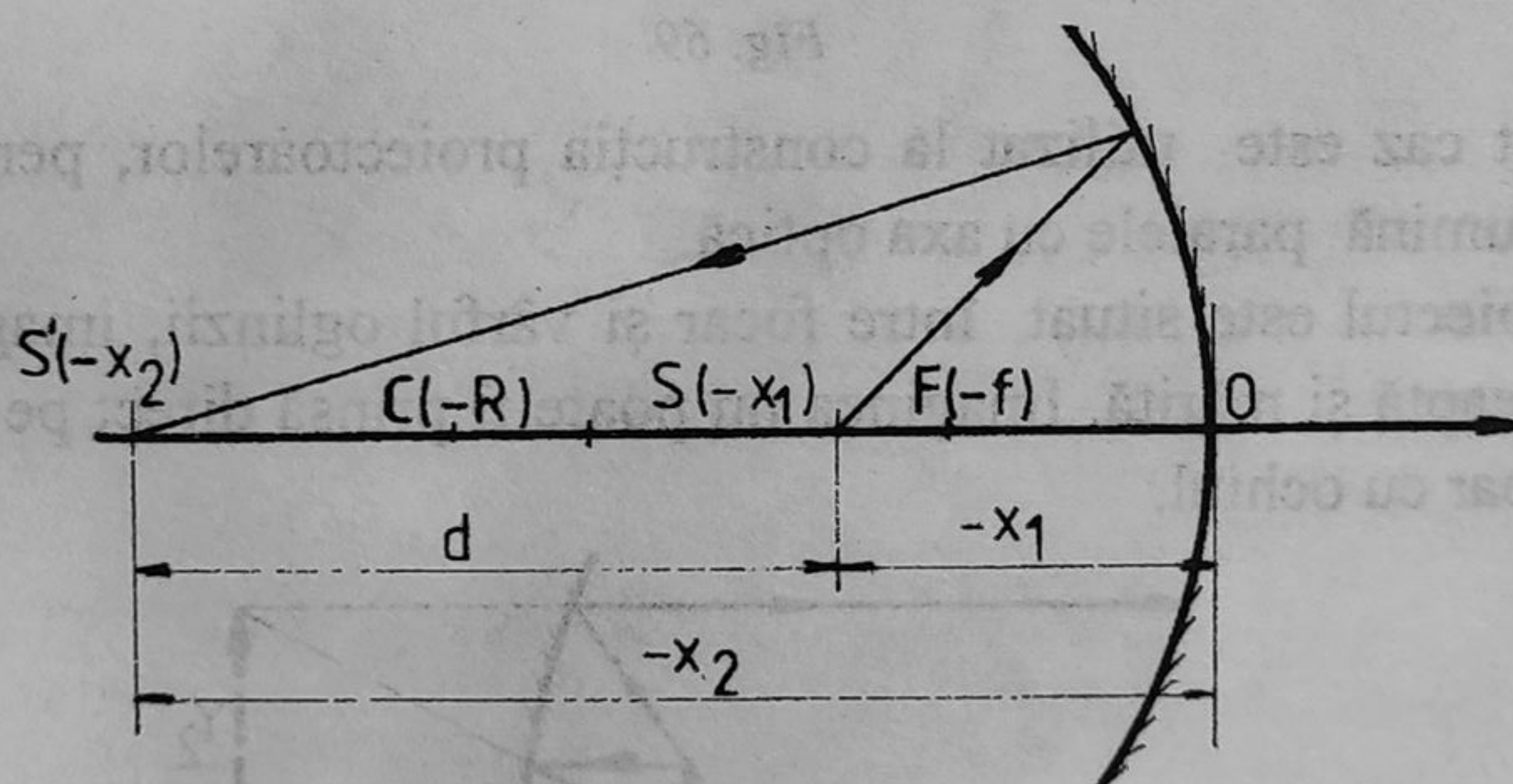


Fig. 72

Datele problemei:

$$\beta = -4 \quad d = 24 \text{ cm}$$

---


$$f = ? \quad R = ?$$



$$\beta = -\frac{x_2}{x_1} \quad x_2 = -\beta \cdot x_1 \quad -x_2 = -x_1 + d$$

$$\beta \cdot x_1 = -x_1 + d \quad x_1 \cdot (1 + \beta) = d \quad x_1 = \frac{d}{1 + \beta}$$

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1 + \beta}{d} \quad x_2 = -\beta \cdot \frac{d}{1 + \beta} \quad \frac{1}{x_2} = -\frac{\beta + 1}{\beta \cdot d}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f} \quad \frac{1 + \beta}{d} - \frac{\beta + 1}{\beta \cdot d} = \frac{1}{f} \quad f = \frac{\beta \cdot d}{\beta^2 - 1} = -6,4 \text{ cm}$$

$$R = 2 \cdot f = -12,8 \text{ cm}$$

2. Un obiect așezat în fața unei oglinzi concave dă o imagine cu mărirea liniară -2, iar într-o poziție cu 10 cm mai depărtată de lentilă dă o imagine cu mărirea liniară -1,5. Să se determine distanța focală, raza de curbură și deplasarea corespunzătoare a imaginii.

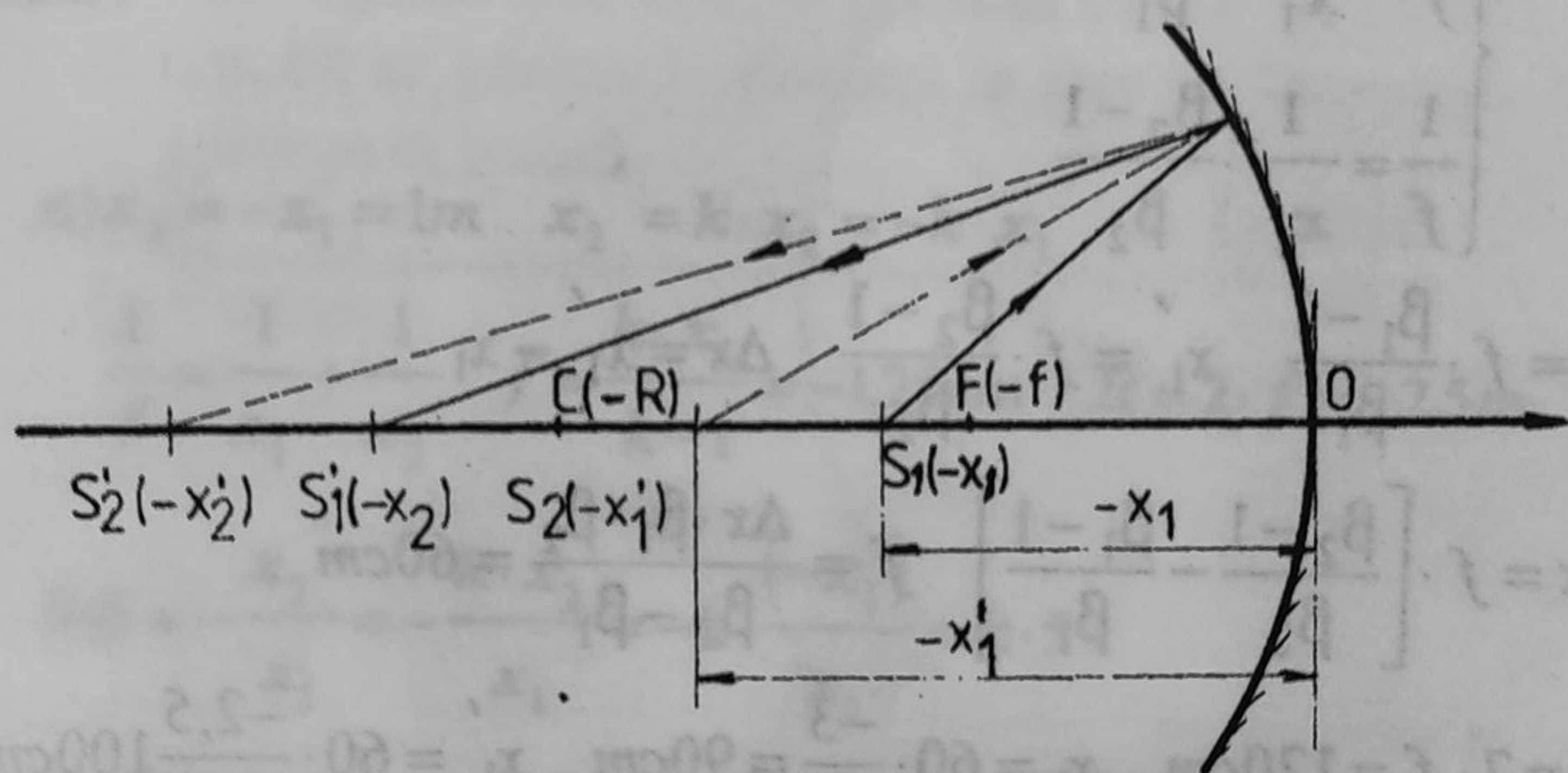


Fig. 73

Datele problemei:

$$\beta = -2$$

$$\Delta x = 10 \text{ cm}$$

$$\beta_2 = -1,5$$

$$f = ?$$

$$R = ?$$



$$\beta_1 = -\frac{x_2}{x_1} \quad x_2 = -\beta_1 \cdot x_1 \quad \beta_2 = -\frac{x_2'}{x_1'} \quad x_2' = -\beta_2 \cdot x_1'$$

Sistemul este:

$$\beta_1 = -\frac{x_2}{x_1} \quad \beta_2 = -\frac{x_2'}{x_1'} \quad x_1' - x_1 = \Delta x \quad x_2' - x_2 = \Delta x'$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f} \quad \frac{1}{x_1'} + \frac{1}{x_2'} = \frac{1}{f}$$

Substituind în ultimele două ecuații:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{\beta_1 \cdot x_1} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{x_1'} - \frac{1}{\beta_2 \cdot x_1'} \quad x_1' - x_1 = \Delta x$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_1} \cdot \left(1 - \frac{1}{\beta_1}\right) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{x_1'} \cdot \left(1 - \frac{1}{\beta_2}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{f} = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{\beta_1 - 1}{\beta_1} \\ \frac{1}{f} = \frac{1}{x_1'} \cdot \frac{\beta_2 - 1}{\beta_2} \end{cases}$$

$$x_1 = f \cdot \frac{\beta_1 - 1}{\beta_1} \quad x_1' = f \cdot \frac{\beta_2 - 1}{\beta_2} \quad \Delta x = x_1' - x_1$$

$$\Delta x = f \cdot \left[ \frac{\beta_2 - 1}{\beta_2} - \frac{\beta_1 - 1}{\beta_1} \right] \quad f = \frac{\Delta x \cdot \beta_1 \cdot \beta_2}{\beta_2 - \beta_1} = 60 \text{ cm}$$

$$R = 2 \cdot f = 120 \text{ cm} \quad x_1 = 60 \cdot \frac{-3}{-2} = 90 \text{ cm} \quad x_1' = 60 \cdot \frac{-2,5}{-1,5} = 100 \text{ cm}$$

$$x_2 = -(-2) \cdot 90 = 180 \text{ cm} \quad x_2' = -(-1,5) \cdot 100 = 150 \text{ cm}$$

$$\Delta x' = x_2' - x_2 = -30 \text{ cm}$$

3. Un obiect este situat la distanța de 1 m de o oglindă plană. Înlocuind oglinda plană cu una sferică, se formează imaginea de aceeași parte cu imaginea din oglinda plană dar la o distanța de 5 ori mai mare. Să se determine:

- distanța focală a oglinzii sferice și raza de curbură;
- mărirea liniară.



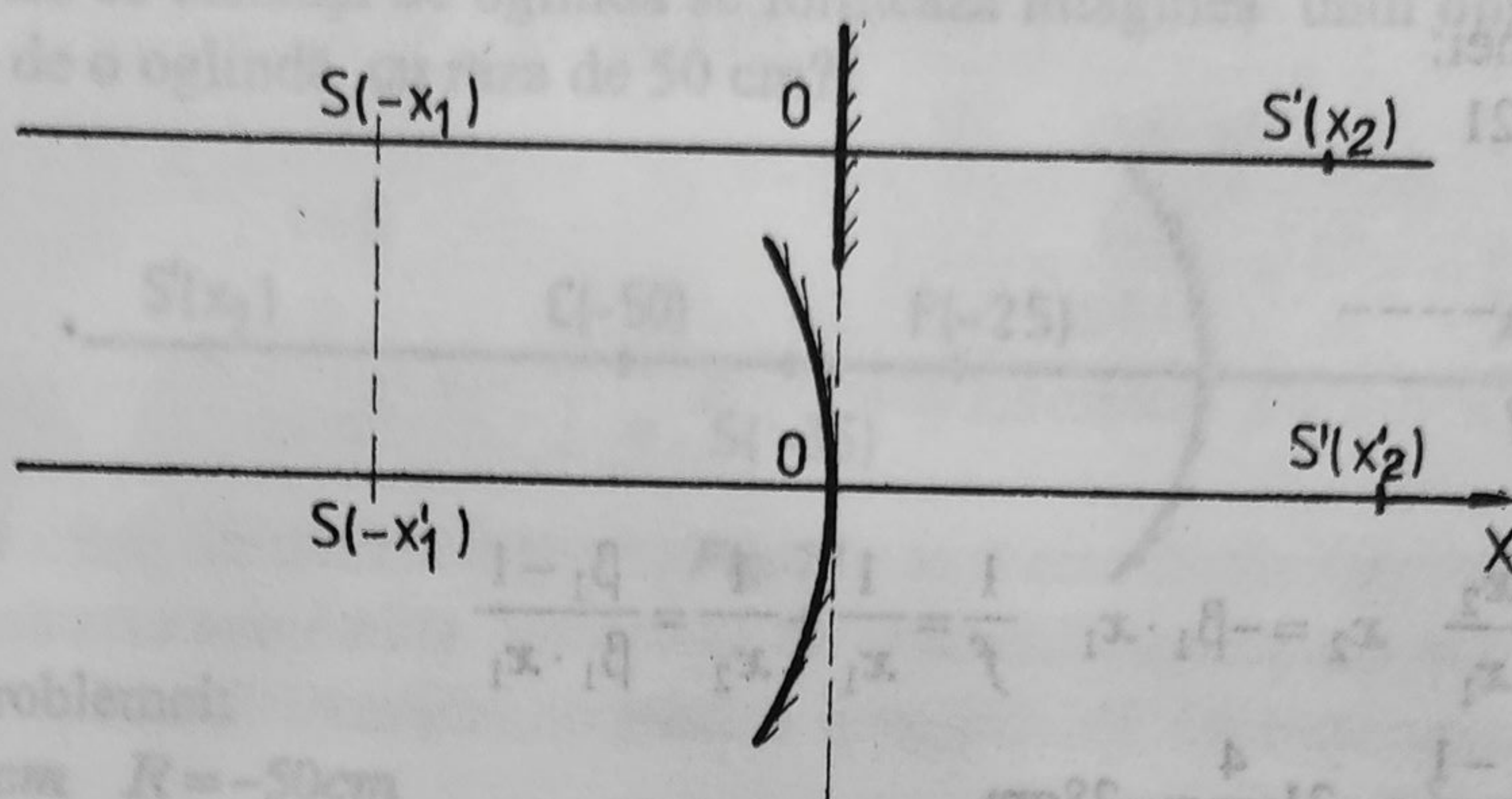


Fig. 74

Datele problemei:

$$x_1 = -1\text{m} \quad x_2' = 5 \cdot x_2$$

$$k = 5$$

a)  $f = ? \quad R = ?$

b)  $\beta = ?$

$$a) x_2' = -x_1 = 1\text{m} \quad x_2' = k \cdot x_2 = -k \cdot x_1$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \quad f = \frac{k \cdot x_1}{k-1} = -1,25\text{cm} \quad R = 2 \cdot f = -2,5\text{m}$$

$$b) \beta = -\frac{x_2'}{x_1} = -\frac{k \cdot x_2}{x_1} = -k \cdot \frac{(-x_1)}{x_1} = k \cdot 5$$

4. Un obiect este așezat în fața unei oglinzi concave astfel încât, într-o poziție se obține o imagine cu mărirea liniară -3 iar în altă poziție o imagine virtuală de trei ori mai mare. Cunoscând distanța focală de 21 cm să se determine valorile celor două poziții ale obiectului.

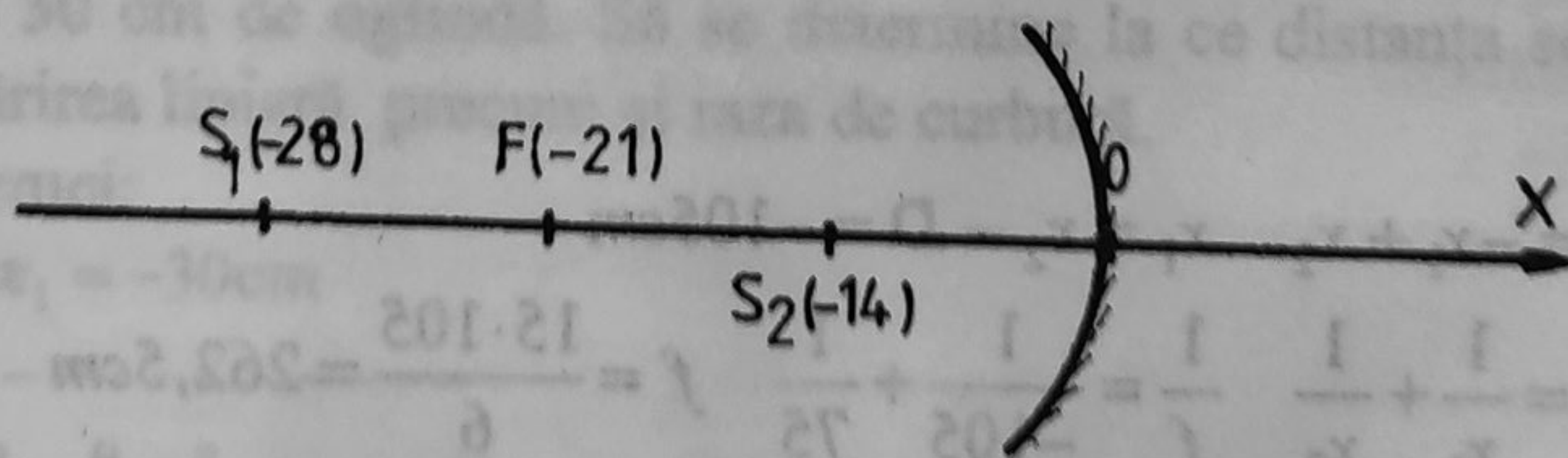


Fig. 75



Datele problemei:

$$\beta_1 = -3 \quad f = -21$$

$$\beta_2 = +3$$

$$x_1 = ? \quad x_1' = ?$$

$$a) \beta_1 = -\frac{x_2}{x_1} \quad x_2 = -\beta_1 \cdot x_1 \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{\beta_1 - 1}{\beta_1 \cdot x_1}$$

$$x_1 = f \cdot \frac{\beta_1 - 1}{\beta_1} = -21 \cdot \frac{4}{3} = -28 \text{ cm}$$

$$b) x_2' = -\beta_2 \cdot x_1' \quad \text{asemanator} \quad x_1' = f \cdot \frac{\beta_2 - 1}{\beta_2} = (-21) \cdot \frac{3 - 1}{3} = -14 \text{ cm}$$

Observație: cele două poziții sunt simetrice față de focarul oglinzii.

5. Ce distanță focală are o oglindă care formează o imagine virtuală la 75 cm de oglindă și 1,8 m de obiect?

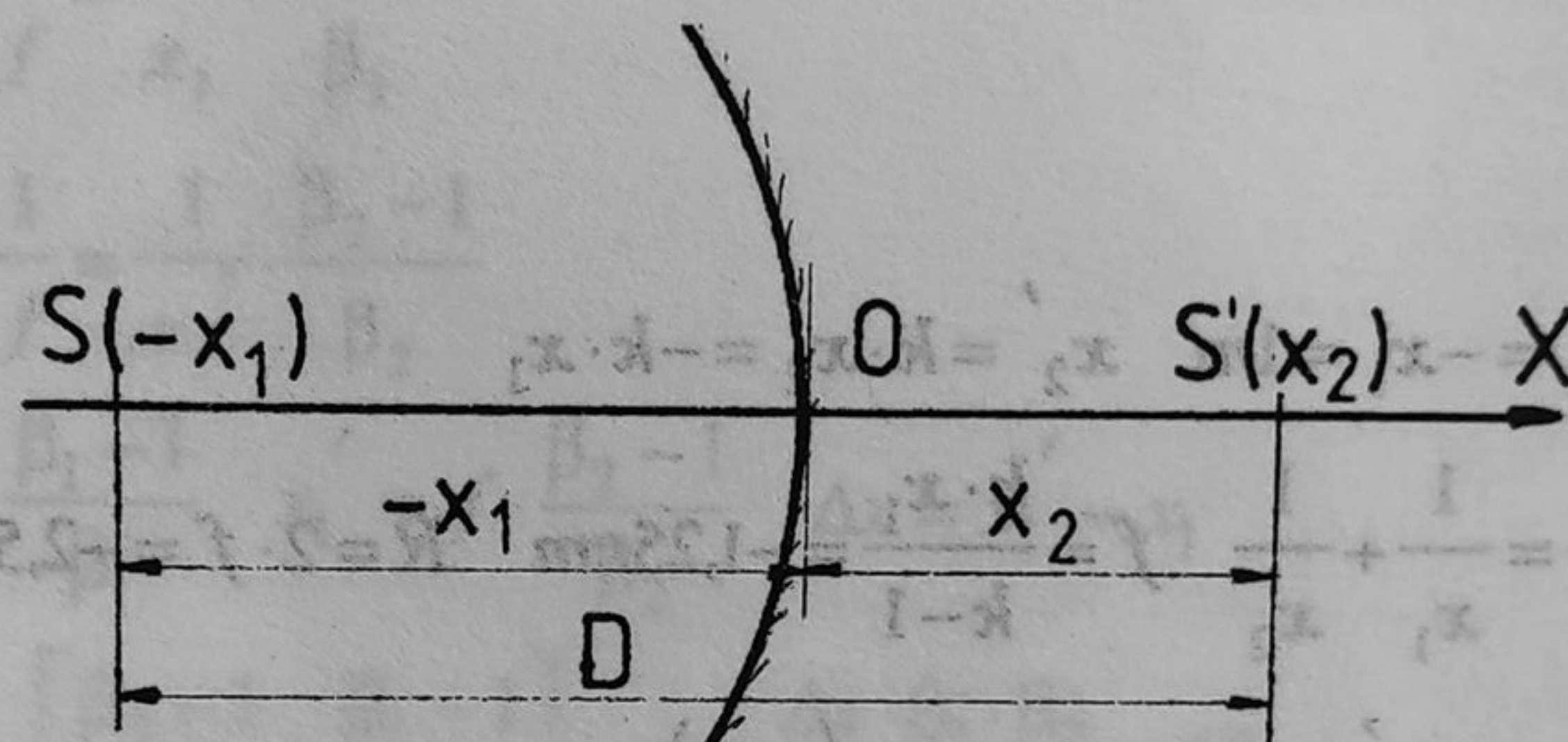


Fig. 76

Datele problemei:

$$x_2 = 75 \text{ cm}$$

$$D = 180 \text{ cm}$$

$$f = ?$$

$$D = -x_1 + x_2 \quad x_1 = x_2 - D = -105 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{-105} + \frac{1}{75} \quad f = \frac{15 \cdot 105}{6} = 262,5 \text{ cm}$$

Oglinda este convexă căci focarul cade în zona imaginii.



6. La ce distanță de oglindă se formează imaginea unui obiect așezat la 35 cm de o oglindă cu raza de 50 cm?

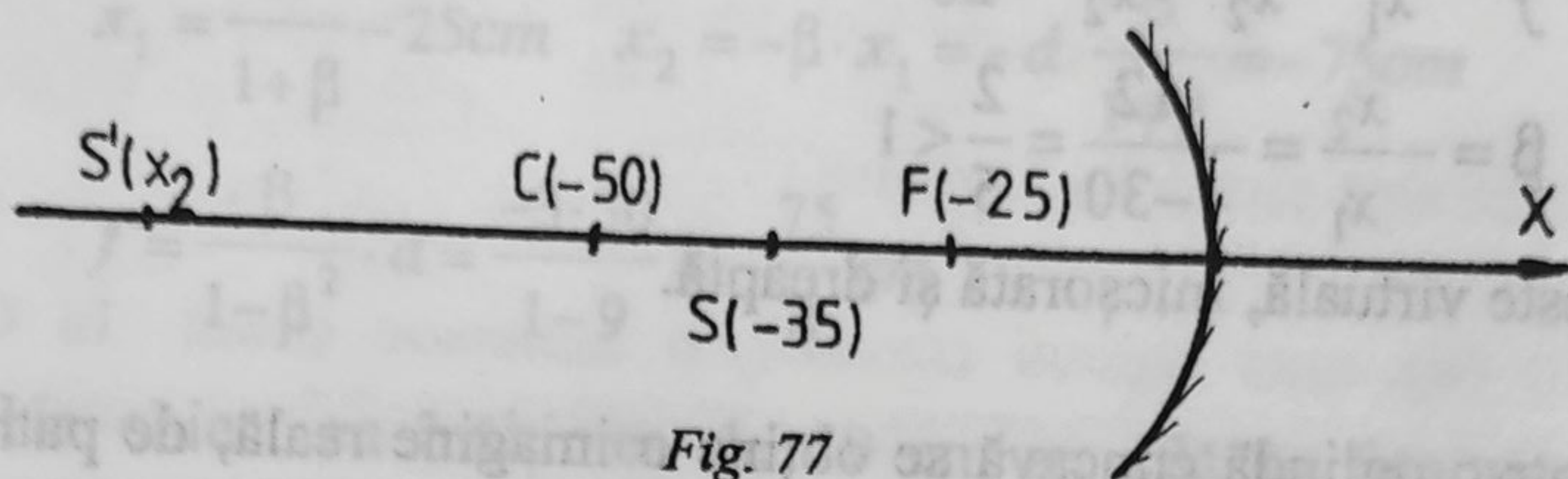


Fig. 77

Datele problemei:

$$x_1 = -35\text{cm} \quad R = -50\text{cm}$$

$$x_2 = ?$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{R} \quad \frac{1}{x_2} = \frac{2}{R} - \frac{1}{x_1} = \frac{2}{-50} - \frac{1}{-35} \quad x_2 = -87,5\text{cm}$$

7. În fața unei oglinzi concave cu distanța focală de 20 cm, se așează un obiect la 25 cm. Să se găsească distanța la care se formează imaginea, tipul imaginii și mărirea ei liniară.

Datele problemei:

$$f = -20\text{cm} \quad x_1 = -25\text{cm}$$

$$x_2 = ? \quad \beta = ?$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \quad \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x_1} = -\frac{1}{20} - \frac{1}{-25} \quad x_2 = -100\text{cm}$$

$$\beta = -\frac{x_2}{x_1} = -\frac{100}{25} = -4$$

8. În fața unei oglinzi convexe, cu distanța focală de 20 cm, se așează un obiect la 30 cm de oglindă. Să se determine la ce distanță se formează imaginea, mărirea liniară precum și raza de curbură.

Datele problemei:

$$f = +20\text{cm} \quad x_1 = -30\text{cm}$$

$$x_2 = ? \quad R = ? \quad \beta = ?$$



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \quad \frac{1}{x_2} = \frac{5}{20} \quad x_2 = 12\text{cm} \quad R = 2 \cdot f = 40\text{cm}$$

$$\beta = -\frac{x_2}{x_1} = -\frac{12}{-30} = \frac{2}{5} < 1$$

Imaginea este virtuală, micșorată și dreaptă.

9. Într-o oglindă concavă se obține o imagine reală, de patru ori mai mică decât obiectul știind că distanța dintre obiect și imagine este de 30 cm să se determine poziția obiectului și a imaginii, distanța focală și raza de curbură. (Vezi fig. 66).

Datele problemei:

$$\beta = -\frac{1}{4} \quad d = 30\text{cm}$$

$$x_1 = ? \quad R = ?$$

$$x_2 = ? \quad f = ?$$

$$\beta = -\frac{x_2}{x_1} \quad d - x_2 = -x_1 \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \quad x_2 = -\beta \cdot x_1$$

$$x_2 - x_1 = d \quad -\beta \cdot x_1 - x_1 = d \quad x_1 = -\frac{d}{\beta + 1} = -40\text{cm}$$

$$x_2 = \frac{d}{\beta + 1} = -10\text{cm} \quad \frac{1}{f} = -\frac{\beta + 1}{d} + \frac{\beta + 1}{\beta \cdot d} = \frac{1 - \beta^2}{\beta \cdot d}$$

$$f = \frac{\beta \cdot d}{1 - \beta^2} = 8\text{cm} \quad R = 2 \cdot f = 16\text{cm}$$

10. O lumânare se află în fața unui ecran la distanța de 50 cm. Cum trebuie așezată o oglindă concavă și ce distanța focală trebuie să aibă ca să se obțină o imagine reală de trei ori mai mare. (Vezi fig. 68).

Datele problemei:

$$d = 50\text{cm} \quad \beta = 3$$

$$f = ?$$

$$-x_2 = d - x_1 \quad x_2 = x_1 - d \quad \beta = -\frac{x_2}{x_1}$$



$$x_2 = -\beta \cdot x_1 \quad -\beta \cdot x_1 = x_1 - d \quad x_1 \cdot (1 + \beta) = d$$

$$x_1 = \frac{d}{1 + \beta} = 25 \text{ cm} \quad x_2 = -\beta \cdot x_1 = -d \cdot \frac{\beta}{1 + \beta} = -75 \text{ cm}$$

$$f = \frac{\beta}{1 - \beta^2} \cdot d = \frac{-3 \cdot 50}{1 - 9} = -\frac{75}{4} \text{ cm}$$

11. Un obiect cu înălțimea de 10 cm se află în fața unei oglinzi concave cu raza de 50 cm, la distanța de 40 cm de oglindă.

a) Să se determine mărimea imaginii și distanța acesteia față de oglindă;

b) Să se calculeze distanța imaginii la oglindă și mărirea liniară produsă de o oglindă convexă de aceeași rază.

Datele problemei:

$$y_1 = 10 \text{ cm} \quad R = -50 \text{ cm}$$

$$x_1 = -40 \text{ cm}$$

$$a) x_2 = ? \quad y_2 = ?$$

$$b) R = +50 \text{ cm} \quad y_1 = 10 \text{ cm}$$

$$x_2' = ? \quad y_2' = ?$$

Deoarece distanța obiect-oglină este mai mare decât distanța focală  $f$  putem scrie: (vezi fig. 66). Deoarece distanța obiectului este mai mare decât distanța focală:

$$a) \frac{2}{R} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \quad \frac{1}{x_2} = \frac{2}{R} - \frac{1}{x_1} = -\frac{3}{200}$$

$$x_2 = -\frac{200}{3} \text{ cm} \quad \beta = -\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} \quad y_2 = -y_1 \cdot \frac{x_2}{x_1}$$

$$y_2 = -10 \cdot \frac{-200}{-40} = -\frac{50}{3} = -16,6 \text{ cm}$$

Imaginea este mărită și răsturnată.

$$b) \frac{1}{x_2'} = \frac{2}{R} - \frac{1}{x_1} = \frac{13}{200} \quad x_2' = \frac{200}{13} \text{ cm}$$



$$y_2' = -y_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} = -10 \cdot \frac{13}{-40} \approx 4 \text{ cm}$$

Imaginea este virtuală și dreaptă.

12. În fața unei oglinzi concave, o lumânare aflată la 45 cm se deplasează cu 6 cm spre oglindă. Atunci imaginea sa se depărtează cu 20 cm.

- Să se calculeze distanța focală a oglinzii;
- Cu cât s-ar deplasa imaginea într-o oglindă convexă cu distanța focală calculată la punctul a).

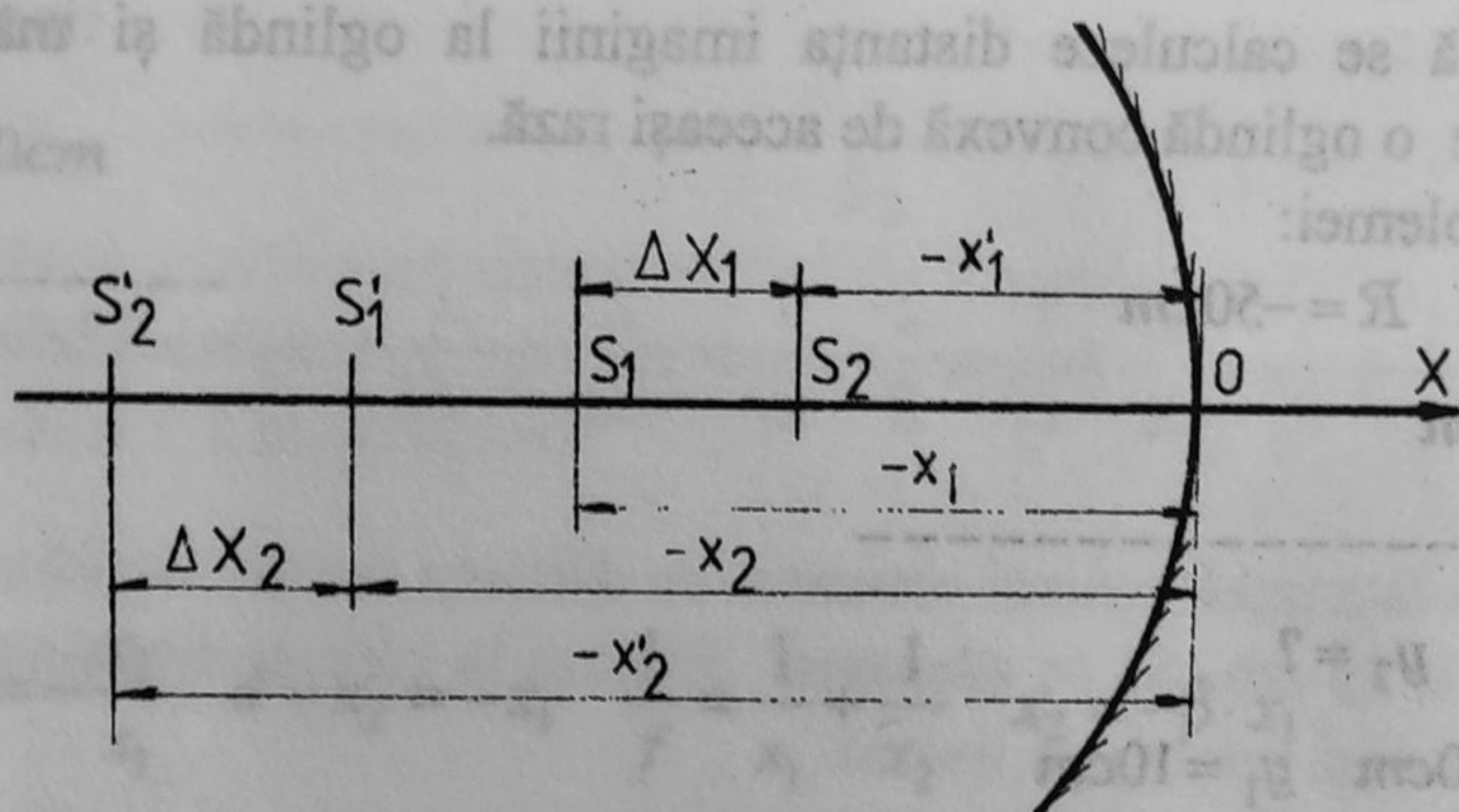


Fig. 78

Datele problemei:

$$x_1 = -45 \text{ cm} \quad \Delta x_1 = 6 \text{ cm}$$

$$\Delta x_2 = 20 \text{ cm}$$

$$a) f = ?$$

$$b) \Delta x_2' = ?$$

Folosim indicele ' pentru a doua poziție:

$$-x_1 = \Delta x_1 - x_1' \quad -x_2 = \Delta x_2 - x_2'$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f} \quad \frac{1}{x_1'} + \frac{1}{x_2'} = \frac{1}{f}$$

$$a) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_2 + \Delta x_1} + \frac{1}{x_2 - \Delta x_2}$$



$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_2 - \Delta x_2} = \frac{1}{x_1 + \Delta x_1} - \frac{1}{x_1}$$

$$\frac{-\Delta x_2}{x_2 \cdot (x_2 - \Delta x_2)} = \frac{-\Delta x_1}{x_1 \cdot (x_1 + \Delta x_1)}$$

$$x_2 \cdot (x_2 - \Delta x_2) = \frac{\Delta x_2 \cdot x_1 \cdot (x_1 + \Delta x_1)}{\Delta x_1}$$

$$x_2^2 - 20 \cdot x_2 - 5850 = 0 \quad (x_2)_1 = ++87,13 \text{ cm}$$

prima soluție nu este acceptabilă.

$$(x_2)_2 = -67,13 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{-45} + \frac{1}{-67} = \frac{-112}{3015} \quad f_1 = -26,9 \text{ cm}$$

$$b) \frac{1}{f} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \quad x_2 = x_1 \cdot \frac{f}{x_1 - f} \quad \frac{1}{x_1'} + \frac{1}{x_2'} = \frac{1}{f} \quad f > 0$$

$$\text{din } -x_1' + \Delta x_1 = -x_1 \quad x_1' = \Delta x_1 + x_1 \quad x_2' = x_2 + \Delta x_2'$$

$$\frac{1}{x_1 + \Delta x_1} + \frac{1}{\frac{f \cdot x_1}{x_1 - f} + \Delta x_2'} = \frac{1}{f} \quad \frac{1}{\frac{x_1 \cdot f}{x_1 - f} + \Delta x_2'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x_1 + \Delta x_1}$$

$$\frac{1}{\Delta x_2' + \frac{x_1 \cdot f}{x_1 - f}} = \frac{x_1 + \Delta x_1 - f}{f \cdot (x_1 + \Delta x_1)} \quad \Delta x_2' + \frac{x_1 \cdot f}{x_1 - f} = \frac{f \cdot (x_1 + \Delta x_1)}{x_1 + \Delta x_1 - f}$$

$$\Delta x_2' = f \cdot \left[ \frac{x_1 + \Delta x_1}{x_1 + \Delta x_1 - f} - \frac{x_1}{x_1 - f} \right]$$

$$\Delta x_2' = f \cdot \frac{(x_1 + \Delta x_1) \cdot (x_1 - f) - x_1 \cdot (x_1 + \Delta x_1 - f)}{(x_1 - f) \cdot (x_1 + \Delta x_1 - f)}$$

$$\Delta x_2' = -f^2 \cdot \frac{\Delta x_1}{(x_1 - f) \cdot (x_1 + \Delta x_1 - f)} \quad f \approx +27$$

$$\text{Oglinda este convexa} \quad \Delta x_2' = -\frac{4374}{(-72) \cdot (-66)} = -0,92 \text{ cm}$$



13. În fața unei oglinzi concave cu raza de 40 cm, se așează un triunghi dreptunghic isoscel cu latura de 10 cm cu unghiul drept spre oglindă la 50 cm cu o catetă așezată pe axa optică principală. Să se calculeze la ce distanță de oglindă se vor găsi imaginile celor trei vârfuri și care sunt lungimile laturilor din imagine.

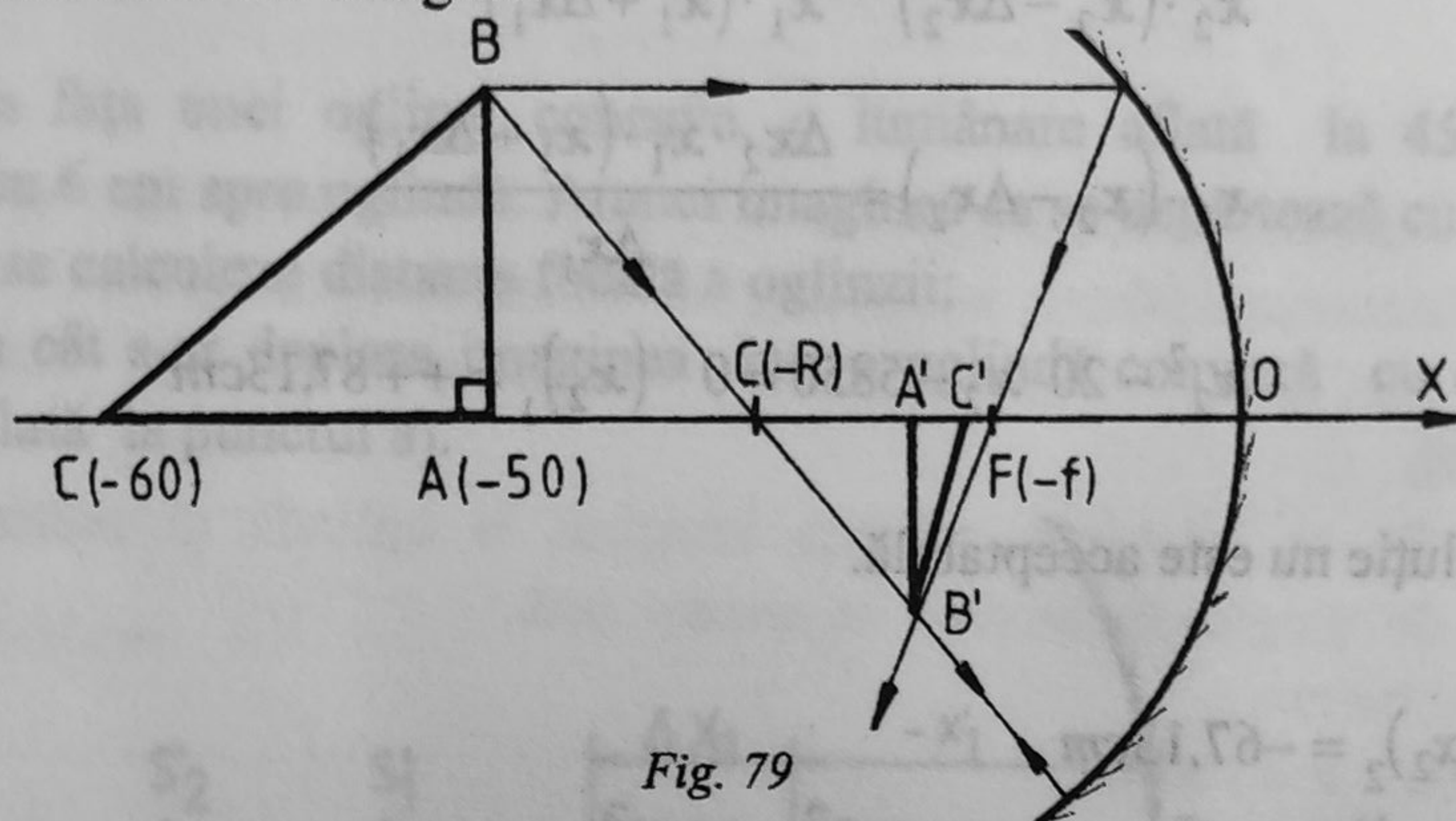


Fig. 79

Datele problemei :

$$R = 40\text{cm} \quad A = 90^\circ \quad l = 10\text{cm}$$

$$x_{1A} = -50\text{cm} \quad x_{1C} = -60\text{cm}$$

$$x_{2A} = ?$$

$$f = \frac{R}{2} = -20\text{cm} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{x_{1A}} + \frac{1}{x_{2A}} \quad \frac{1}{x_{2A}} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x_{1A}} = -\frac{30}{100}\text{cm}^{-1}$$

$$(AB) \quad x_{2A} = -\frac{100}{3}\text{cm} = -33,3\text{cm} \quad \beta = -\frac{x_{2A}}{x_{1A}} = \frac{33,3}{-50} = -0,6$$

$$\beta = \frac{y_2}{y_1} \quad y_2 = A'B' = \beta \cdot y_1 = -0,6 \cdot 10\text{cm} = -6\text{cm}$$

$$(AC) \quad x_{1C} = -60\text{cm} \quad \text{prin construcție}$$

$$\frac{1}{x_{2C}} = -\frac{1}{20} + \frac{1}{60} = -\frac{2}{60} \quad x_{2C} = -30\text{cm}$$

$$A'C' = x_{2A} - x_{2C} = -33,3 - (-30) = -3,3\text{cm}$$

$$(BC) \quad B'C' = \sqrt{A'C'^2 + A'B'^2} = \sqrt{46} = 6,78\text{cm}$$

$$BC = 15 \cdot \sqrt{2} = 21\text{cm} \quad \frac{BC}{B'C'} = \frac{21}{7} = 3 \text{ ori}$$

Deci ipotenuza s-a micșorat de trei ori.



14. Să se completeze cu traseele razelor de lumina și să se așeze oglinda concavă în așa fel încât următoarele poziții să aibă sens. Notăm cu A obiectul și cu B imaginea sa, să se justifice construcțiile.

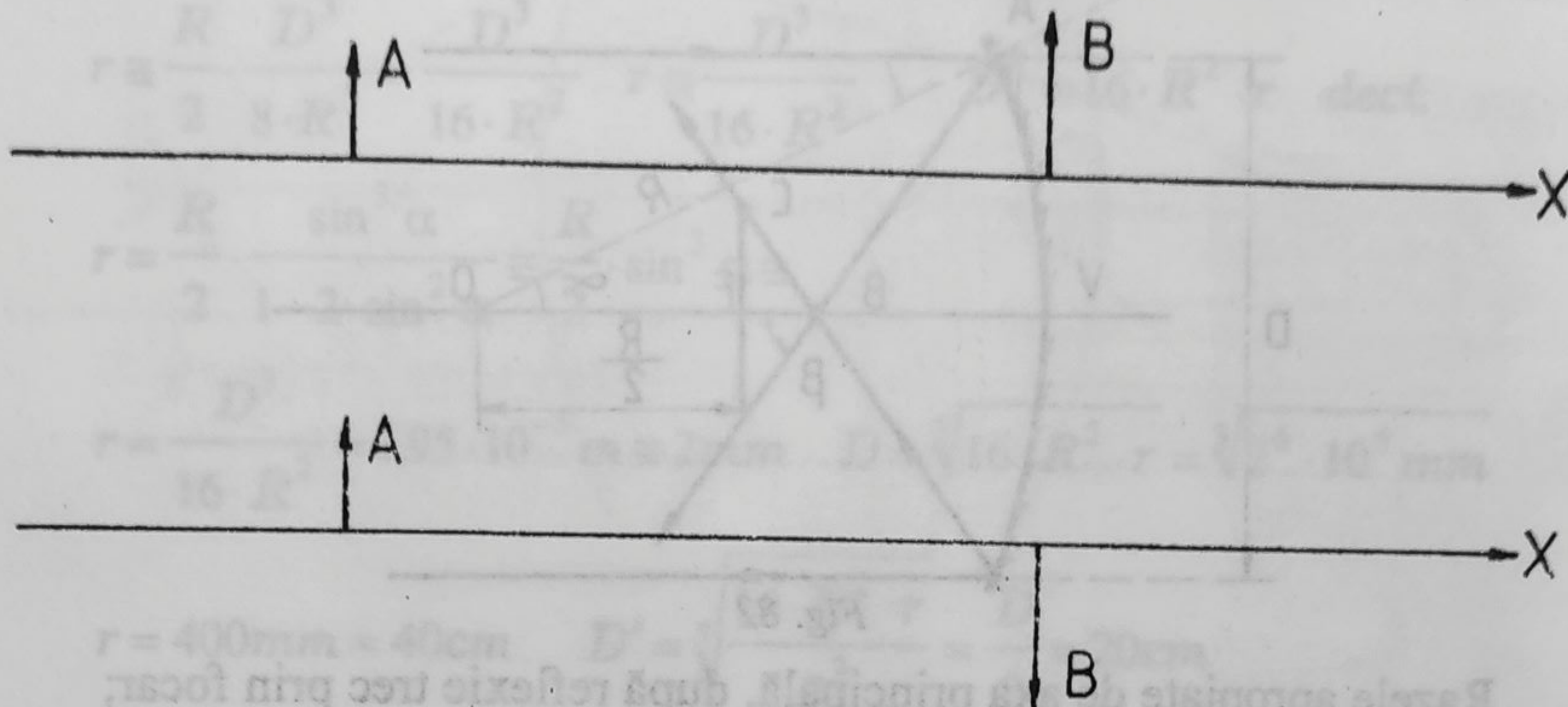


Fig. 80

15. Într-un telescop este pusă o oglindă sferică al cărui diametru transversal este egal cu  $D = 0,5$  m și raza de curbură  $R = 2$  m. În focarul principal al oglinzii (punctul F în figură) este situat un receptor de radiație sub forma unui disc circular. Discul este situat perpendicular pe axa optică a oglinzii.

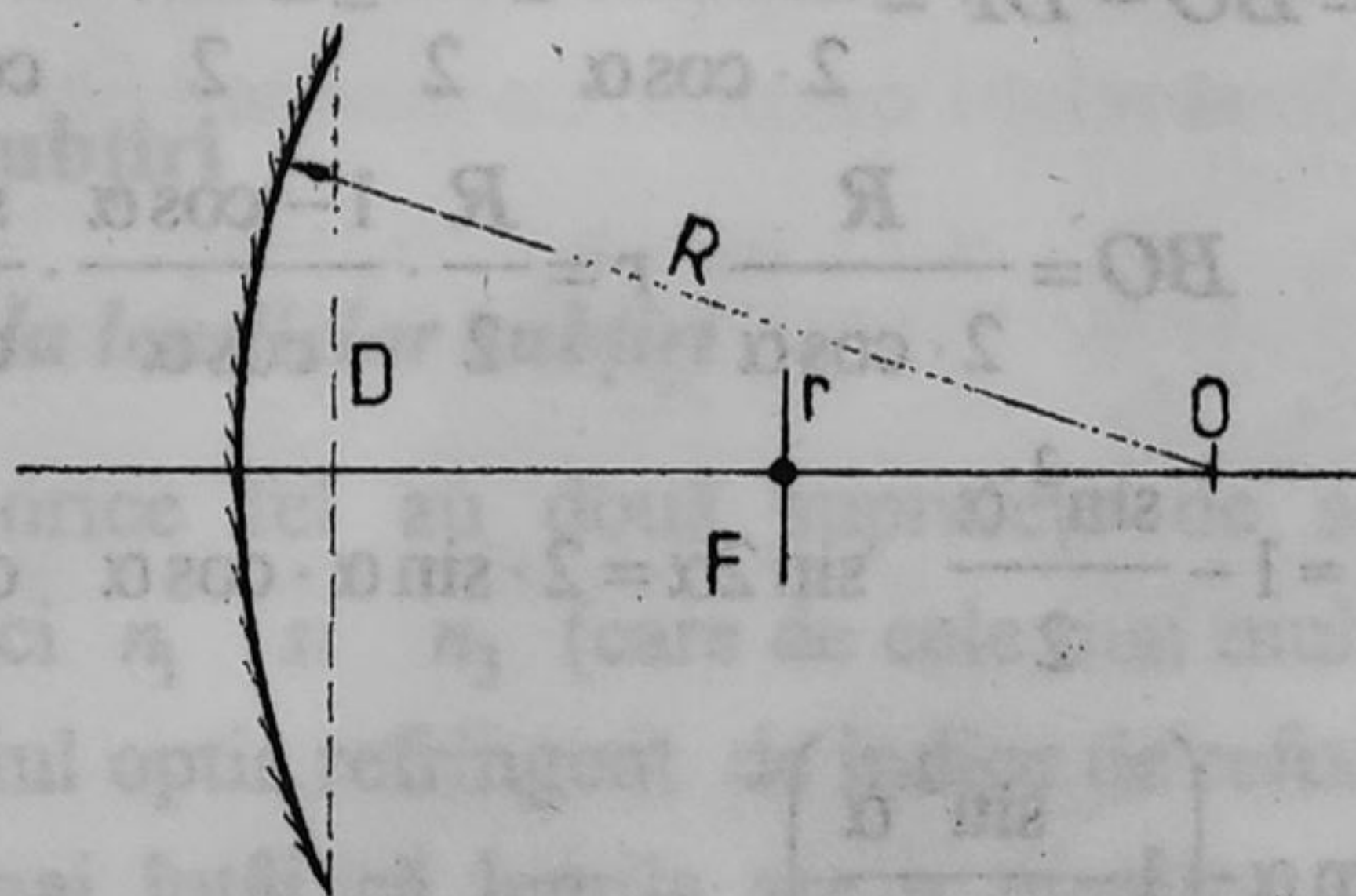


Fig. 81

a) Cât de mare trebuie să fie raza receptorului pentru ca să poată primi tot fluxul de radiație, reflectat de oglindă?

b) De câte ori se micșorează fascicolul de radiație obținut de receptor dacă dimensiunile lui se micșorează de 8 ori?

Indicație: 1. Pentru calculul micilor valori ale lui  $\alpha$  se poate lua:

$$\sqrt{1-\alpha} \approx 1 - \frac{\alpha}{2}$$



2. Nu se ia în considerație difracția. (Olimpiada internațională - 1970 ex-URSS).

Rezolvare: În figura de mai jos se prezintă mersul razelor de lumină.

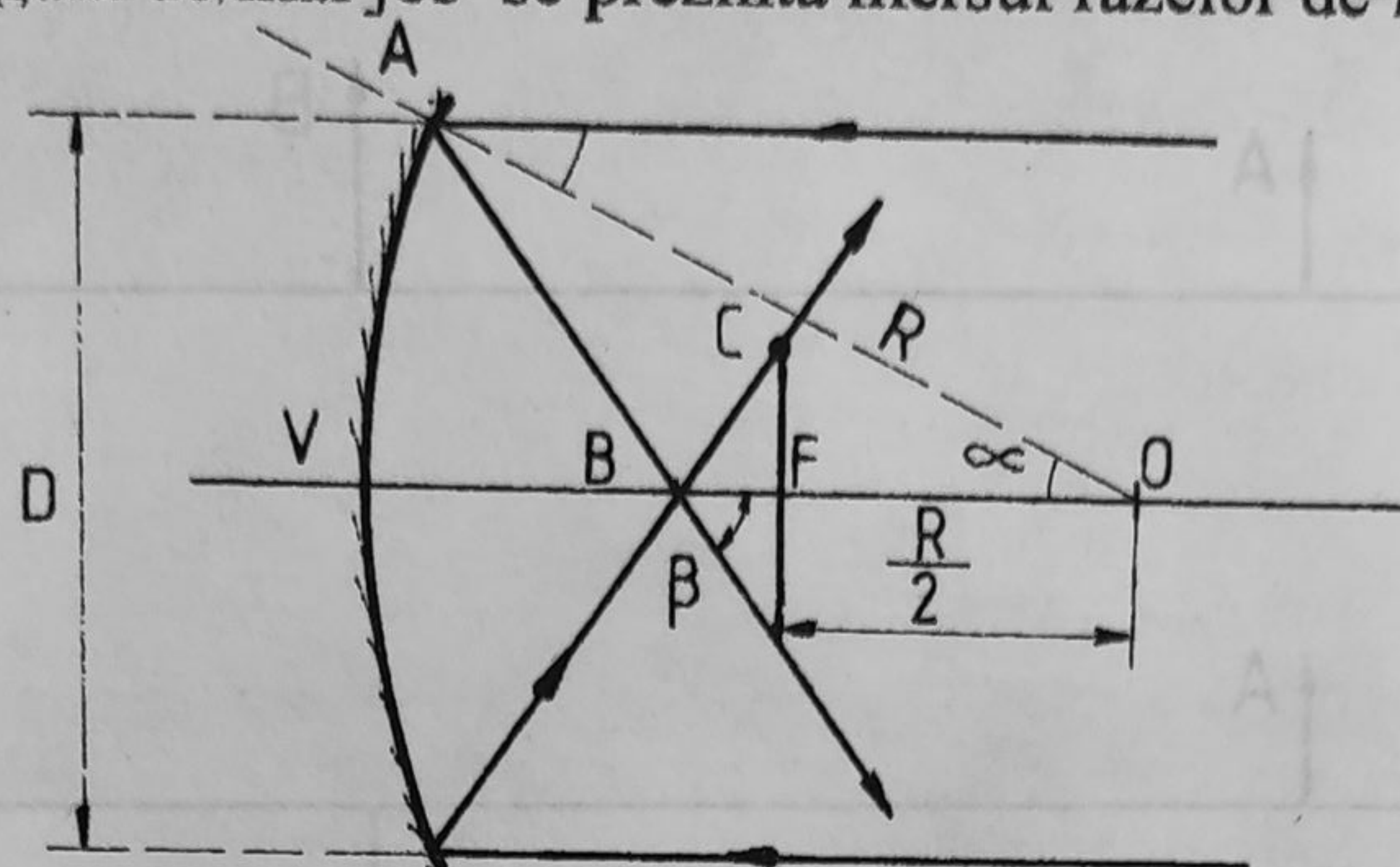


Fig. 82

Razele apropiate de axa principală, după reflexie trec prin focar;

Razele de la marginea oglinzii, conform legilor de reflexie locală, trec după reflexie prin B.

Triunghiul BOA este isoscel  $BA = BO$  (dar diferit de  $R/2$ ) cu B situat între V și F.

$$AB + BO > OA \quad BO > \frac{R}{2} \quad CF = r = BF \cdot \operatorname{tg} 2\alpha$$

$\alpha$  este unghiul maxim de incidență pe oglindă.

$$\sin \alpha = \frac{D}{2 \cdot R} \quad BF = BO - DF = \frac{R}{2 \cdot \cos \alpha} - \frac{R}{2} = -\frac{R}{2} \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha}$$

$$2 \cdot BO \cdot \cos \alpha = R \quad BO = \frac{R}{2 \cdot \cos \alpha} \quad r = \frac{R}{2} \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \approx 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{2} \quad \sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad \cos 2\alpha = 1 - 2 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$r = \frac{R}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \cdot \sin \alpha \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{2}\right)}{\left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{2}\right) \cdot (1 - 2 \cdot \sin^2 \alpha)} =$$

$$= \frac{R}{2} \cdot \frac{\sin^3 \alpha - \frac{\sin^4 \alpha}{2}}{1 - 2 \cdot \sin^2 \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{2} + 2 \cdot \sin^4 \alpha} = \frac{R}{2} \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{1 - \frac{5}{2} \cdot \sin^2 \alpha}$$



$$r \equiv \frac{R}{2} \cdot \sin^3 \alpha \quad R = \frac{D}{2 \cdot \sin \alpha} \quad \sin \alpha = \frac{D}{2 \cdot R}$$

$$r \equiv \frac{R}{2} \cdot \frac{D^3}{8 \cdot R^3} = \frac{D^3}{16 \cdot R^2} \quad r \equiv \frac{D^3}{16 \cdot R^2} \quad D^3 = 16 \cdot R^2 \cdot r \quad \text{deci:}$$

$$r = \frac{R}{2} \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{1 - 2 \cdot \sin^2 \alpha} \equiv \frac{R}{2} \cdot \sin^3 \alpha \equiv$$

$$r = \frac{D^3}{16 \cdot R^2} = 1,95 \cdot 10^{-3} \text{ m} \equiv 2 \text{ mm} \quad D = \sqrt[3]{16 \cdot R^2 \cdot r} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 10^6} \text{ mm}$$

$$r = 400 \text{ mm} = 40 \text{ cm} \quad D' = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot R^2 \cdot r}{2^3}} = \frac{D}{2} = 20 \text{ cm}$$

Se vede că dacă raza receptorului  $r$  se micșorează de 8 ori, atunci diametrul transversal pe care cade lumina  $D'$  se micșorează de 2 ori și deci suprafața de lucru a receptorului  $r$  se micșorează de 4 ori. De același număr de ori se micșorează fluxul de radiație ce cade pe oglindă și primit de receptor  $\Phi \approx S$ .

### 3.5. Lentile subțiri

#### 3.5.1. Formula lentilelor subțiri

Lentilele de orice fel au două suprafețe de separație cu mediul înconjurător de indici  $n_1$  și  $n_3$  (care de cele mai multe ori sunt egali), în care se găsește mediul optic refringent de indice de refracție  $n_2$ .

Presupunem mai întâi că lentila are o grosime diferită de zero dar finită  $l$  pentru ca să ne imaginăm mai ușor cum se formează imaginea din primul dioptru. Apoi vom face ca această diferență să tindă la zero în relațiile obținute ( $l \rightarrow 0$ ).

Formula obținută se va numi din acest motiv, formula lentilelor subțiri, care este adevărată numai pentru lentilele la care distanța  $l$  să fie neglijabilă față de distanțele obiect - imagine, raze de curbură.

Fie un punct obiect care formează în primul dioptru o imagine virtuală așa cum se vede în figură.



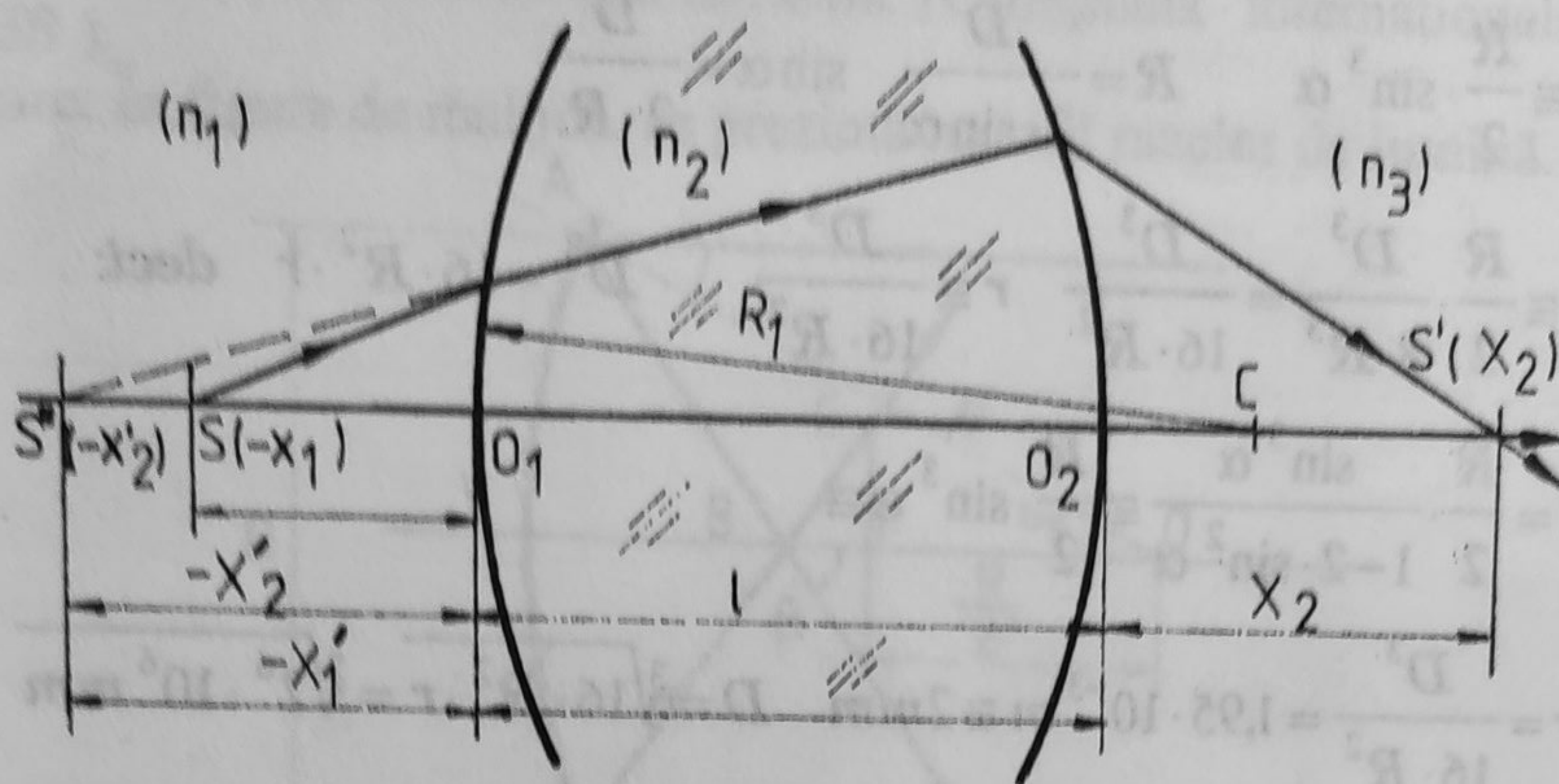


Fig. 83

La trecerea prin primul dioptru raza de lumină crează o imagine  $S''$  care constituie obiect real pentru dioptrul al doilea de la care se obține în final imaginea  $S'$ .

$$\text{I dioptru} \quad \frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} \quad -x_1 = -x_2' + l \quad x_1' = x_2' - l$$

$$\text{II dioptru} \quad \frac{n_3}{x_2'} - \frac{n_2}{x_1'} = \frac{n_3 - n_2}{R_2}$$

Adunând cele două relații membru cu membru obținem:

$$\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} + \frac{n_3}{x_2'} - \frac{n_2}{x_1'} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} + \frac{n_3 - n_2}{R_2}$$

pentru  $l \rightarrow 0$  (lentile subtiri) avem  $x_1' = x_2'$

$$\frac{n_3}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} + \frac{n_3 - n_2}{R_2}$$

### 3.5.2. Convenția de semne pentru distanțe

Se aplică aceeași convenție de semne ca și la dioptrul sferic însă aici se alege ca origine punctul de intersecție dintre axa optică principală și axa de simetrie transversală, numit centrul optic al lentilei.

Toate distanțele măsurate în lungul unei axe optice în sensul propagării luminii se vor considera pozitive și se vor înlocui în formule cu numere pozitive, iar cele îndreptate în sens invers vor fi negative.



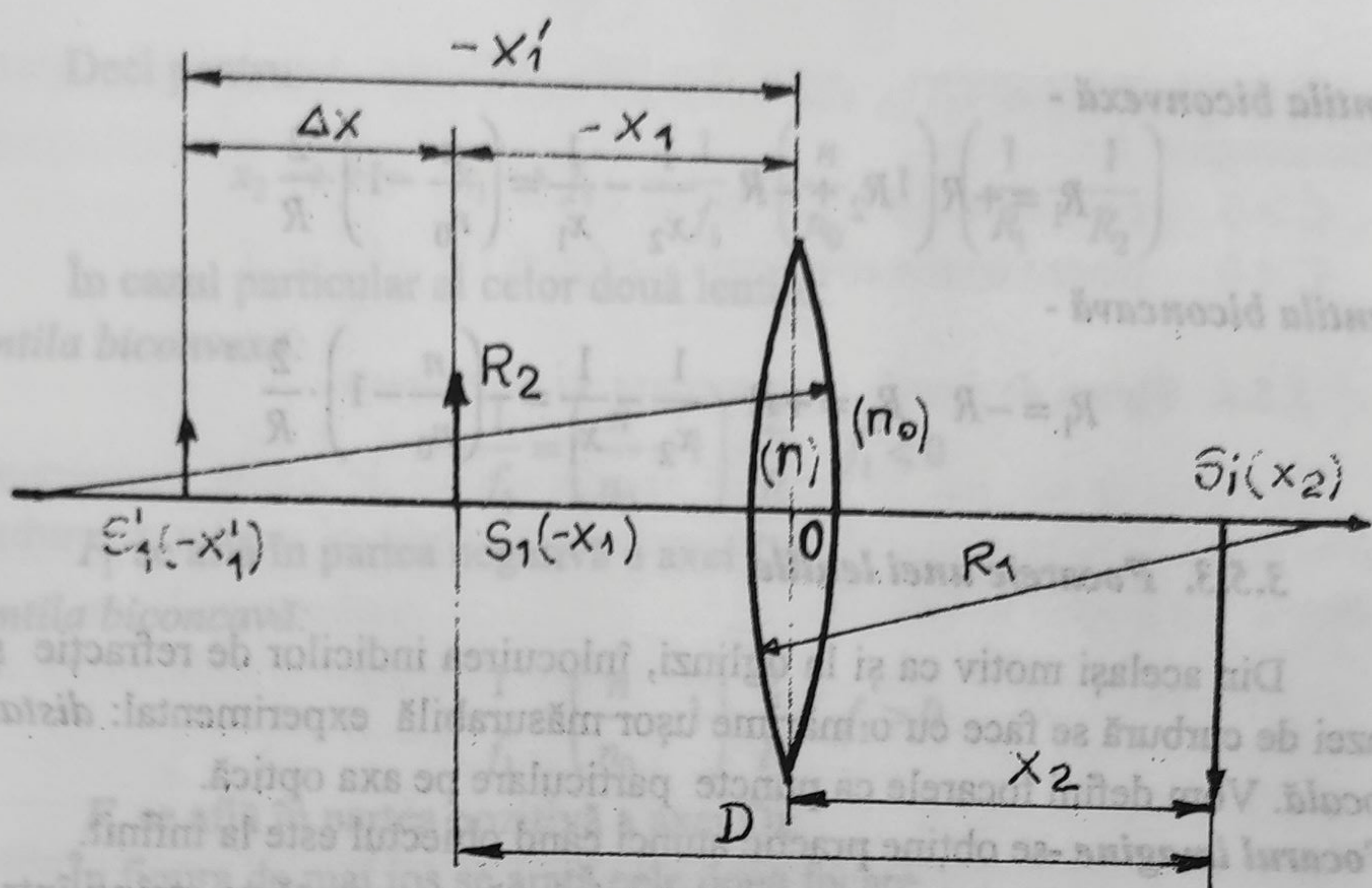


Fig. 84

Lentila de indice  $n$  cufundată în mediul de indice  $n_0$

$$n_1 = n_3 = n_0 \quad \text{iar} \quad n_2 = n \quad \frac{n_0}{x_2} - \frac{n_0}{x_1} = \frac{n - n_0}{R_1} + \frac{n_0 - n}{R_2}$$

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{n - n_0}{n_0} \cdot \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_x} = \left( \frac{n}{n_0} - 1 \right) \cdot \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

în aer  $n_0 = 1$

Distanțele geometrice dintre două puncte, de tipul  $d = x_2 - x_1$ , nu li se atribuie semne algebrice, sunt totdeauna pozitive. Pe desen figurează numai mărimi pozitive. Distanțele se vor măsura față de centrul optic al lentilei.

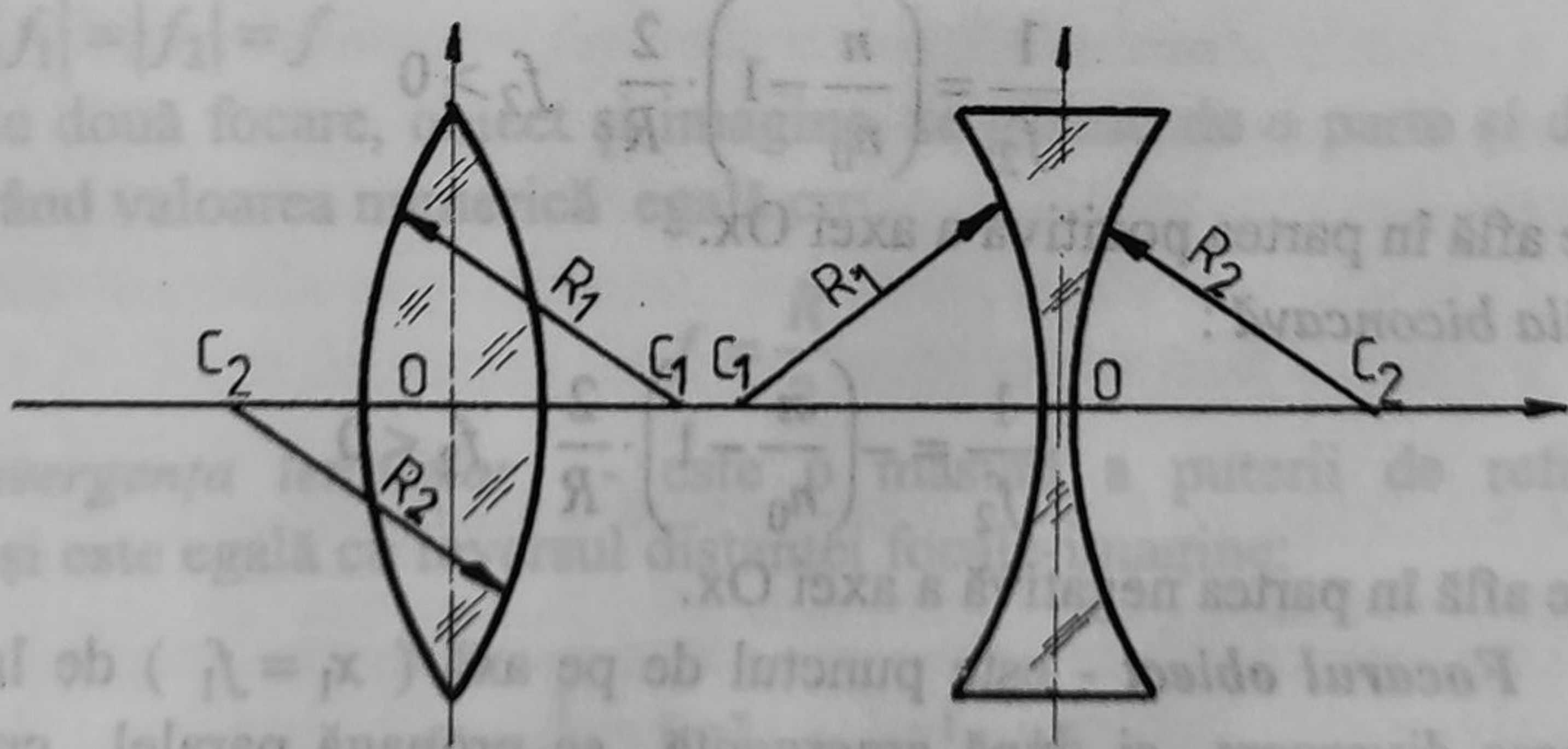


Fig. 85



### **Lentila biconvexă -**

$$R_1 = +R \quad R_2 = -R \quad \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \left( \frac{n}{n_0} - 1 \right) \cdot \frac{2}{R}$$

### **Lentila biconcavă -**

$$R_1 = -R \quad R_2 = +R \quad \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = - \left( \frac{n}{n_0} - 1 \right) \cdot \frac{2}{R}$$

### **3.5.3. Focarele unei lentile**

Din același motiv ca și la oglinzi, înlocuirea indicilor de refracție și a razei de curbură se face cu o mărime ușor măsurabilă experimental: *distanța focală*. Vom defini focarele ca puncte particulare pe axa optică.

**Focarul imagine** -se obține practic atunci când obiectul este la infinit.

Razele vin paralel cu axa optică și după emergență se strâng într-un punct (lentila convergentă) sau prelungirile lor converg într-un punct (lentila divergentă) numit focar imagine:

$$x_1 \rightarrow -\infty \quad x_2 \rightarrow f_2$$

$$\frac{1}{x_2} = \left( \frac{n}{n_0} - 1 \right) \cdot \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\frac{1}{f_2} = \left( \frac{n}{n_0} - 1 \right) \cdot \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

În particular distanța la focarul imagine pentru lentila biconvexă și lentila biconcavă se obține din relațiile:

**Lentila biconvexă:**

$$\frac{1}{f_2} = \left( \frac{n}{n_0} - 1 \right) \cdot \frac{2}{R} \quad f_2 > 0$$

$F_2$  se află în partea pozitivă a axei Ox.

**Lentila biconcavă :**

$$\frac{1}{f_2} = - \left( \frac{n}{n_0} - 1 \right) \cdot \frac{2}{R} \quad f_2 < 0$$

$F_2$  se află în partea negativă a axei Ox.

**Focarul obiect** - este punctul de pe axă ( $x_1 = f_1$ ) de la care razele pornesc divergent și după emergență se propagă paralel cu axa optică, imaginea fiind situată la infinit.



Deci pentru:

$$x_2 \rightarrow +\infty \quad x_1 \rightarrow f_1 \quad -\frac{1}{f_1} = \left( \frac{n}{n_0} - 1 \right) \cdot \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

În cazul particular al celor două lentile:

*Lentila biconvexă:*

$$-\frac{1}{f_1} = \left( \frac{n}{n_0} - 1 \right) \cdot \frac{2}{R} \quad f_1 < 0$$

$F_1$  se află în partea negativă a axei Ox.

*Lentila biconcavă:*

$$+\frac{1}{f_1} = \left( \frac{n}{n_0} - 1 \right) \cdot \frac{2}{R} \quad f_1 > 0$$

$F_1$  se află în partea pozitivă a axei Ox.

În figura de mai jos se arată cele două focare.

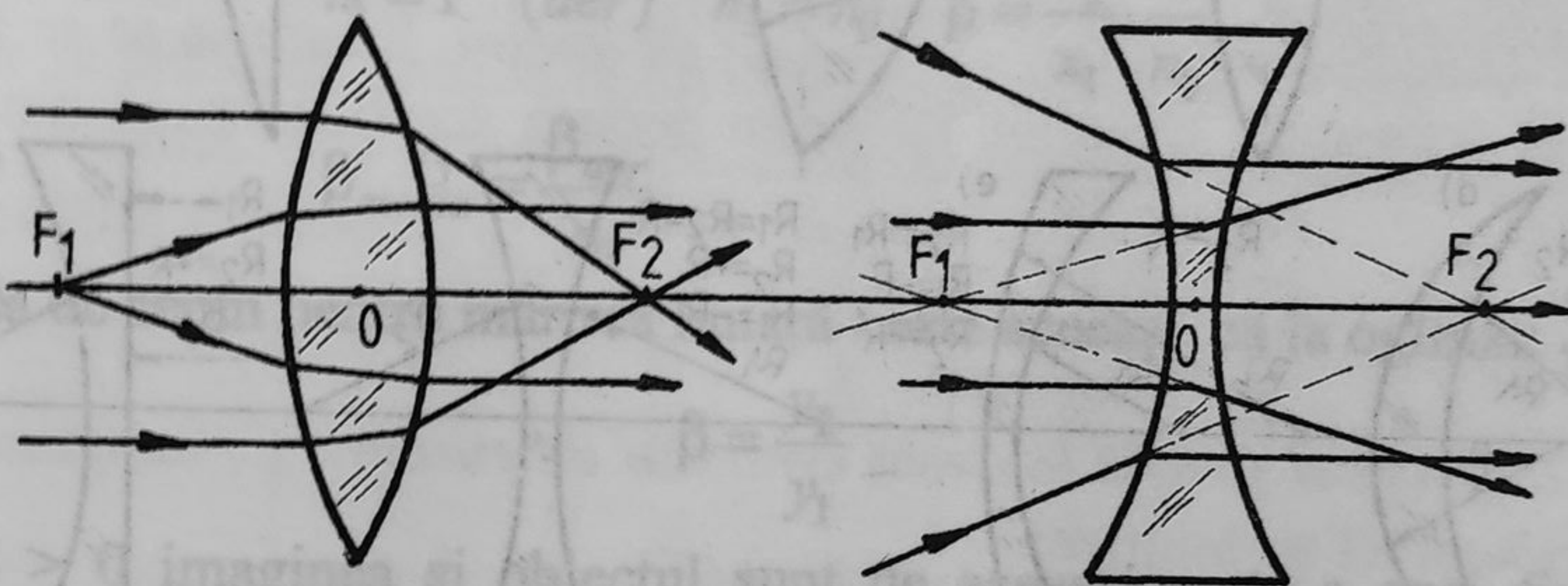


Fig.86

Comparând distanțele focale ale lentilelor simetrice (biconvexe, biconcave) se observă că distanțele lor focale sunt egale în valoare absolută:  $|f_1| = |f_2| = f$

Cele două focare, obiect și imagine, se găsesc de o parte și de alta a lentilei având valoarea numerică egală cu:

$$f = \frac{R}{2}$$

*Convergența lentilelor* - este o măsură a puterii de refracție a lentilelor și este egală cu inversul distanței focale-imagine:

$$C = \frac{1}{f_2} \quad [C]_{SI} = m^{-1} = \delta$$



**Semnul convergenței** - este dat prin definiție de semnul distanței focale-imagine  $f_2$ :

$C > 0$  pentru lentile convergente ( $f_2 > 0$ )

$C < 0$  pentru lentile divergente ( $f_2 < 0$ ).

### 3.5.4. Tipuri de lentile convergente și divergente

În figura de mai jos se prezintă tipurile simple de lentile, convergente și divergente, la fiecare precizându-se semnul algebric al razelor de curbură cu care se vor înlocui în formule.

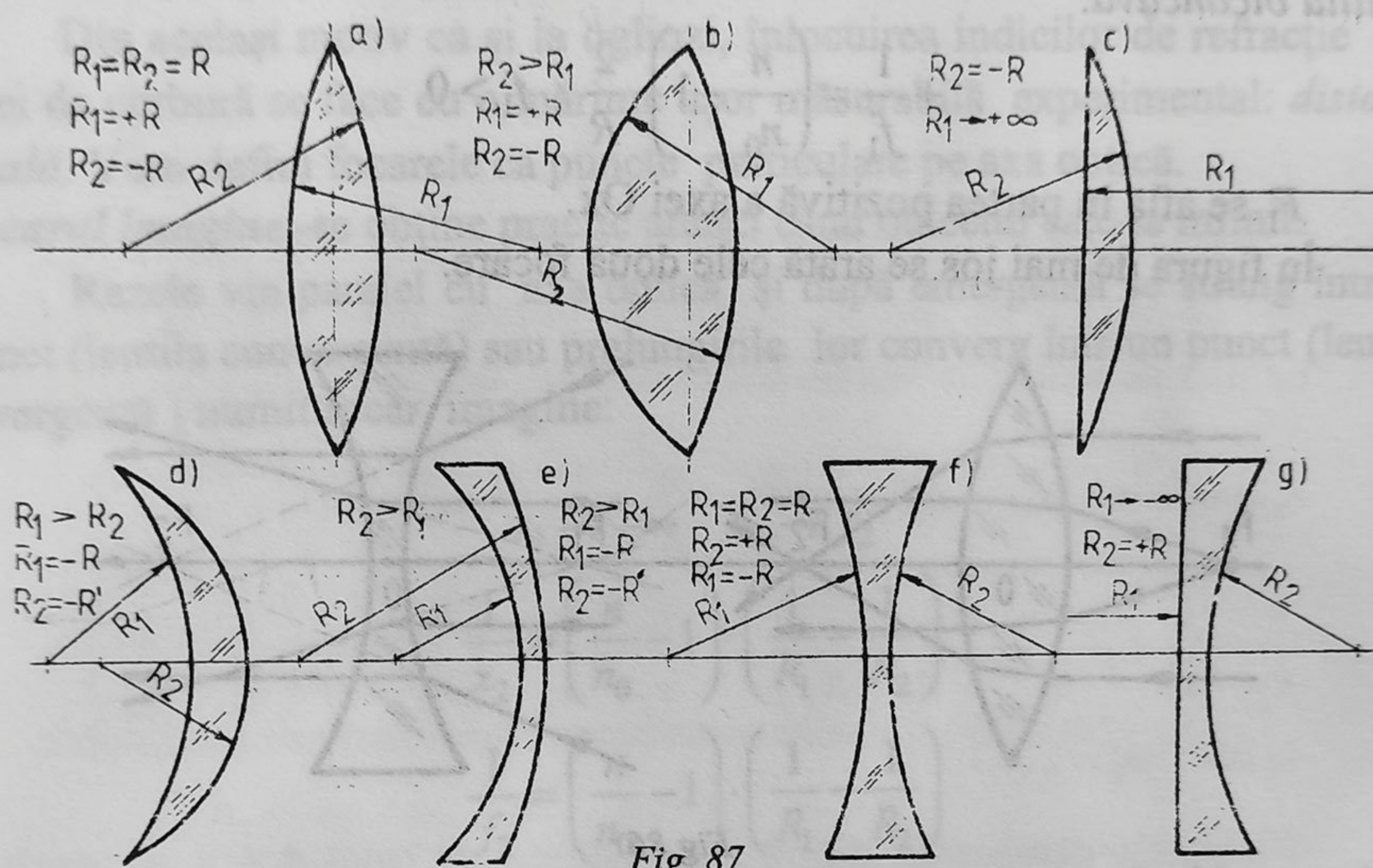


Fig. 87

a - lentilă biconvexă simetrică

b - lentilă biconvexă asimetrică

c - lentilă plan-convexă

d - lentilă menisc-convergent

e - lentilă menisc-divergent

f - lentilă biconcavă simetrică

g - lentilă plan-concavă.

### 3.5.5. Mărirea liniară transversală a lentilelor

Lentilele crează imagini ale căror caracteristici depind esențial de poziția obiectului față de centrul optic (originea O), de centrul de curbură și de focarul său F.



Mărirea liniară transversală a lentilei este egală cu produsul măririlor liniare produse de fiecare dioptru:

$$\beta_1 = \frac{x_2'}{x_1} \cdot \frac{n_1}{n_2} \quad \beta_2 = \frac{x_2'}{x_2} \cdot \frac{n_2}{n_3}$$

$$\beta = \beta_1 \cdot \beta_2 = \frac{x_2'}{x_1} \cdot \frac{x_2'}{x_2} \cdot \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{n_2}{n_3} \quad \beta = \frac{x_2'}{x_1} \cdot \frac{n_1}{n_3}$$

#### Cazuri particulare:

Lentila cufundată în mediul de indice  $n_0$ :

$$n_1 = n_3 = n_0 \quad \beta = \frac{x_2'}{x_1}$$

Lentila cufundată în medii diferite pe cele două fețe:

$$n_1 = 1 \text{ (aer)} \quad n_3 = n_0 \quad \beta = \frac{x_2'}{x_1} \cdot \frac{1}{n_0}$$

$$\beta_{\text{mediu}} = \frac{\beta_{\text{aer}}}{n_3}$$

Convenția de semn pentru mărirea liniară - este aceeași ca la oglinzi:

$$\beta = \frac{y_2'}{y_1}$$

$\beta > 0$  imaginea și obiectul sunt de aceeași parte a axei (imagine virtuală).

$\beta < 0$  imaginea și obiectul sunt inverse (imagine reală).

#### 3.5.6. Tipuri de imagini formate de lentilele convergente

Imaginea unui punct luminos se poate construi cu cel puțin două raze al căror mers prin lentila este cunoscut.

**Regula 1:** Raza de lumină care se propagă paralel cu axa optică după refracție trece prin focar;

**Regula 2:** Raza de lumină care trece prin focar, după refracție se va propaga paralel cu axa optică. Rezultă din principiul reversibilității drumului străbătut de lumină.

**Regula 3:** Raza de lumină care trece prin centrul optic al lentilei (originea O) nu este deviată de la direcția inițială.



Acest fapt rezultă din legea refracției aplicată la o placă cu fețe plan-paralele, subțire, după cum se vede în desen. Raza emergentă este puțin deplasată, dar pentru că lentila este subțire, cu cât mai subțire cu atât mai bine, deplasarea este mică și poate fi neglijată.

Imaginea unui obiect nepunctiform se construiește din imaginile tuturor punctelor luminoase de pe obiect care sunt în număr infinit. Practic nu este nevoie decât de imaginile extremităților, căci toate celelalte puncte imagine se așează ordonat între acestea.

Dacă obiectul este liniar și așezat perpendicular pe axa optică, se construiește numai imaginea extremității depărtată de axă, după care ducem o perpendiculară pe axă prin punctul imagine construit mai înainte. Obținem astfel punctul imagine de pe axă corespunzător punctului obiect situat pe axa optică fără a mai fi nevoie de calcule.

În funcție de așezarea obiectului pe axa optică, față de punctele caracteristice (F, O, C) avem mai multe tipuri de imagini:

1. *Obiectul este situat la  $-\infty$  față de lentilă.* Imaginea sa se formează în planul focarului - imagine. Se poate deduce acest lucru și din formula lentilei:

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \quad x_1 \rightarrow -\infty \quad x_2 = f$$

2. *Obiectul se află înaintea centrului de curbură C, imaginea sa este reală, micșorată și răsturnată.*

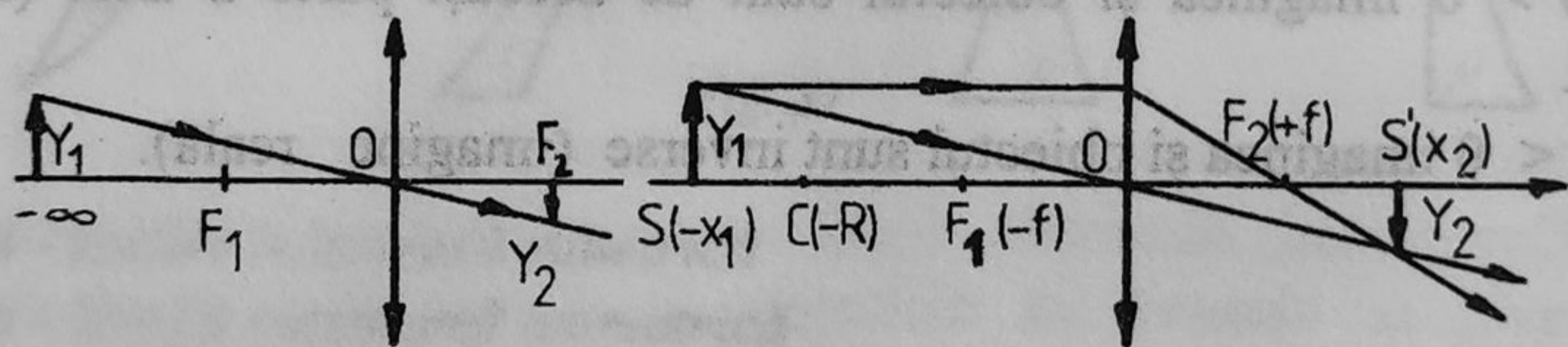


Fig. 88

3. *Obiectul se află la dublul distanței focale de lentilă.* Se obține o imagine reală, răsturnată și egală situată la aceeași distanță.

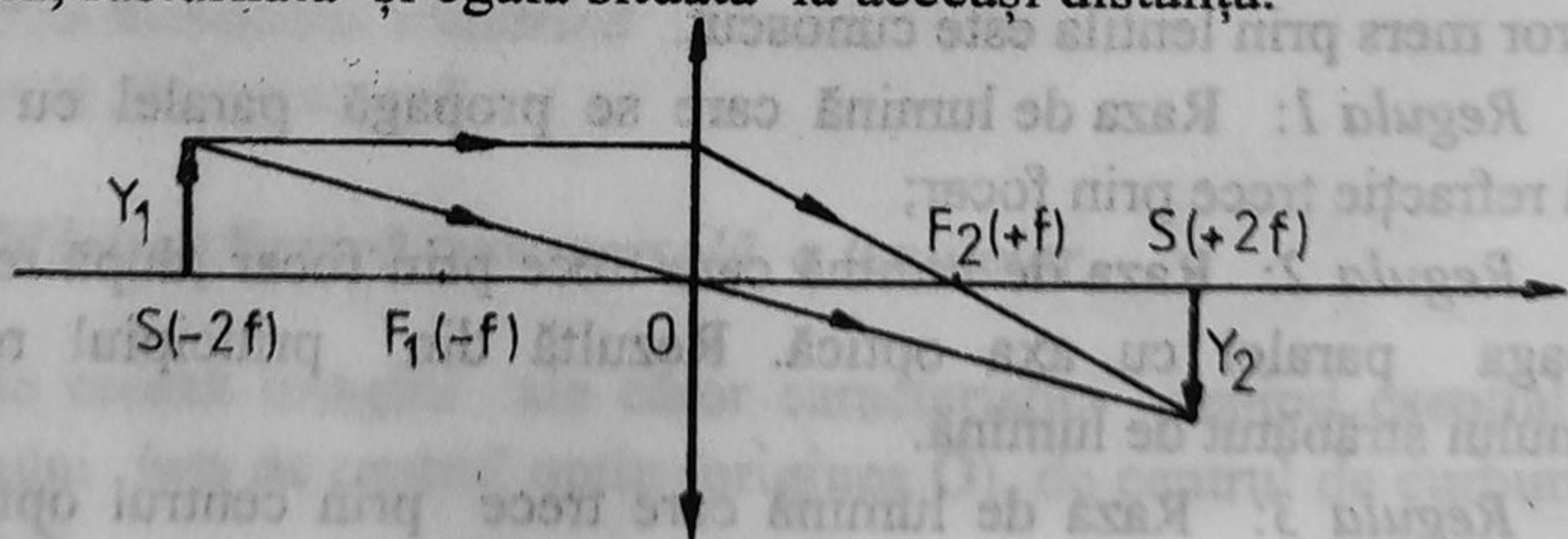


Fig. 89



4. Obiectul este situat între dublul distanței focale și focar. Se obține o imagine reală răsturnată, mărită și mai depărtată de lentilă.

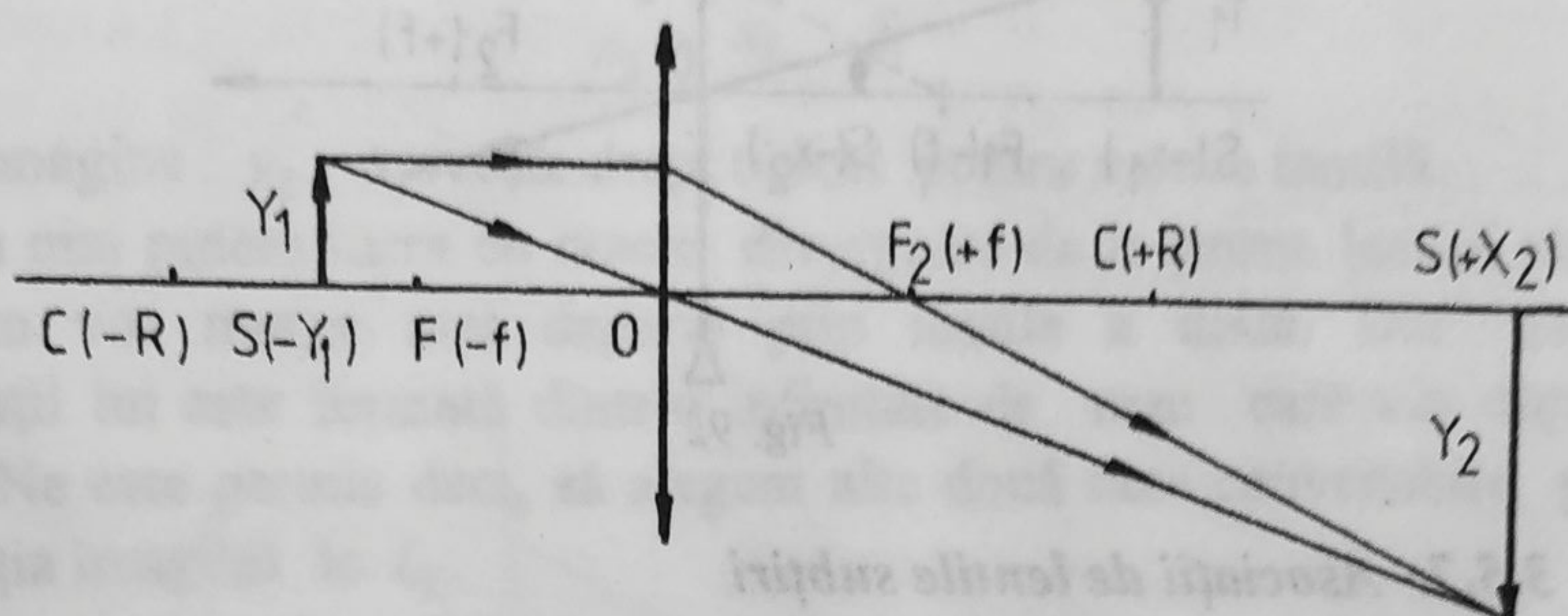


Fig. 90

Cu cât obiectul se apropie mai mult de focar, cu atât imaginea sa este mai mare și mai depărtată de lentilă. La limită, imaginea devine infinit de mare și situată la infinit. Acest caz are aplicații la construcția obiectivelor aparatelor de proiectat imagini la distanță, pe ecrane mari.

5. Obiectul este situat între focar și lentila, se obține o imagine virtuală, mărită și dreaptă.

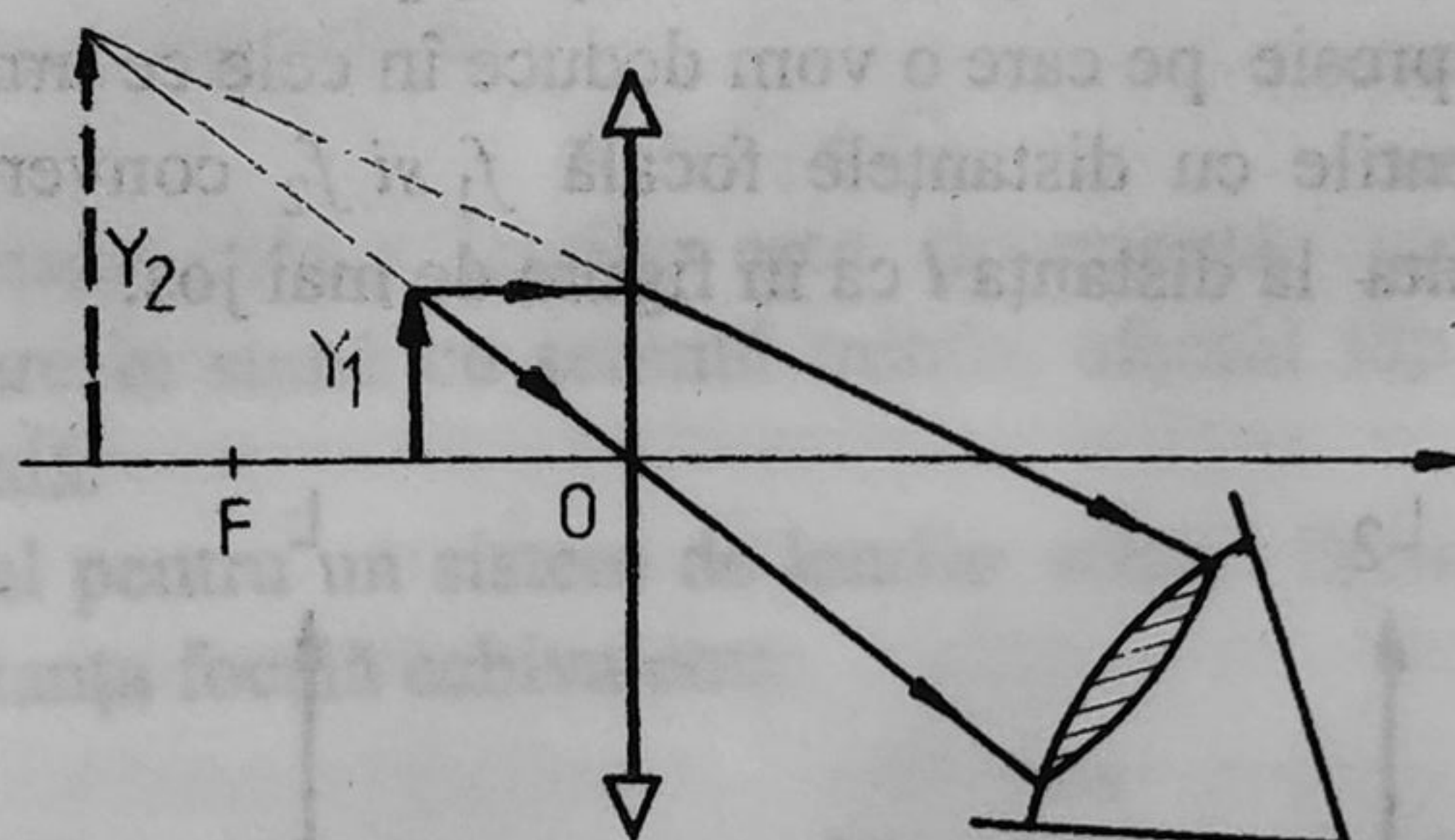


Fig. 91

Acest caz este folosit la construcția instrumentelor optice ca lupa sau ocular. Cazul când obiectul este situat chiar în focar, dă raze emergente paralele, imaginea este virtuală și se formează la infinit.

**Imaginea în lentila divergentă** - Lentila divergentă are focarul imagine virtual situat la distanță negativă, imaginea unui obiect real este totdeauna virtuală.



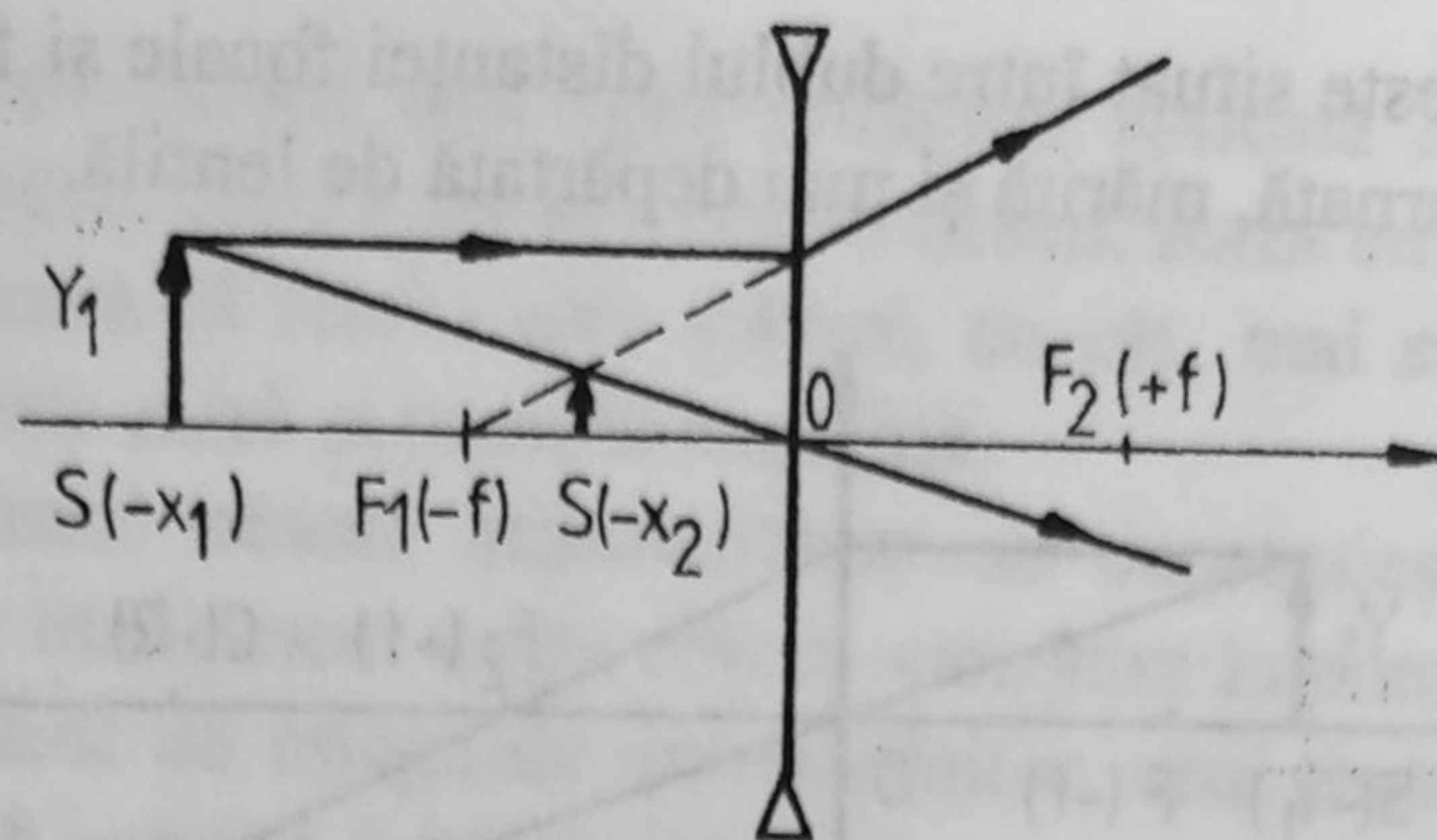


Fig. 92

### 3.5.7. Asociații de lentile subțiri

Prin asocierea strânsă a mai multor lentile subțiri se pot obține mărimi liniare mai mari căci efectul adăugării unei lentile este multiplicativ:

$$\beta = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \dots \cdot \beta_n$$

În afară de această mărire liniară repetată se mai folosesc asociațiile de lentile pentru:

- obținerea unor imagini drepte sau răsturnate;
- corijarea de diferite defecte (numite *aberații*) cum sunt aberația de sfericitate, de cromaticitate, etc.

*Lentilele subțiri* lipite una de alta formează un sistem cu o distanță focală care depinde de distanțele focale  $f_1$  și  $f_2$  ale lentilelor componente după o anumită expresie pe care o vom deduce în cele ce urmează.

Fie două lentile cu distanțele focale  $f_1$  și  $f_2$  convergente și subțiri, distanțate una de alta la distanța  $l$  ca în figura de mai jos:

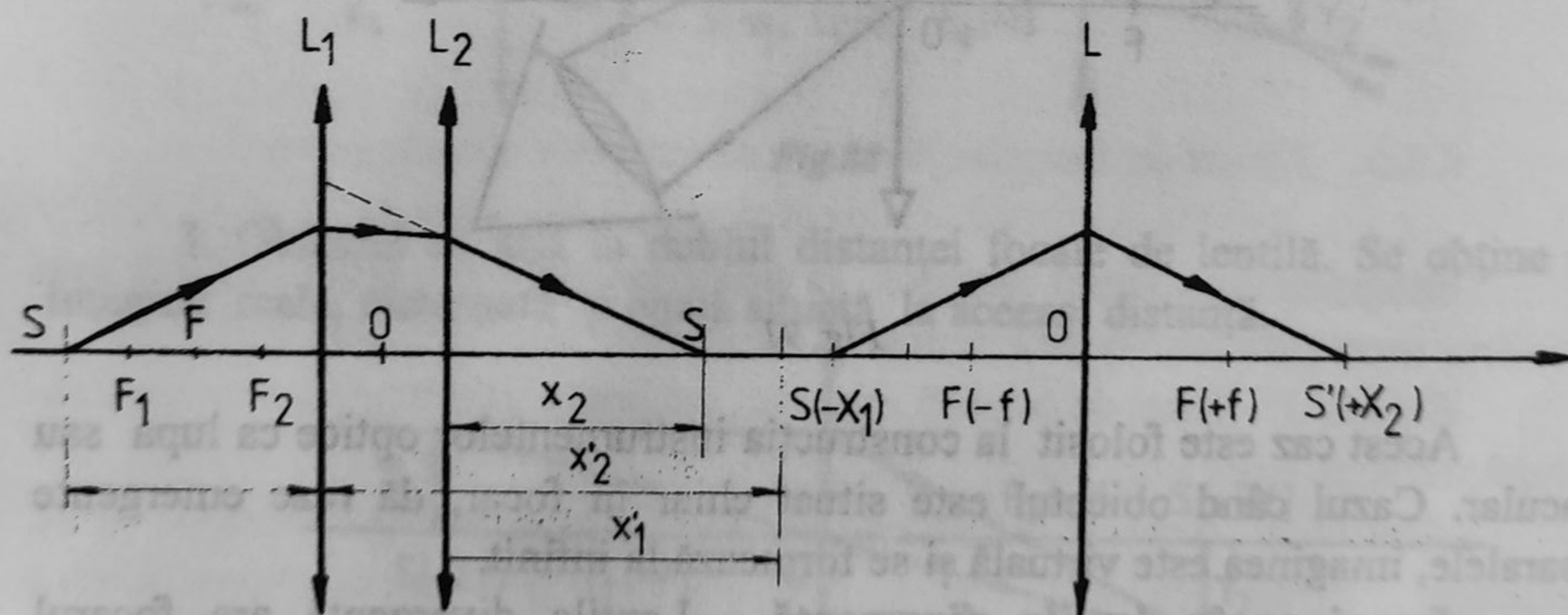


Fig. 93



Prima lentilă formează imaginea  $y_2'$ , aplicăm, formula lentilelor:

$$\frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1}$$

Acastă imagine  $y_2'$  servește drept obiect pentru a doua lentilă.

Nu mai putem lucra cu razele divergente de la prima lentilă căci nu știm cum vor merge mai departe prin lentila a doua. Dar imaginea extremității lui este formată dintr-o infinitate de raze care vin după alte direcții. Ne este permis deci, să alegem alte două raze convenabile pentru construcția imaginii în  $L_2$ .

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1'} = \frac{1}{f_2} \quad \text{și} \quad x_2 - x_2' = l \quad l \rightarrow 0 \quad x_2 \rightarrow x_1'$$

Adunăm cele două relații membru cu membru:

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1'} \quad \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}$$

$$\text{dar} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \quad \text{pentru ansamblul de lentile}$$

$$\text{deducem} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

sau cu ajutorul convergențelor:

$$C = C_1 + C_2$$

Dacă vreuna dintre lentile este divergentă, convergența ei este negativă și apare în sumă cu semnul minus, efectul său este de a micșora convergența totală.

În general pentru un sistem de lentile subțiri lipite (acolate) se poate scrie pentru distanța focală echivalentă:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \dots + \frac{1}{f_n} \quad \text{sau} \quad \frac{1}{f} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_i}$$

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad \text{sau} \quad C = \sum_{i=1}^n C_i$$

$$\beta = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \dots \cdot \beta_n \quad \text{sau} \quad \beta = \prod_{i=1}^n \beta_i$$

Practic numărul  $n$  este destul de mic, poate fi mai mare pentru lentile foarte mici și subțiri.



### 3.5.8. Sistem afocal de lentile

Este un sistem de lentile centrate astfel că *focarul imagine* al unei lentile coincide cu *focarul obiect* al următoarei lentile, ș.a.m.d. Efectul acestui *sistem afocal* asupra unei raze incidente paralelă cu axa optică este că după emergența din sistem raza se va propaga tot paralel cu axa optică, după cum se arată în figura următoare:

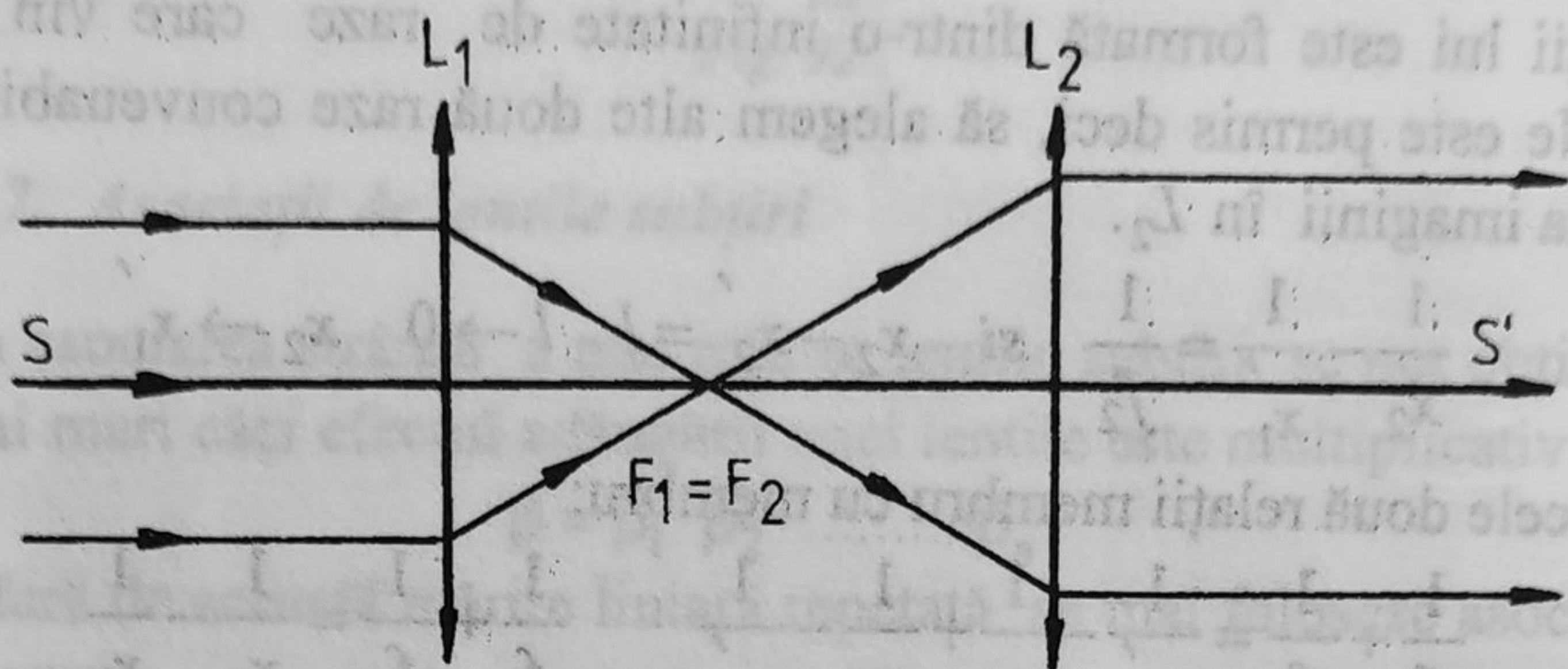


Fig. 94

Sistemul afocal se numește și *sistem telescopic* căci este echivalent cu un sistem optic cu distanța focală infinită.

### 3.5.9. Aberațiile lentilelor

Lentilele nu formează imagini perfect stigmatice, fără defecte. Pot fi afectate de **aberații geometrice** (de sfericitate, de astigmatism, coma, distorsiune) și de **aberații de cromaticitate** (dispersie, difracție) etc. despre care se poate citi în tratatele de fizică superioară. În cele de mai jos vom prezenta doar aberația de sfericitate și de cromaticitate.

Pentru a ne imagina aberația de sfericitate (numită și *efectul de butoi*) vom lua o rețea de pătrate ca obiect pentru o lentilă convergentă cu diametrul egal cu dimensiunea rețelei, fără diafragmă (deci nu se folosesc doar razele paraxiale ci și cele marginale).

Imaginea este mult deformată la margini, rețeaua aparând ca un butoi. Numai în zona razelor paraxiale imaginea nu este deformată.

Dacă rețeaua este înclinată față de axa optică, apare și defectul de *coma* care constă în alungirea ca niște virgule (*comma* în engleză) a unor porțiuni din obiect mai depărtate de lentilă.



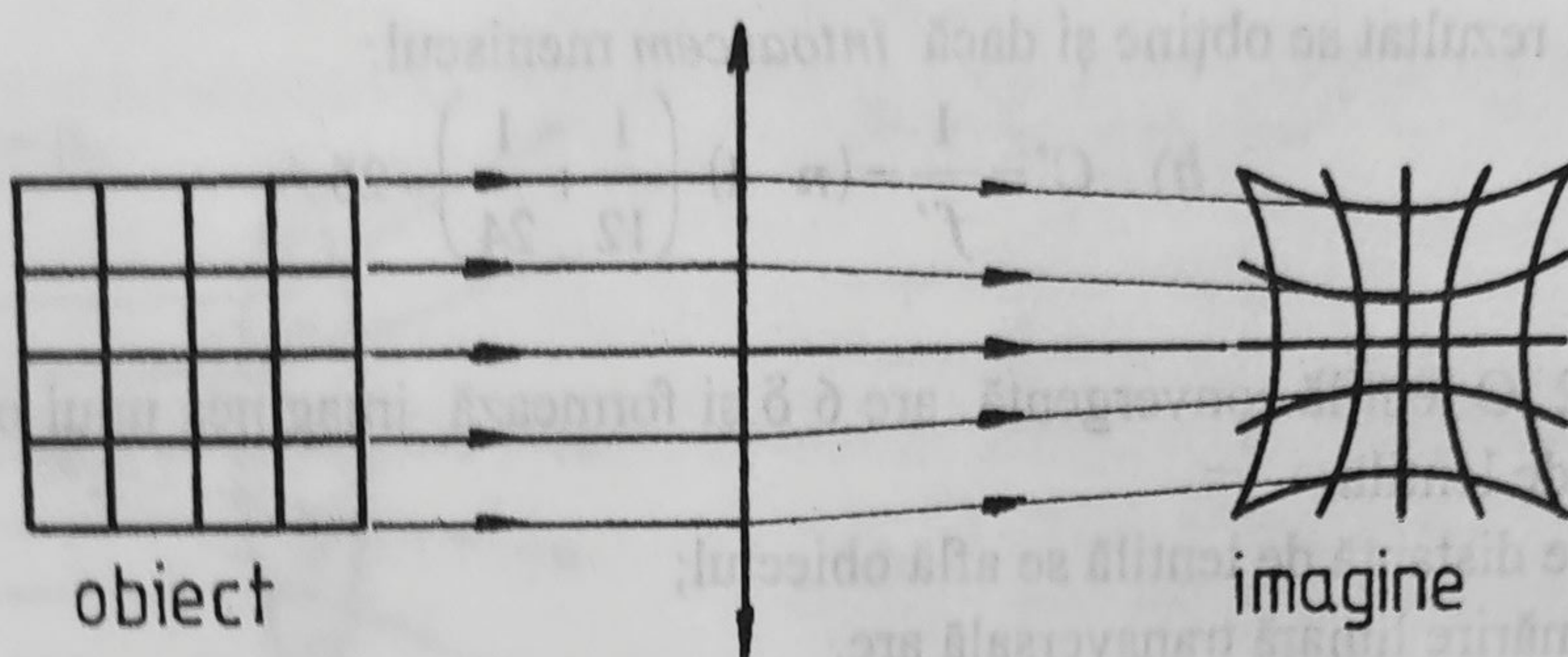


Fig. 95

Aberația de cromaticitate constă în apariția unui contur colorat cu toate culorile componente din fascicolul de lumină folosit. Acest fenomen se datorează faptului că indicele de refracție al sticlei este diferit pentru radiațiile cu lungimi de undă diferite.

Se poate elimina acest defect prin acolarea (cu o rășină transparentă numită balsam de Canada) a unor lentile din sticlă diferită și cu convergențe diferite. Astfel, acolarea unei lentile biconvexe cu un menisc concav-convex divergent, deși micșorează distanța focală a sistemului, elimină efectul cromatic deoarece dispersia razelor de lumină la trecerea prin lentile se face în sensuri opuse și se compensează (dacă lentilele sunt bine calculate).

### 3.5.10. Probleme rezolvate

1. O lentilă menisc convergent are razele de curbură de 12 și 24 cm, din sticlă cu  $n = 1,5$ .

- Să se găsească convergența meniscului;
- Ce convergență ar avea un menisc divergent cu aceleași raze de curbură.

Datele problemei:

$$R_2 = -12\text{cm} \quad R_1 = -24\text{cm}$$

a)  $C = ?$

b)  $C' = ?$

$$a) \quad C = \frac{1}{f} = (n-1) \cdot \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = (n-1) \cdot \left( \frac{1}{-24} + \frac{1}{12} \right) = 2\delta$$



Același rezultat se obține și dacă *întoarcem* meniscul:

$$b) \quad C' = \frac{1}{f'} = (n-1) \cdot \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{24} \right) = 2\delta$$

2. O lentilă convergentă are  $6\delta$  și formează imaginea unui obiect la 30 cm de lentilă.

a) La ce distanță de lentilă se află obiectul;

b) Ce mărire liniară transversală are.

Datele problemei:

$$C = 6\delta \quad x_2 = 30\text{cm}$$

$$a) \quad x_1 = ?$$

$$b) \quad \beta = ?$$

$$a) \quad C = \frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \quad \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} - C \quad x_1 = -\frac{3}{8}\text{cm}$$

$$b) \quad \beta = \frac{x_2}{x_1} = \frac{0,3}{-\frac{3}{8}} = -\frac{4}{5} = -0,8$$

3. Imaginea virtuală a unui obiect liniar, așezat perpendicular pe axa optică la 20 cm de lentilă este de 5 ori mai mare. Care este raza și distanța focală a lentilei biconvexe din sticlă cu  $n = 1,5$ .

Datele problemei:

$$n = 1,5 \quad x_1 = -20\text{cm}$$

$$\beta = ? \quad f = ?$$

$$\frac{1}{f} = \frac{2 \cdot (n-1)}{R} \quad \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \quad \beta = \frac{x_2}{x_1} \quad x_2 = \beta \cdot x_1$$

$$\frac{1}{\beta \cdot x_1} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \quad \frac{1}{f} = \frac{1-\beta}{\beta \cdot x_1} \quad f = \frac{\beta}{1-\beta} \cdot x_1 = 25\text{cm}$$

$$R = 2 \cdot (n-1) \cdot f = 2 \cdot (1,5-1) \cdot 25 = 25\text{cm}$$

4. În sticlă se află două bule de aer, una de forma unei lentile biconvexe și cealaltă de forma unei lentile biconcave ambele având razele de curbură de 2 cm ca în figura 96.



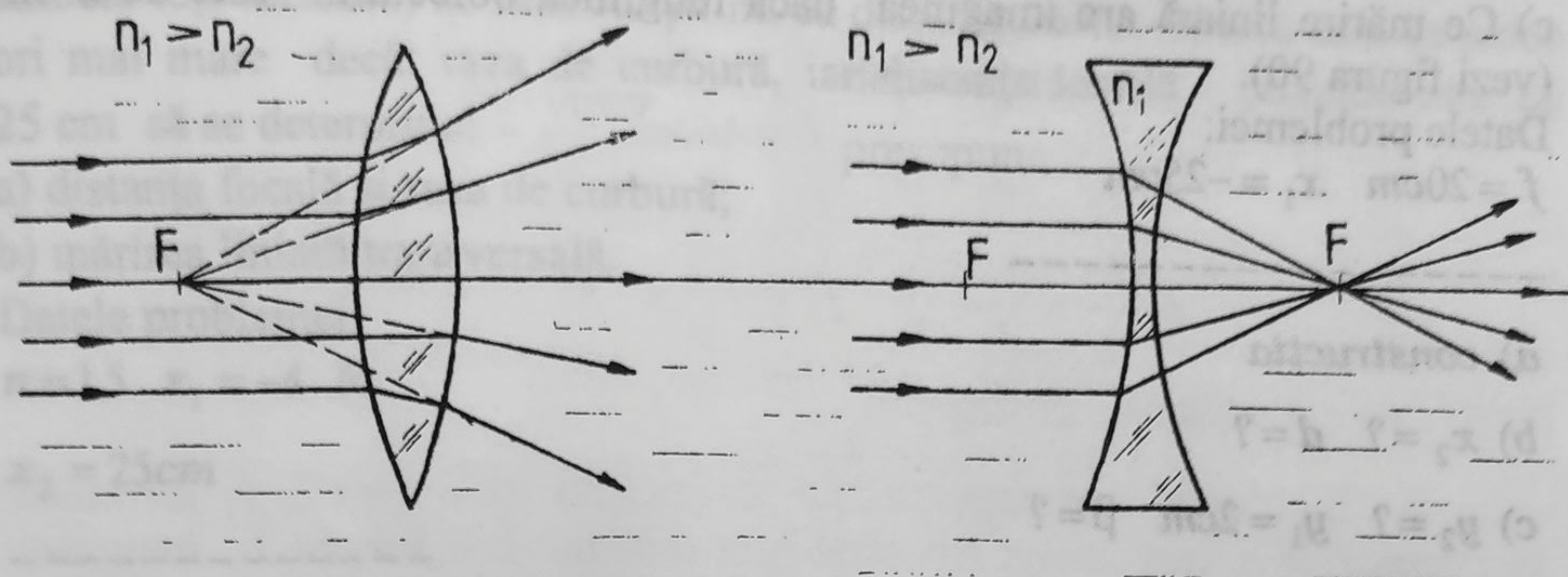


Fig. 96

- a) Să se calculeze convergența fiecărei lentile;  
 b) Să se arate comportarea unui fascicol paralel cu axa optică, după trecerea prin fiecare lentilă separat. Comparați cu lentilele de sticlă situate în aer.

Datele problemei:

$$R = 2\text{cm} \quad n_1 = 1,5$$

$$n_2 = 1$$

a)  $C = ?$

b) *constructia*

a) Lentila biconvexă:

$$C_1 = \frac{1}{f_1} = \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \cdot \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \left( \frac{1}{1,5} - 1 \right) \cdot \left( \frac{100}{2} - \frac{100}{-2} \right) = -33\delta$$

Se comportă ca o lentilă divergentă.

b) Lentila biconcavă:

$$C_2 = \frac{1}{f_2} = \left( \frac{1}{1,5} - 1 \right) \cdot \left( \frac{100}{-2} - \frac{100}{2} \right) = +33\delta$$

Se comportă ca o lentilă convergentă.

Deci: lentila biconvexă se comportă ca o lentilă divergentă, iar lentila biconcavă se comportă ca o lentilă convergentă.

5. Un obiect liniar este așezat pe axa optică principală a unei lentile convergente cu distanța focală de 20 cm la distanța de 25 cm de lentilă.

- a) Să se construiască imaginea și să se caracterizeze;



- b) La ce distanță de obiect se formează imaginea;  
 c) Ce mărire liniară are imaginea dacă lungimea obiectului este de 2 cm (vezi figura 90).

Datele problemei:

$$f = 20\text{cm} \quad x_1 = -25\text{cm}$$

a) construcția

b)  $x_2 = ? \quad d = ?$

c)  $y_2 = ? \quad y_1 = 2\text{cm} \quad \beta = ?$

a) vezi fig 90

b)  $d = -x_1 + x_2 \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \quad \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f} + \frac{1}{x_1}$

$$x_2 = 100\text{cm} \quad d = -(-25) + 100 = 125\text{cm}$$

c)  $\beta = \frac{x_2}{x_1} = \frac{100}{-25} = -4 \quad y_2 = \beta \cdot y_1 = (-4) \cdot 2 = -8\text{cm}$

Rezultă că imaginea este reală, răsturnată și mărită ceea ce concordă cu cazul studiat când obiectul se află între focar și dublul distanței focale.

6. Între un obiect și imaginea sa reală, de 5 ori mai mare, se măsoară o distanță de 1,8 m.

a) Ce fel de lentilă trebuie introdusă între ele și să se construiască imaginea:

b) Ce distanță focală și ce convergență are lentila.

Datele problemei:

$$d = 1,8\text{m} \quad \beta = -5$$

a) construcția

b)  $f = ? \quad C = ?$

b)  $d = -x_1 + x_2 \quad \beta = \frac{x_2}{x_1} \quad x_2 = \beta \cdot x_1 \quad d = -x_1 + \beta \cdot x_1 = x_1 \cdot (\beta - 1)$

$$x_1 = \frac{-d}{1 - \beta} = \frac{-180}{1 + 5} \text{cm} = -30\text{cm} \quad x_2 = (-5) \cdot (-30)\text{cm} = 150\text{cm}$$

$$C = \frac{1}{f} = \frac{60}{15} \cdot \text{m}^{-1} = 4 \quad f = 0,25\text{m}$$



7. O lentilă biconvexă din sticlă cu indice de refracție de 1,5 are ambele fețe identice, de rază  $R$ . Știind că distanța obiect- lentilă este de patru ori mai mare decât raza de curbură, iar distanța lentilă - imagine este de 25 cm să se determine:

a) distanța focală și raza de curbură;

b) mărirea liniară transversală.

Datele problemei:

$$n = 1,5 \quad x_1 = -4 \cdot R$$

$$x_2 = 25 \text{ cm}$$

$$a) f = ? \quad R = ?$$

$$b) \beta = ?$$

$$a) \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{2}{R} \cdot (n-1) = \frac{1}{f} \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{25} + \frac{1}{4 \cdot R} \quad R = \frac{75}{4} \text{ cm}$$

$$b) \beta = \frac{x_2}{x_1} = -\frac{1}{3}$$

8. Imaginea reală a unui obiect, care se află la o distanță de 0,9 m de o lentilă subțire, se formează la 0,45 m de lentilă. Alipind de prima lentilă o a doua lentilă, imaginea reală a aceluiași obiect se formează la 0,72 m de acest sistem. Se cere:

a) distanța focală a primei lentile;

b) distanța focală a sistemului format din cele două lentile;

c) distanța focală a celei de a doua lentile. Ce fel de lentilă este ? (Concurs de admitere la Institutul de Medicină -1976).

Datele problemei :

$$x_1 = -0,9 \text{ m} \quad x_2 = 0,45 \text{ m}$$

$$x_2' = 0,72 \text{ m}$$

$$a) f_1 = ?$$

$$b) f = ?$$

$$c) f_2 = ?$$



$$a) \frac{1}{f_1} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \quad f_1 \approx 30\text{cm} \quad C_1 = 3,3\delta$$

$$b) \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \quad f = 40\text{cm} \quad C_2 = 2,3\delta$$

$$c) \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f} - \frac{1}{f_1} \quad f_2 = -\frac{6}{5}\text{m} \quad C_3 = -\frac{5}{6}\delta$$

Deci a doua lentilă este divergentă.

9. O lentilă convergentă  $L_1$  având distanța focală  $f_1$  formează imaginea  $A'B'$  a unui obiect  $AB$  aflat la o distanță de 0,3 m de  $L_1$ . Imaginea  $A'B'$  este obiect pentru o a doua lentilă  $L_2$  a cărei distanță focală este  $f_2$ . Lentila  $L_2$  este plasată la distanța de 0,55 m față de prima lentilă și de aceeași parte cu imaginea  $A'B'$ . Se cere:

- să se construiască imaginile  $A'B'$  și  $A''B''$  ale obiectului  $AB$  în lentilele  $L_1$  și  $L_2$ ;
  - să se calculeze convergențele celor două lentile;
  - să se afle distanța la care se formează imaginea  $A''B''$  față de lentilă.
- Concurs de admitere Institutul de Construcții - București 1976).

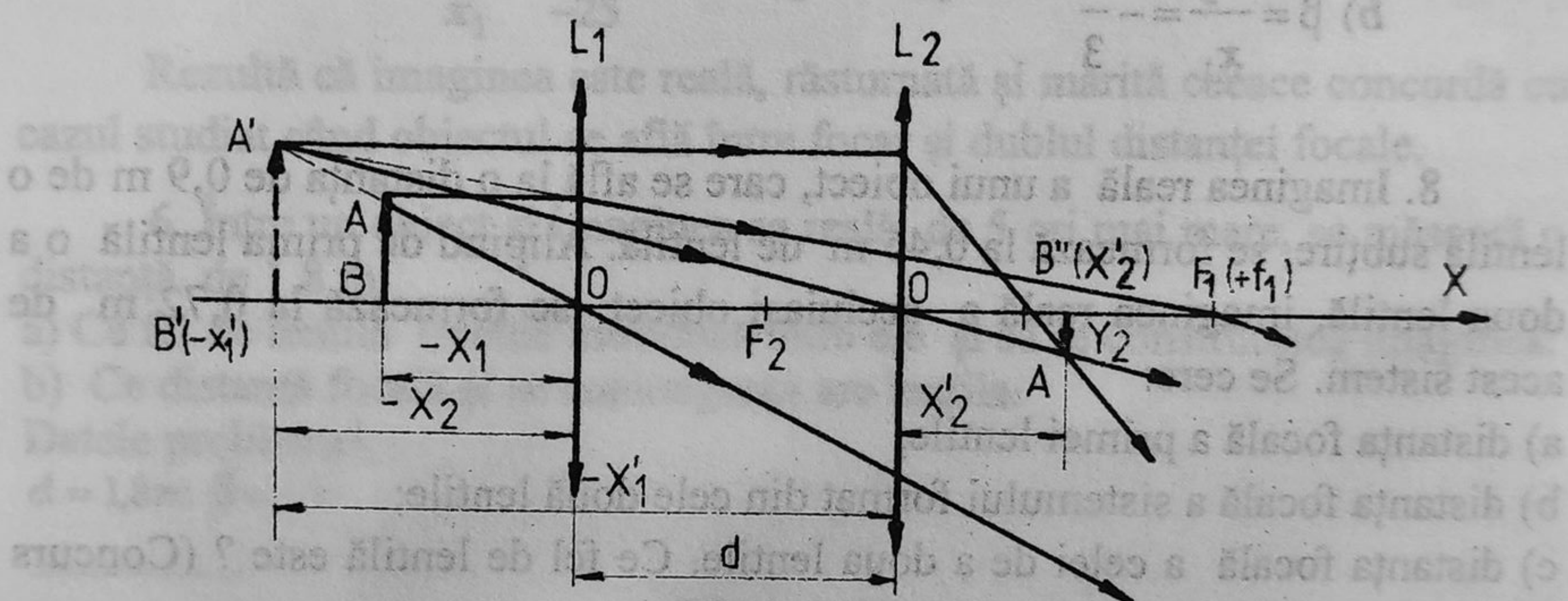


Fig. 97

Datele problemei:

$$f_1 = 1\text{m} \quad x_1 = -0,3\text{m}$$

$$f_2 = 0,2\text{m} \quad d = 0,55\text{m}$$

a) construcția

$$b) C_1 = ? \quad C_2 = ?$$

$$c) x_2' = ?$$



Imaginea A'B' este virtuală

$$c) C_1 = \frac{1}{f_1} = 18 \quad C_2 = \frac{1}{f_2} = 58$$

$$c) \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1} \quad \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{x_1}$$

$$x_2 = -0,428m \quad x_1 = x_2 + d = -0,978m$$

$$\frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_2} \quad \frac{1}{x_2'} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{x_1} \quad x_2' = 0,25m$$

10. Între un obiect și imaginea sa prinsă pe un ecran este o distanță de 120 cm.

a) La ce distanță de obiect trebuie așezată o lentilă biconvexă ca să se obțină o imagine de 5 ori mai mare;

b) Ce distanță focală și ce curbură are lentila dacă este din sticlă cu  $n = 1,5$ .

Datele problemei:

$$d = 120cm \quad \beta = -5$$

$$a) x_1 = ? \quad x_2 = ?$$

$$b) f = ? \quad R = ?$$

Vezi figura 84

$$a) d = -x_1 + x_2 \quad \beta = \frac{x_2}{x_1} \quad x_2 = \beta \cdot x_1$$

$$d = -x_1 + \beta \cdot x_1 = x_1 \cdot (\beta - 1)$$

$$x_1 = -\frac{d}{1-\beta} = -20cm \quad x_2 = -\frac{\beta \cdot d}{1-\beta} = 100cm$$

$$b) \frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{6}{100} \quad f = \frac{100}{6}cm$$

$$\frac{1}{f} = \frac{2 \cdot (n-1)}{R} \quad f = \frac{R}{2 \cdot (n-1)} = R \quad R = \frac{100}{6}cm$$

11. Un obiect se află în fața unei lentile convergente cu distanța focală de 80 cm, la distanța de 85 cm de lentilă.



- $$a) f_1 = 80 \text{ cm} \quad x_1 = -85 \text{ cm}$$

a)  $f_2 = -60\text{cm}$     $\Delta x = ?$

b)  $\beta_1 = ? \quad \beta_2 = ?$

$$a) \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1} \quad \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{x_1} = \frac{1}{80} - \frac{1}{85} = \frac{-5}{6800} \quad x_2 = 1360 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad f = -240 \text{ cm} \quad \frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \quad \frac{1}{x_2'} = \frac{1}{-240} + \frac{1}{-85}$$

$$x_2' = 62,77 \text{ cm} \quad \Delta x = |x_2' - x_2| = 1297,23 \text{ cm}$$

$$b) \beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = -16 \quad \beta_2 = \frac{x_2'}{x_1} = -0,73$$

a) Să se exprime distanțele echivalente în funcție numai de mărirea liniară;

b) Cât este distanța focală a lentilei și cât este distanța imagine-lentilă dacă se cunoaște poziția obiectului, este de 30 cm în fața lentilei.

**Datele problemei:**

$$a) \beta = -3$$

$$a) d_1(\beta) = ? \quad d_2(\beta) = ?$$

b)  $f = ?$   $x_1 = -30\text{cm}$

$$a) \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \quad \frac{1}{\frac{x_2}{f}} - \frac{1}{\frac{x_1}{f}} = 1 \quad \text{notam } d_1 = \frac{x_1}{f} \text{ si } d_2 = \frac{x_2}{f}$$

$$\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} = 1 \quad \text{dar} \quad \frac{d_2}{d_1} = \beta \quad d_2 = \beta \cdot d_1$$

$$\frac{1}{\beta \cdot d_1} - \frac{1}{d_1} = 1 \quad d_1 = \frac{1-\beta}{\beta} = -\frac{4}{3} \text{ cm} \quad d_2 = 1-\beta = 4 \text{ cm}$$



$$b) d_1 = \frac{x_1}{f} \quad f = \frac{x_1}{d_1} = \frac{\beta \cdot x_1}{1 - \beta} = 22,5 \text{ cm}$$

13. În fața unei lentile convergente, la 25 cm de lentilă se așează un obiect. Imaginea sa se formează pe un ecran situat la distanța de 5 ori mai mare decât distanța focală. Prin deplasarea lentilei se obține imaginea la o distanța de 4 ori mai mică.

a) Care este distanța focală a lentilei;

b) Cât de mare trebuie să fie deplasarea și în ce sens.

Datele problemei:

$$x_1 = -25 \text{ cm} \quad x_2 = 5 \cdot f$$

$$a) f = ?$$

$$b) x_2' = \frac{x_2}{4} \quad l = ?$$

$$a) \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \quad 5 \cdot f = -4 \cdot x_1 \quad f = 20 \text{ cm} \quad x_2 = 100 \text{ cm}$$

$$b) x_2' = \frac{x_2}{4} = 25 \text{ cm} \quad \frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1 - l} = \frac{1}{f} \quad l = 21,7 \text{ cm}$$

Lentila se deplasează în sensul pozitiv al axei Ox (în sensul depărtării de obiect).

14. Imaginea reală creată de o lentilă convergentă cu distanța focală de 20 cm, se află la distanța de 80 cm față de lentilă. La ce distanță față de lentilă se formează imaginea obiectului într-o altă lentilă cu distanța focală de 16 cm pusă în locul ei.

Datele problemei:

$$f_1 = 20 \text{ cm} \quad f_2 = 16 \text{ cm}$$

$$x_2 = 80 \text{ cm}$$

$$x_2' = ?$$

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1} \quad \frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_2}$$



$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1}$$

$$\frac{1}{x_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{80} \quad x_2' = 40 \text{ cm}$$

15. O lentilă biconvexă din sticlă cu indicele de refracție  $n = 1,5$  are fețe cu aceeași rază de curbură de 12 cm. Lentila se așează între un obiect luminos și un paravan între care este distanța de 60 cm. Să se determine:

- a) pozițiile lentilei în care se formează imagini reale și clare pe paravan;  
b) raportul dintre mărimea imaginii și a obiectului corespunzătoare pozițiilor de la punctul a).

(Concurs de admitere - Facultatea de Fizică 1971 Timișoara).

Datele problemei:

$$n = 1,5 \quad d = 60 \text{ cm}$$

$$R = 12 \text{ cm}$$

-----

$$a) x_1 = ? \quad x_1' = ?$$

$$x_2 = ? \quad x_2' = ?$$

$$b) \beta_1 = ? \quad \beta_2 = ?$$

$$a) d = -x_1 + x_2 \quad \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} = \frac{2 \cdot (n-1)}{R} \quad f = R = 12 \text{ cm}$$

$$x_1 = x_2 - d \quad \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_2 - d} = \frac{1}{f} \quad \frac{1}{f} = \frac{x_2 - d - x_2}{x_2 \cdot (x_2 - d)}$$

$$x_2^2 - d \cdot x_2 + d \cdot f = 0$$

$$(x_2)_1 = 43,5 \text{ cm} \quad (x_2)_2 = 16,5 \text{ cm}$$

$$(x_1)_1 = (43,5 - 60) \text{ cm} = -16,5 \text{ cm} \quad (x_1)_2 = -43,5 \text{ cm}$$

Există două poziții distincte pentru care imaginile sunt reale și clare, avem:

$$b) \beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{43,5}{-16,5} = -2,63 \quad \beta_2 = \frac{-16,5}{43,5} = \frac{1}{\beta_1} = -0,38$$



16. O lentilă biconvexă are raza de curbură de 25 cm și indicele de refracție de 1,5. Un obiect care este așezat la 30 cm de lentilă dă o imagine situată la o anumită distanță. Dacă introducem lentila și obiectul (la aceeași distanță unul de altul) în apă cu  $n = 1,3$  se formează o altă imagine la altă distanță.

- La ce distanță de lentilă, în aer, se formează imaginea obiectelor și care este mărirea sa liniară;
- La ce distanță de lentilă, în apă, se formează imaginea obiectului și care este mărirea sa liniară;
- Care este convergența lentilei în aer și în apă.

Datele problemei:

$$R = 25\text{cm} \quad n = 1,$$

$$x_1 = -30\text{cm} \quad n_o = 1,3$$

$$a) x_2 = ? \quad \beta_1 = ?$$

$$b) x_2' = ? \quad \beta_2 = ?$$

$$c) f = ?$$

$$\text{În aer: } \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{2 \cdot (n-1)}{R} = \frac{1}{f}$$

$$\text{În apă: } \frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1} = \frac{2}{R} \cdot \left( \frac{n}{n_o} - 1 \right) = \frac{1}{f'}$$

$$a) \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f} + \frac{1}{x_1} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{R} \quad f = R = 25\text{cm}$$

$$\frac{1}{x_2} = \frac{1}{25} - \frac{1}{35} \quad x_2 = 87,5\text{cm}$$

$$b) \frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1'} \quad \frac{1}{f_1'} = \frac{2}{25} \cdot \left( \frac{1,5}{1,3} - 1 \right)$$

$$f_1' = 81,25\text{cm} \quad \frac{1}{x_2'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{x_1} \quad x_2' = -61,5\text{cm}$$

$$c) C = \frac{1}{0,25} \cdot m^{-1} = 4\delta \quad C' = \frac{1}{0,81} \cdot m^{-1} = 1,23\delta$$



17. Între două lentile convergente, distanțate la 2 m se găsește un obiect. Cunoșcând cele două distanțe focale de 40 cm și 60 cm respectiv, să se găsească la ce distanță de cele două lentile trebuie așezate astfel ca cele două imagini să fie egale.

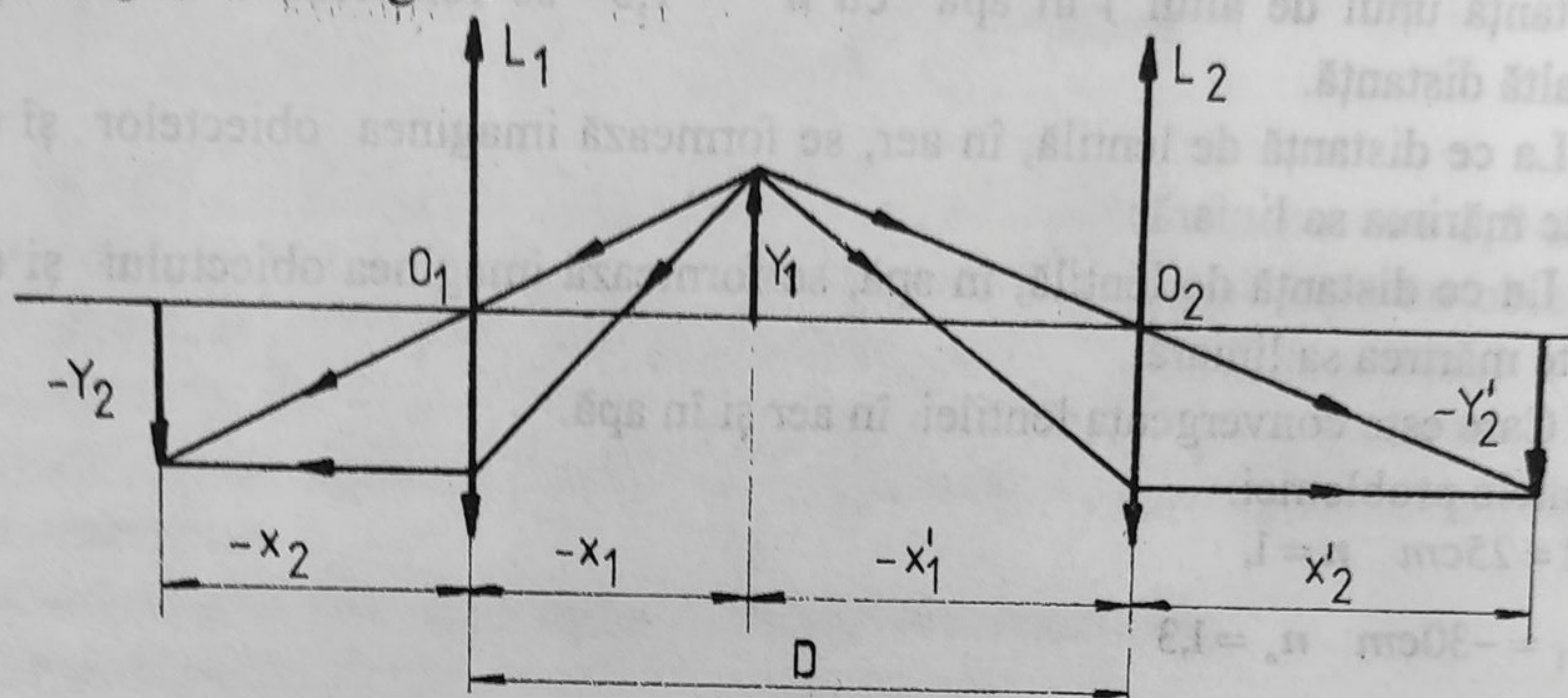


Fig. 98

Datele problemei:

$$D = 2m$$

$$f_1 = 40cm \quad f_2 = 60cm$$

-----

$$x_1 = ? \quad y_2 = y_2'$$

$$\text{Imaginea 1: } D = -x_1 - x_1' \quad D' = x_1' + x_1 \quad \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1}$$

$$\text{Imaginea 2: } \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_2} \quad \text{din } \beta_1 = \beta_2 \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2'}{x_1'}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2'}{D' - x_1} \quad x_1' = D' - x_1$$

$$\text{Se formează sistemul: } \frac{1}{x_2} = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{2}{D' - x_1} \quad \frac{1}{x_1} = \frac{1}{D' - x_1}$$

$$\frac{1}{D' - x_1} \cdot \left( \frac{x_1}{x_2} - 1 \right) = \frac{1}{f_2} \quad \frac{1}{D' - x_1} \cdot \left( \frac{x_1}{f_1} + 1 - 1 \right) = \frac{1}{f_2}$$

$$\text{din } \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{x_1} \quad \text{rezulta } \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1}{f_1} + 1$$



$$\text{deci } \frac{x_1}{f_1} = \frac{D' - x_1}{f_2} \quad \frac{x_1}{f_1} = \frac{D'}{f_2} - \frac{x_1}{f_2} \quad x_1 \cdot \left( \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \right) = \frac{D'}{f_2}$$

$$C = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{0,4} + \frac{1}{0,6} = \frac{25}{6} \delta = \frac{1}{f}$$

$$\text{notăm: } x_1 \cdot \frac{f_1 + f_2}{f_1 \cdot f_2} = \frac{D'}{f_2} \quad x_1 = D' \cdot \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2} = -80 \text{ cm}$$

$$\text{sau } x_1 = \frac{D'}{C \cdot f_2} = \frac{-2}{\frac{25}{6} \cdot 0,6} \text{ cm} = -80 \text{ cm}$$

Fiecare distanță fiind măsurată în sistemul său de axe:

$$x_1' = D' - \frac{D' \cdot f_1}{f_1 + f_2} = D' \cdot \frac{f_1 + f_2 - f_1}{f_1 + f_2} = D' \cdot \frac{f_2}{f_1 + f_2} = -1,2 \text{ m}$$

$$\text{sau } x_1' = D' - x_1 = -200 \text{ cm} - (-80) \text{ cm} = -120 \text{ cm}$$

18. Pentru o lentilă din sticlă subțire cu razele de curbură  $r_1$  și  $r_2$ , de grosime  $d$  aflată în aer, distanța focală  $F$  se determină prin următoarele expresii:

$$F = \frac{n \cdot r_1 \cdot r_2}{(n-1) \cdot [n \cdot (r_2 - r_1) + d \cdot (n-1)]}$$

unde  $n$  - indicele de refracție aer-sticlă.

Indicație:  $r_i > 0$  înseamnă că centrul de curbură  $O_i$  se află în partea dreaptă a punctului  $S_i$ ;

$r_i < 0$  înseamnă că centrul de curbură  $O_i$  se află în partea stângă a punctului  $S_i$  unde  $i = 1, 2$ . (Olimpiada internațională Germania 1975).

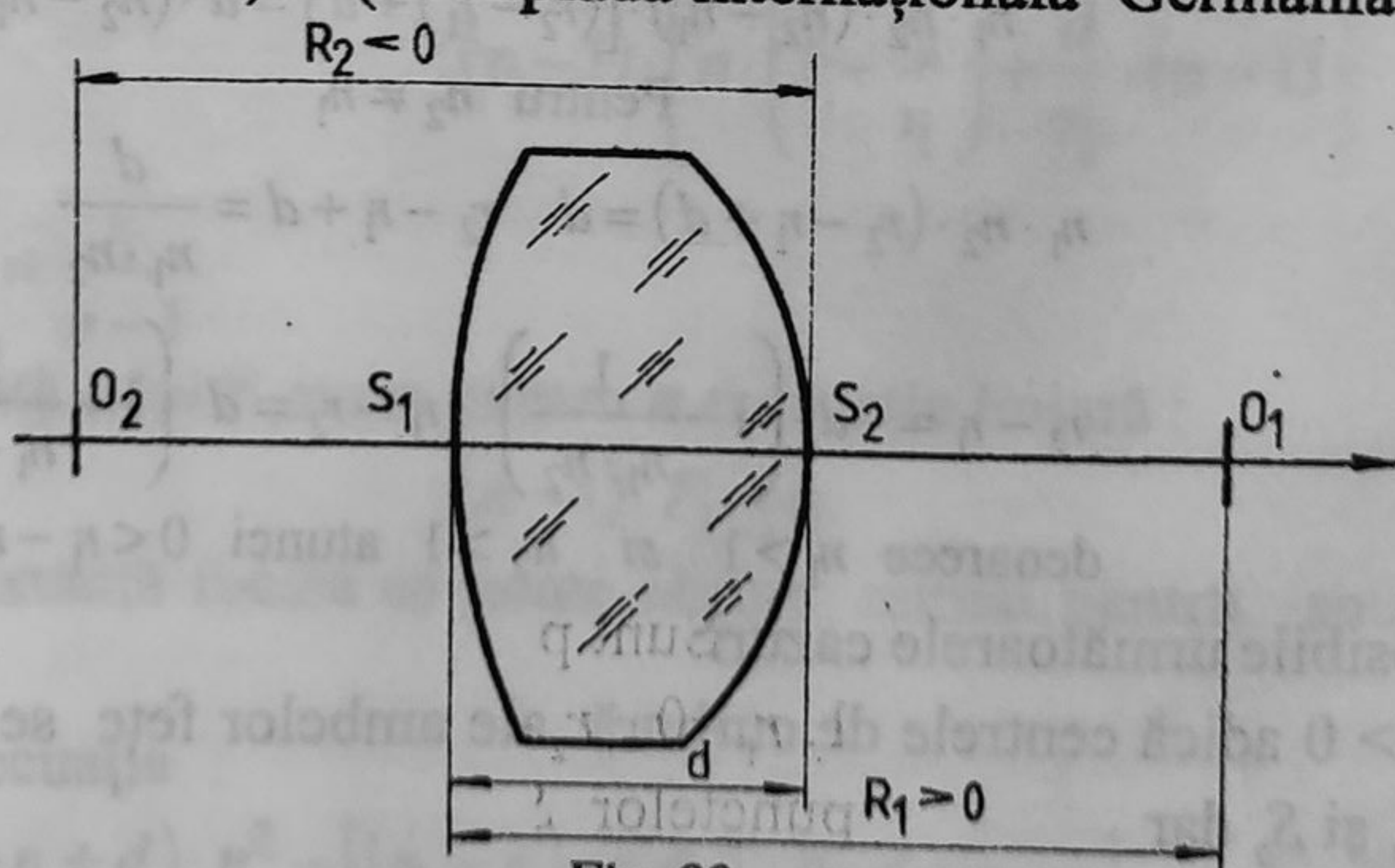


Fig. 99



Rezolvare:

Ecuatia de dependență a distanței focale  $F$  de indicele  $n$  este pătratică, deci există două valori pentru  $n$  cât și două lungimi de undă căci se presupune  $n(\lambda)$ .

$$n \cdot r_1 \cdot r_2 = (n-1) \cdot F \cdot [n \cdot (r_2 - r_1) + d \cdot (n-1)]$$

$$n \cdot r_1 \cdot r_2 = (n-1) \cdot F \cdot n \cdot (r_2 - r_1) + d \cdot F \cdot (n-1)^2$$

$$(n^2 - 2 \cdot n + 1) \cdot d \cdot F + (n^2 - n) \cdot F \cdot (r_2 - r_1) - n \cdot r_1 \cdot r_2 = 0$$

$$n^2 \cdot [F \cdot d + F \cdot (r_2 - r_1)] - n \cdot [2 \cdot d \cdot F + F \cdot (r_2 - r_1) + r_1 \cdot r_2] = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{(2 \cdot d + \Delta r) \cdot F \pm \sqrt{F^2 \cdot (2 \cdot d + \Delta r)^2 - 8 \cdot d \cdot F \cdot r_1 \cdot r_2}}{2 \cdot (d \cdot F + F \cdot \Delta r)}$$

Fie  $n_1$  și  $n_2$  cele două valori, atunci

$$F(n_1) = F(n_2)$$

Folosind condițiile problemei :

$$\frac{n_1 \cdot r_1 \cdot r_2}{(n_1-1) \cdot [n_1 \cdot (r_2 - r_1) + d \cdot (n_1-1)]} = \frac{n_2 \cdot r_1 \cdot r_2}{(n_2-1) \cdot [n_2 \cdot (r_2 - r_1) + d \cdot (n_2-1)]}$$

$$n_1 \cdot (n_2-1) \cdot [n_2 \cdot (r_2 - r_1) + d \cdot (n_2-1)] = n_2 \cdot (n_1-1) \cdot [n_1 \cdot (r_2 - r_1) + d \cdot (n_1-1)]$$

$$n_1 \cdot (n_2-1) \cdot n_2 \cdot (r_2 - r_1) + n_1 \cdot (n_2-1) \cdot d \cdot (n_2-1) =$$

$$= n_2 \cdot (n_1-1) \cdot n_1 \cdot (r_2 - r_1) + n_2 \cdot (n_1-1) \cdot d \cdot (n_1-1)$$

$$n_1 \cdot n_2 \cdot (n_2-1) \cdot (r_2 - r_1) + n_1 \cdot d \cdot (n_2-1)^2 =$$

$$= n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1-1) \cdot (r_2 - r_1) + n_2 \cdot d \cdot (n_1-1)^2$$

$$n_1 \cdot n_2 \cdot (r_2 - r_1) \cdot (n_2-1-n_1+1) + d \cdot [n_1 \cdot (n_2^2 - 2 \cdot n_2 + 1) - n_2 \cdot (n_1^2 - 2 \cdot n_1 + 1)] = 0$$

$$n_1 \cdot n_2 \cdot (n_2 - n_1) \cdot (r_2 - r_1) + d \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot (n_2 - n_1) + d \cdot (n_1 - n_2) = 0$$

$$n_1 \cdot n_2 \cdot (n_2 - n_1) \cdot [(r_2 - r_1) + d] = d \cdot (n_2 - n_1)$$

Pentru  $n_2 \neq n_1$

$$n_1 \cdot n_2 \cdot (r_2 - r_1 + d) = d \quad r_2 - r_1 + d = \frac{d}{n_1 \cdot n_2}$$

$$r_2 - r_1 = -d \cdot \left(1 - \frac{1}{n_1 \cdot n_2}\right) \quad r_1 - r_2 = d \cdot \left(1 - \frac{1}{n_1 \cdot n_2}\right)$$

deoarece  $n_1 > 1$  și  $n_2 > 1$  atunci  $0 < r_1 - r_2 < d$

Sunt posibile următoarele cazuri:

1.  $r_1 > 0$   $r_2 > 0$  adică centrele de curbură ale ambelor fețe se află în dreapta punctelor  $S_1$  și  $S_2$  dar

Pentru această situație avem  $O_1 O_2 < S_1 S_2$



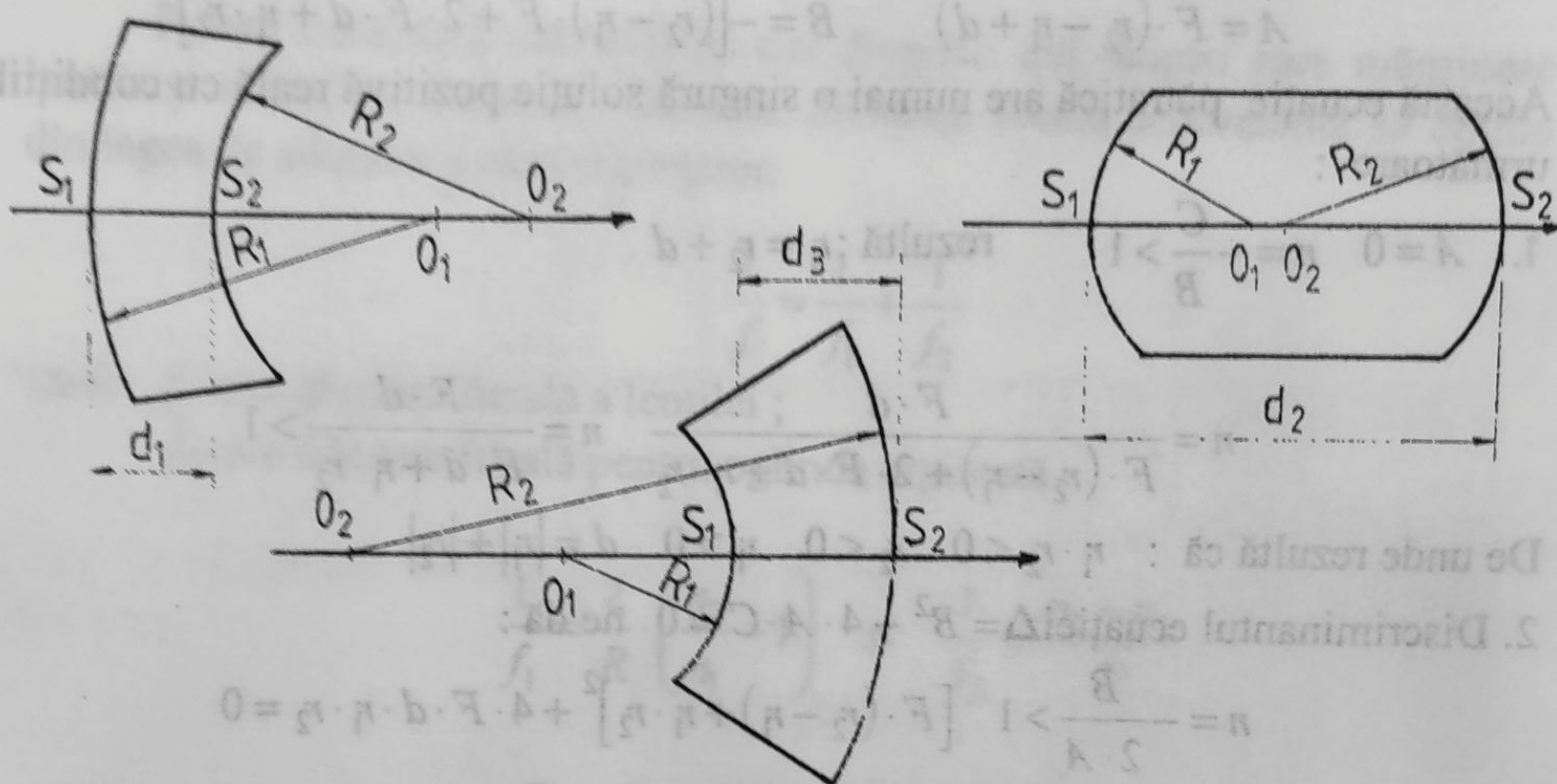


Fig. 100

2.  $r_1 > 0$   $r_2 < 0$  pentru această situație avem :  $0 < |r_1| + |r_2| < d_2$
3.  $r_1 < 0$   $r_2 > 0$  pentru care :  $0 < |r_2| - |r_1| < d_3$   $|r_1| < |r_2| < d_3 + |d_1|$

Evident că în acest caz  $O_1 O_2 < S_1 S_2$ .

Aplicație :

- a) cazul  $r_1 < 0$   $r_2 > 0$  nu îndeplinește condiția căci  $r_1 - r_2 < 0$
- b) Pentru lentila plan-convexă  $r_2 \rightarrow \infty$  iar distanța focală tinde la  $F_1$  :

$$F_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot r_1}{(n-1) \cdot \left[ n \cdot \left( 1 - \frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{d}{r_2} \cdot (n-1) \right]}$$

$$F_1 = \frac{r_1}{n-1}$$

Pentru o valoare dată a lui  $F$  avem pentru  $n$  o ecuație liniară :

$$(n-1) \cdot F_1 = r_1$$

adică o anumită distanță focală se poate obține numai pentru anumită valoare a lui  $n$  sau  $\lambda$ .

- c) Transformăm ecuația :

$$F \cdot (r_2 - r_1 + d) \cdot n^2 - [(r_2 - r_1) \cdot F + 2 \cdot F \cdot d + r_1 \cdot r_2] \cdot n + F \cdot d = 0$$



Introducem notațiile :

$$A = F \cdot (r_2 - r_1 + d) \quad B = -[(r_2 - r_1) \cdot F + 2 \cdot F \cdot d + r_1 \cdot r_2]$$

Această ecuație pătratică are numai o singură soluție pozitivă reală cu condițiile următoare :

$$1. \quad A=0 \quad n = -\frac{C}{B} > 1 \quad \text{rezultă : } r_1 = r_2 + d$$

$$n = \frac{F \cdot d}{F \cdot (r_2 - r_1) + 2 \cdot F \cdot d + r_1 \cdot r_2} \quad n = \frac{F \cdot d}{F \cdot d + r_1 \cdot r_2} > 1$$

De unde rezultă că :  $r_1 \cdot r_2 < 0 \quad r_2 < 0 \quad r_1 > 0 \quad d = |r_1| + |r_2|$

2. Discriminantul ecuației  $\Delta = B^2 - 4 \cdot A \cdot C = 0$  ne dă :

$$n = -\frac{B}{2 \cdot A} > 1 \quad [F \cdot (r_2 - r_1) + r_1 \cdot r_2]^2 + 4 \cdot F \cdot d \cdot r_1 \cdot r_2 = 0$$

$$n = \frac{F \cdot (2 \cdot d + r_2 - r_1) + r_1 \cdot r_2}{2 \cdot F \cdot (d + r_2 - r_1)} > 1$$

$$n^2 = -\frac{C}{A} > 1$$

3.  $B=0$  atunci  $F \cdot (r_2 - r_1 + 2 \cdot d) + r_1 \cdot r_2 = 0$

$$n = \sqrt{-\frac{d}{r_2 - r_1 + d}} > 1$$

Este posibil acest caz când una dintre rădăcinile ecuației este negativă sau mai mică decât unitatea.

4. Atunci valoarea  $n > 1$  și distanța focală se poate realiza numai pentru o singură lungime de undă.

19. O oglindă sferică concavă se obține dintr-o lentilă de sticlă, subțire, simetrică, biconvexă, având o suprafață argintată. Să se determine distanța focală știind că raza de curbură a suprafeței lentilei este de 40 cm, iar  $n = 1,5$ . (I. Irodov - Bibliografie).

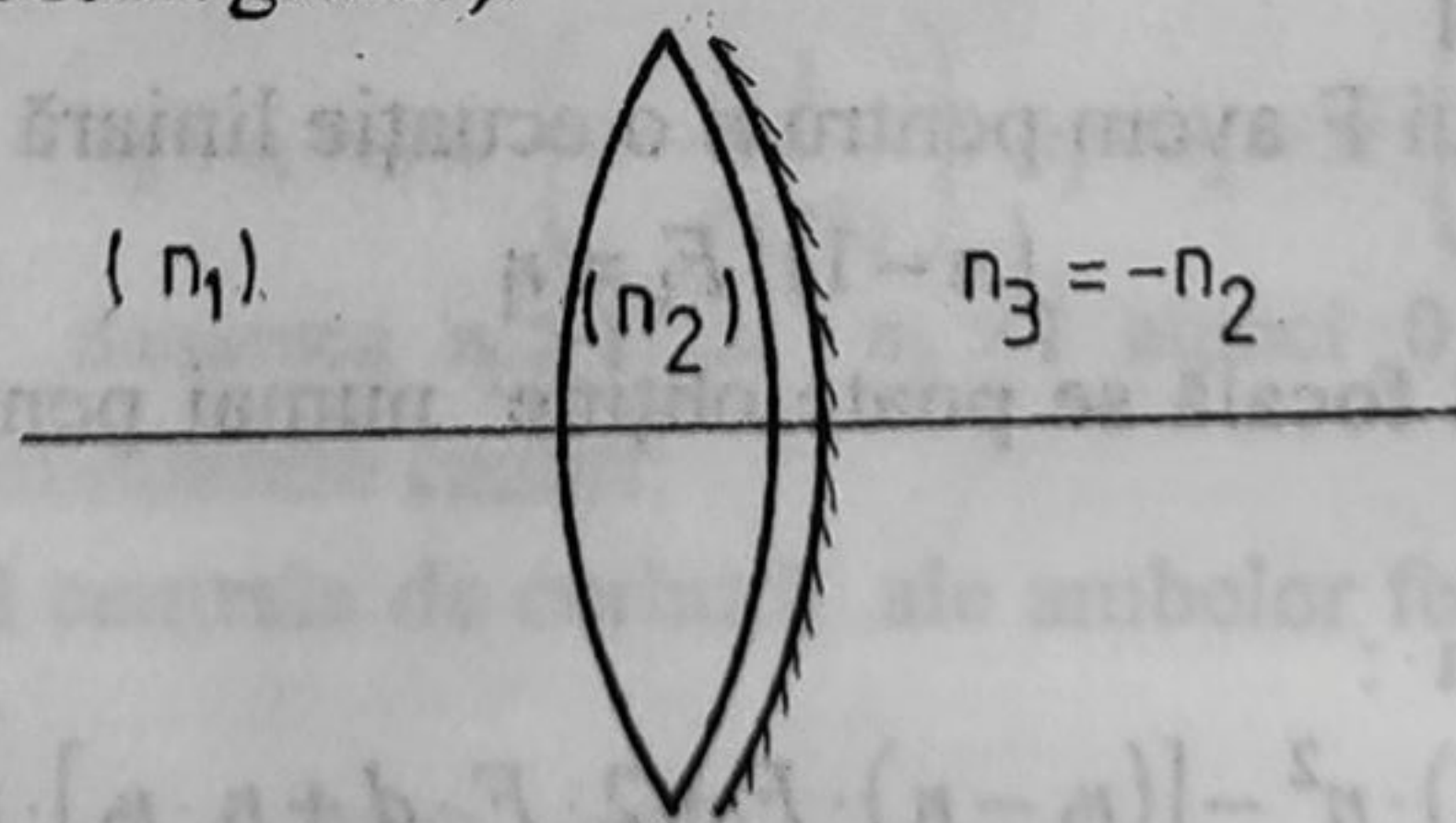


Fig. 101



Prima soluție:

Putem considera sistemul de trei dioptrii: doi dioptri care mărginesc lentila și al treilea, dioptrul reflectant. Distanța focală echivalentă se obține din legea de adunare a convergențelor:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

unde  $f_1$  este distanța focală a lentilei;

$f_2$  este distanța focală pentru oglinda argintată.

$$\frac{1}{f_1} = \frac{2}{R} \cdot \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \text{ si } \frac{1}{f_2} = \frac{n_2 - n_3}{R}$$

obținută din formula :

$$\frac{n_1}{f_2} = \frac{n_3}{x_2} - \frac{n_2}{x_1} \quad \frac{n_1}{f_2} = \frac{n_3 - n_2}{-R}$$

Pentru oglindă punem :  $n_3 = -n_2$  deci

$$\frac{n_1}{f_2} = \frac{2 \cdot n_2}{R} \quad \frac{1}{f_2} = \frac{2}{R} \cdot \frac{n_2}{n_1} \quad \frac{1}{f_2} = \frac{2 \cdot n_2}{R} \quad n_1 = 1$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{R} \cdot (2 \cdot n_2 - 2 + 2 \cdot n_2) = \frac{2 \cdot (2 \cdot n - 1)}{R}$$

$$f = \frac{R}{2 \cdot (2 \cdot n_2 - 1)} = 10 \text{ cm}$$

A doua soluție:

Aplicăm formula fundamentală pentru fiecare dioptru în parte. Interesul pe care-l prezintă această rezolvare constă în faptul că este un model de rezolvare pentru sistemele cu mai mulți, dioptri.

În figura următoare se prezintă o schemă redusă, pe care se figurează obiectul și imaginile intermediare ca și distanțele acestora considerate față de fiecare vârf de dioptru, care constituie originea sistemului de coordonate orientat de fiecare dată în sensul propagării luminii.

$Y'_2$  se formează în interiorul lentilei și este imaginea lui  $Y_1$ , față de dioptru se caracterizează prin distanțele  $x_1$  și  $x_2$ . Această primă imagine constituie obiect pentru al doilea dioptru, dar fiind atât de aproape de vârful  $O_2$  al celui de al doilea dioptru, vom obține o imagine virtuală  $Y''_2$ , cu distanțele  $x'_1$  și  $x'_2$ .



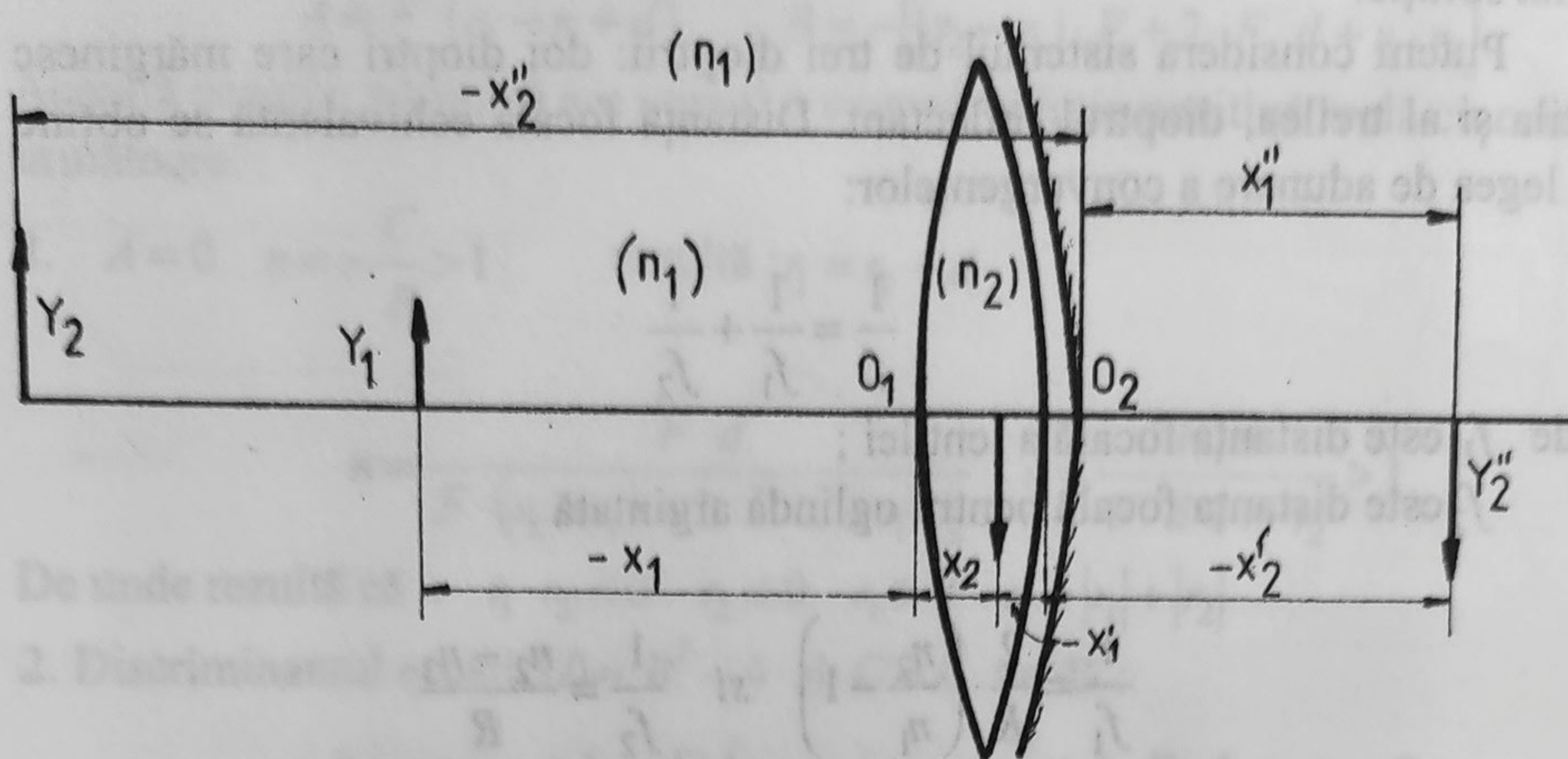


Fig. 102

$$(O_1) \quad \frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad \text{unde} \quad R_1 = R \quad n_3 = -n_2$$

$$(O_2) \quad \frac{n_3}{x_2'} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_3 - n_2}{-R} \quad \text{unde} \quad R_2 = -R$$

$Y_2''$  constituie obiect virtual pentru oglindă sferică:

$$(O_2) \quad \frac{n_1}{x_2''} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_1 - n_2}{-R}$$

Adunăm toate cele trei relații membru cu membru și obținem :

$$\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} + \frac{n_3}{x_2'} - \frac{n_2}{x_1} + \frac{n_1}{x_2''} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{R} + \frac{n_2 - n_3}{R} + \frac{n_2 - n_1}{R}$$

$$\frac{n_1}{x_2''} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{1}{R} \cdot (n_2 - n_1 + 2 \cdot n_2 + n_2 - n_1)$$

Am ținut cont de relațiile geometrice evidente :

$$x_1'' = x_2' \quad -x_1' + x_2 = l \quad l \rightarrow 0 \quad x_1' = x_2$$

Intr-un mediu dat putem defini distanța focală astfel :

$$\frac{n_1}{x_2''} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_1}{f} \quad \text{decî} \quad \frac{n_1}{f} = \frac{1}{R} \cdot (4 \cdot n_2 - 2 \cdot n_1)$$



$$\frac{n_1}{f} = \frac{2 \cdot (2 \cdot n_2 - n_1)}{R} \quad \frac{1}{f} = \frac{2 \cdot \left( 2 \cdot \frac{n_2}{n_1} - 1 \right)}{R}$$

Dacă notăm  $n = \frac{n_2}{n_1}$   $\frac{1}{f} = \frac{2 \cdot (2 \cdot n - 1)}{R}$   $f = \frac{R}{2 \cdot (2 \cdot n - 1)} = 10 \text{ cm}$

20. O sursă punctuală este situată la o distanță de 20 cm de față dinaintea a unei lentile de sticlă, simetrică biconvexă.

Grosimea lentilei este de 5 cm, raza de curbură a suprafețelor este de 5 cm. La ce distanță de față din spate a lentilei se formează imaginea sursei. (Irodov).

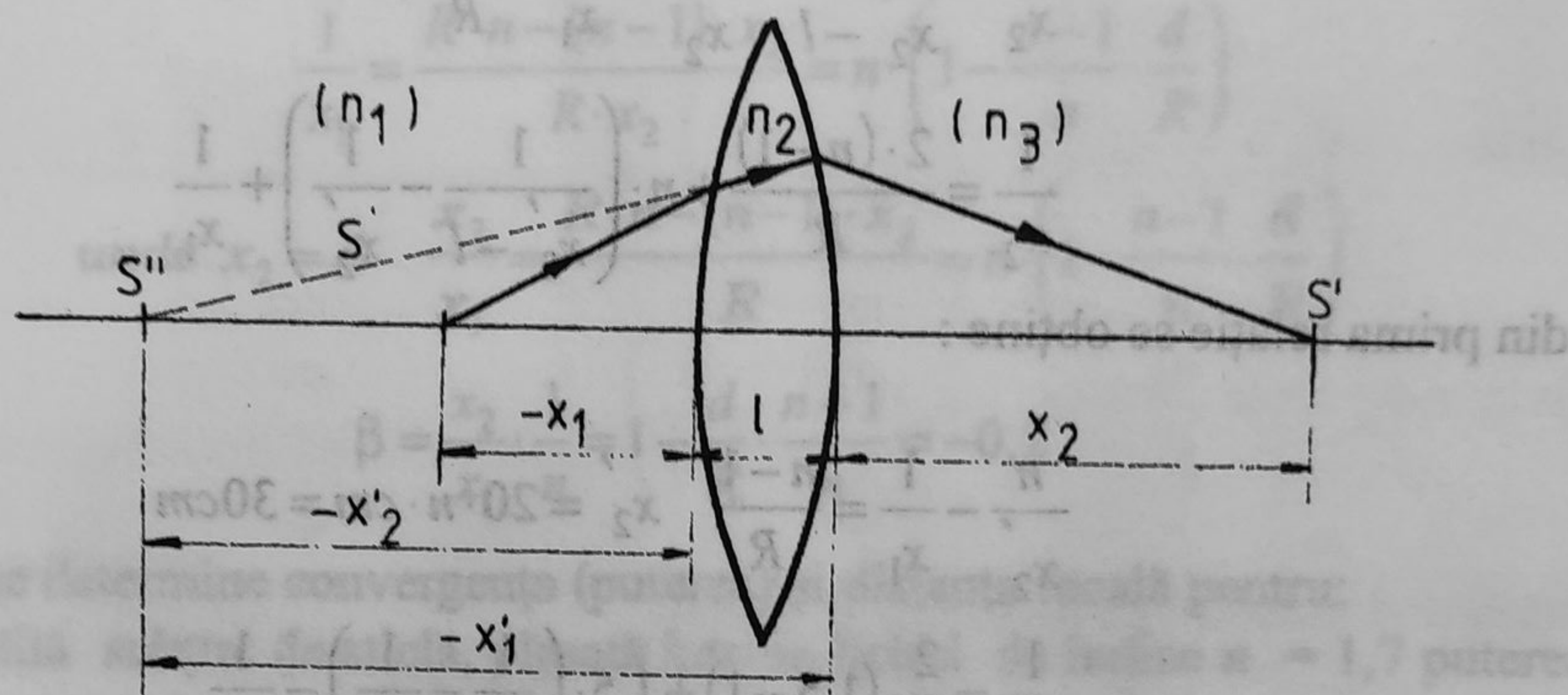


Fig. 103

Datele problemei:

$$x_1 = -20 \text{ cm} \quad l = 5 \text{ cm}$$

$$R_1 = 5 \text{ cm} \quad R_2 = -5 \text{ cm}$$

$$x_2 = ?$$

În desenul alăturat  $S''$  este imaginea obiectului punctual  $S$  în prima față a dioptrului (raza reală se află în mediul de indice  $n_2$ ).

$$(O_1) \quad \frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Imaginea  $S''$  este obiect pentru a doua față a dioptrului :

$$(O_2) \quad \frac{n_3}{x_2} - \frac{n_2}{x_1} = \frac{n_3 - n_2}{-R}$$



Adunând membru cu membru obținem :

$$\frac{n_3}{x_2} - \frac{n_2}{x_1} + \frac{n_2}{x_2'} - \frac{n_1}{x_1'} = \frac{n_2 - n_3}{R} + \frac{n_2 - n_1}{R}$$

$$-x_2' + l = -x_1' \quad x_1' = x_2' - l$$

$$\frac{n_3}{x_2} - \frac{n_2}{x_2' - l} + \frac{n_2}{x_2'} - \frac{n_1}{x_1'} = \frac{1}{R} \cdot (2 \cdot n_2 - n_3 - n_1)$$

Pentru lentilă în aer :

$$n_1 = n_3 = 1 \quad \text{și} \quad \frac{n_2}{n_1} = n$$

$$\frac{1}{x_2} - \frac{n}{x_2' - l} + \frac{n}{x_2'} - \frac{1}{x_1'} = \frac{1}{R} \cdot (2 \cdot n - 2)$$

$$\frac{1}{x_2} = \frac{2 \cdot (n - 1)}{R} + n \cdot \left( \frac{1}{x_2' - l} - \frac{1}{x_2'} \right) + \frac{1}{x_1'}$$

din prima relație se obține :

$$\frac{n}{x_2'} - \frac{1}{x_1'} = \frac{n - 1}{R} \quad x_2' = 20 \cdot n \cdot \text{cm} = 30 \text{cm}$$

$$\frac{1}{x_2} = \frac{2}{5} \cdot (1,5 - 1) + 1,5 \cdot \left( \frac{1}{25} - \frac{1}{30} \right) - \frac{1}{20}$$

$$x_2 = 6,2 \text{cm}$$

21. Un obiect este plasat înaintea unei fețe convexe a unei lentile de sticlă convex-plană, de grosime  $d = 9 \text{ cm}$ . Imaginea este formată pe fața plană a lentilei care servește de ecran. Să se determine mărirea transversală, dată fiind raza de curbură a feței convexe a lentilei dacă  $R = 2,5 \text{ cm}$ . (Irodov).

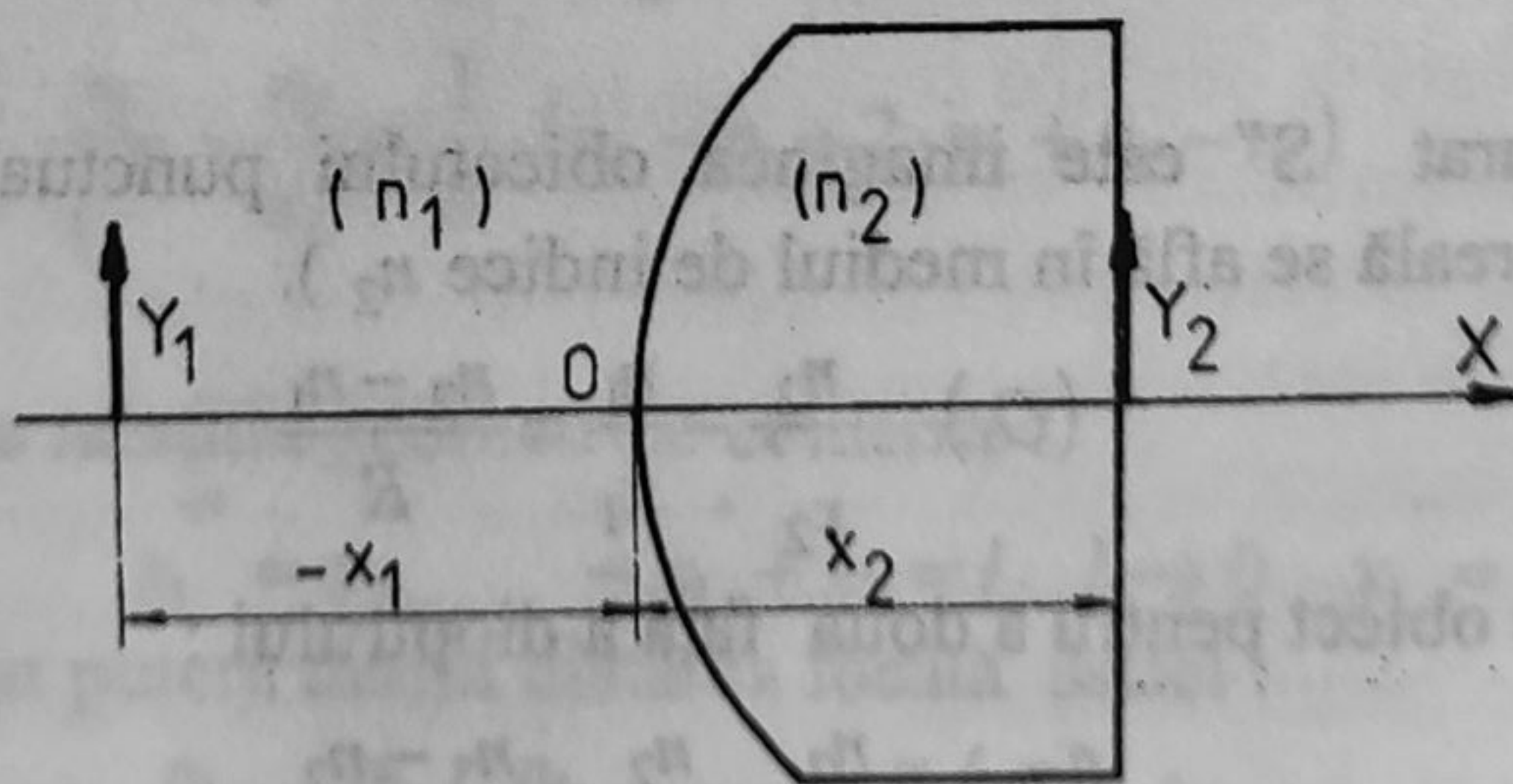


Fig. 104



Datele problemei:

$$R = 2,5 \text{ cm} \quad n = 1,5$$

$$d = x_2 = 9 \text{ cm}$$

$$\beta = ?$$

Aplicăm formula fundamentală a dioptrului plan :

$$\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad \beta = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{n_1}{n_2} \quad n = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_2 - n_1}{R} = \frac{n_1}{x_1} \quad \frac{1}{x_1} = \frac{n}{x_2} - \frac{n-1}{R}$$

$$\frac{1}{x_1} = \frac{R \cdot n - (n-1) \cdot x_2}{R \cdot x_2} = n \cdot \left( 1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{d}{R} \right)$$

$$\text{unde } x_2 = d \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{R \cdot n - (n-1) \cdot x_2}{R} = n \cdot \left( 1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{d}{R} \right)$$

$$\beta = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{d}{R} \cdot \frac{n-1}{n} = -0,2$$

22. Să se determine convergența (puterea) și distanța focală pentru:

a) o lentilă subțire de sticlă, plasată într-un lichid de indice  $n = 1,7$  puterea sa în aer fiind  $\Phi = 5 \delta$ ;

b) o lentilă subțire din sticlă ( $n = 1,5$ ), biconvexă, simetrică, la care o față este cufundată în aer, iar cealaltă în apă, având puterea în aer  $\Phi' = 10 \delta$ . (Irodov).

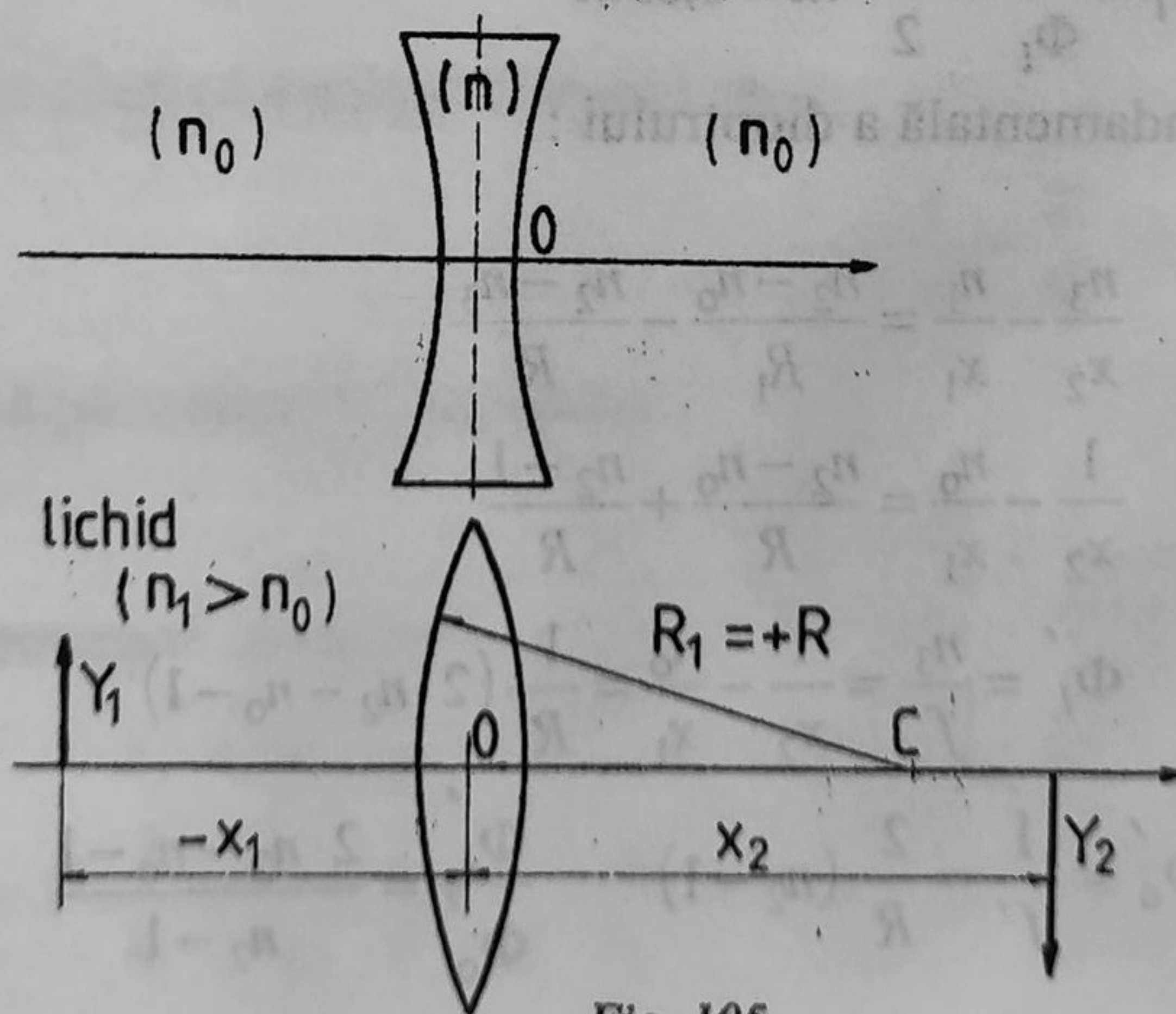


Fig. 105



Datele problemei:

$$\begin{aligned} a) \quad n_1 = n_0 = 1,7 \\ n_2 = n = 1,5 \\ \Phi_0 = -5\delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad n_2 = 1,5 \quad n_1 = 1 \\ n_3 = 1,33 \quad \Phi'_0 = 10\delta \end{aligned}$$

$$f_l = ? \quad \Phi_l = ?$$

$$f'_l = ? \quad \Phi'_l = ?$$

a) Deoarece convergența este negativă, este vorba de o lentilă biconcavă după cum se vede din figură. Definim convergența într-un mediu astfel:

$$\Phi = \frac{n_0}{f} = \frac{n_2 - n_0}{f} \cdot \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\text{In aer : } \Phi_0 = \frac{1}{f} = (n_2 - 1) \cdot \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\text{In lichid : } \Phi_l = \frac{n_0}{f'} = (n_2 - n_0) \cdot \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Împărțind membru cu membru, se obține:

$$\frac{\Phi_l}{\Phi_0} = \frac{n_2 - n_0}{n_2 - 1} \quad \Phi_l = \Phi_0 \cdot \frac{n_2 - n_0}{n_2 - 1} = 2 \cdot \delta$$

$$f_l = \frac{n_0}{\Phi_l} = \frac{1,7}{2} \cdot m = 0,85m$$

b) Aplicăm legea fundamentală a dioptrului :

$$\frac{n_3}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_0}{R_1} - \frac{n_2 - n_3}{R}$$

$$\frac{1}{x_2} - \frac{n_0}{x_1} = \frac{n_2 - n_0}{R} + \frac{n_2 - 1}{R}$$

$$\Phi'_l = \frac{n_3}{f'} = \frac{1}{x_2} - \frac{n_0}{x_1} = \frac{1}{R} \cdot (2 \cdot n_2 - n_0 - 1)$$

$$\Phi'_0 = \frac{1}{f'} = \frac{2}{R} \cdot (n_2 - 1) \quad \frac{\Phi'_l}{\Phi'_0} = \frac{2 \cdot n_2 - n_0 - 1}{n_2 - 1}$$



În aer:  $\Phi_l' = \Phi_o' \cdot \frac{2 \cdot n_2 - n_o - 1}{n_2 - 1} = 3\delta \quad f_l' = \frac{n_3}{\Phi_l'} = \frac{1,33}{3} m = 0,44m$

23. O lentilă subțire convergentă cu distanța focală de 25 cm, formează imaginea unui obiect pe un ecran care se găsește la distanța de 5 m de lentilă. Se apropie ecranul de lentilă cu  $\Delta l = 18$  cm. Cu cât trebuie deplasat obiectul pentru a obține din nou o imagine clară pe ecran. (Irodov).

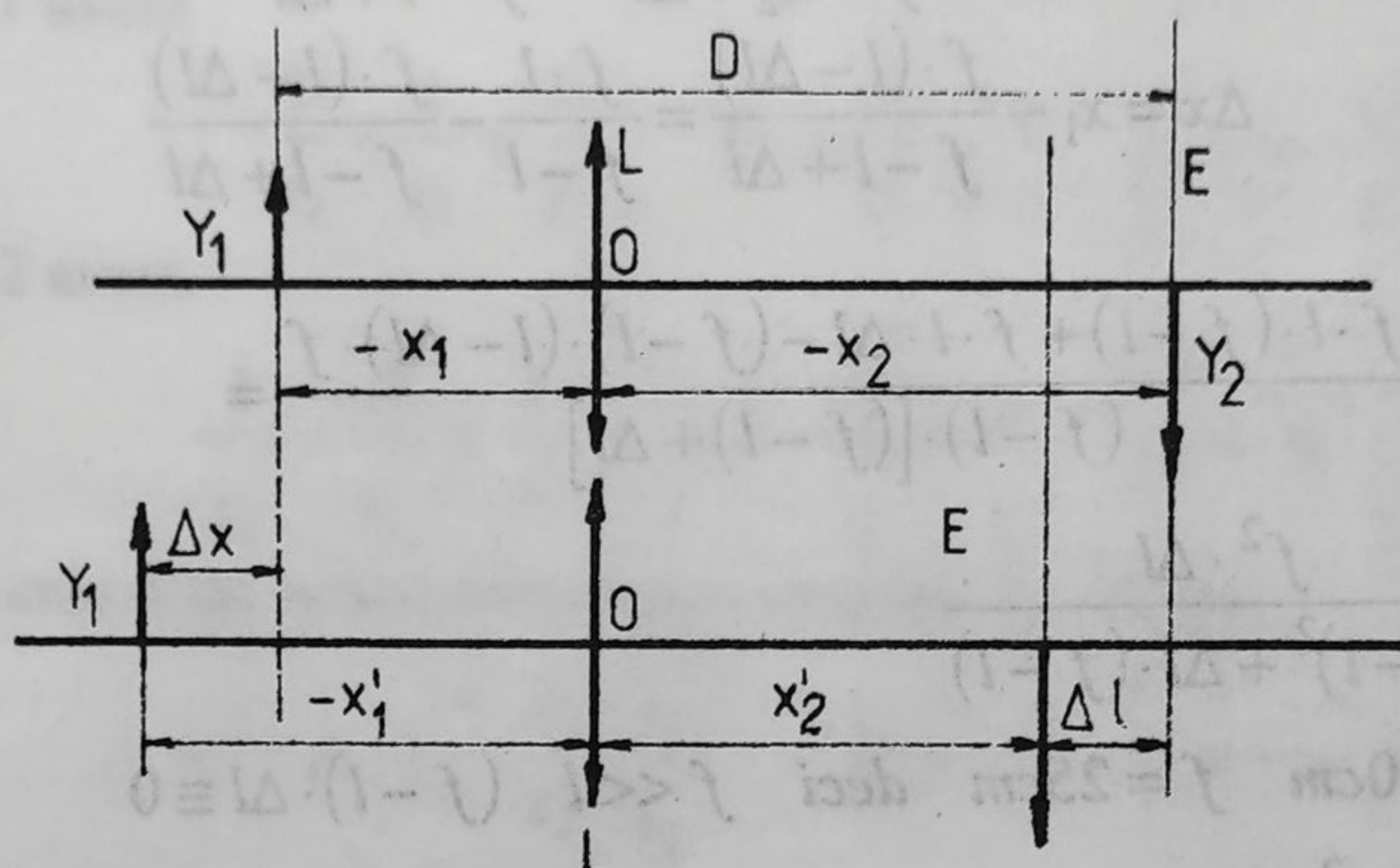


Fig. 106

Datele problemei:

$$f = 25\text{cm} \quad \Delta l = 18\text{cm}$$

$$l = x_2 = 5\text{m}$$

$$\Delta x = ?$$

Imaginea este clară pe ecranul E atunci când:

în aer: 
$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{2}{R} \cdot (n - 1) = \frac{1}{f}$$

Imagine clară pe ecranul E' înseamnă:

$$\frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1'} = \frac{2}{R} \cdot (n - 1) = \frac{1}{f}$$

Relațiile geometrice evidente:

$$x_2' + \Delta x = x_2 \quad \text{și} \quad -x_1' = -x_1 + \Delta l$$

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{f} = \frac{f - x_2}{f \cdot x_2} \quad x_2 = l \quad x_1 = \frac{f \cdot l}{f - l} = -26,3\text{cm}$$



$$x_2' = x_2 - \Delta l \quad x_1' = x_1 - \Delta l$$

$$\frac{1}{x_1 - \Delta x} = \frac{1}{x_2 - \Delta l} - \frac{1}{f} = \frac{f - x_2 + \Delta l}{f \cdot (x_2 - \Delta l)}$$

$$x_1 - \Delta x = \frac{f \cdot (x_2 - \Delta l)}{f - x_2 + \Delta l} = \frac{f \cdot (l - \Delta l)}{f - l + \Delta l}$$

$$\Delta x = x_1 - \frac{f \cdot (l - \Delta l)}{f - l + \Delta l} = \frac{f \cdot l}{f - l} - \frac{f \cdot (l - \Delta l)}{f - l + \Delta l}$$

$$\Delta x = \frac{f \cdot l \cdot (f - l) + f \cdot l \cdot \Delta l - (f - l) \cdot (l - \Delta l) \cdot f}{(f - l) \cdot [(f - l) + \Delta l]} =$$

$$= \frac{f^2 \cdot \Delta l}{(f - l)^2 + \Delta l \cdot (f - l)}$$

$$l = 500 \text{ cm} \quad f = 25 \text{ cm} \quad \text{deci} \quad f \ll l \quad (f - l) \cdot \Delta l \approx 0$$

$$\Delta x \approx \frac{f^2 \cdot \Delta l}{(f - l)^2} = 0,5 \text{ mm} \quad x_1' = x_1 - \Delta x = -263 - 0,5 = -263,5 \text{ mm}$$

24. Între obiect și ecran, ale căror poziții sunt fixe, este plasată o lentilă subțire convergentă. Deplasând lentila se găsesc două poziții pentru care imaginea pe ecran este clară. Determinați dimensiunea transversală a obiectului știind că dimensiunea imaginii pentru o poziție a lentilei este  $d' = 2 \text{ mm}$  și pentru cealaltă  $d'' = 4,5 \text{ mm}$ .

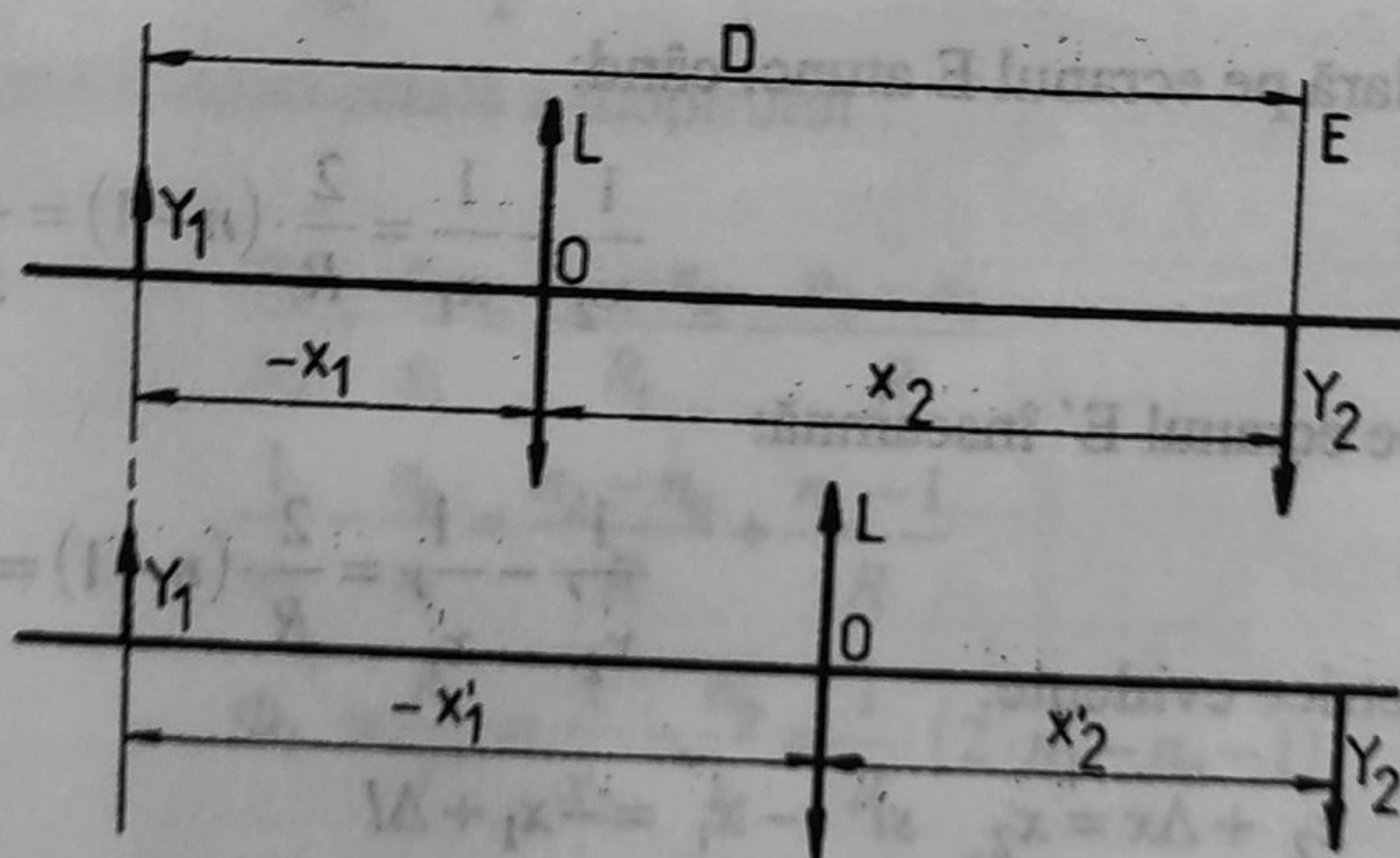


Fig. 107



Datele problemei:

$$y_2' = h' = 2\text{mm}$$

$$y_2 = h'' = 4,5\text{mm}$$

-----

$$y_1 = ?$$

In poziția 1 avem :

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \quad \beta_1 = \frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1} \quad y_1 = y_2 \cdot \frac{x_1}{x_2}$$

In poziția 2 avem :

$$\frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1'} = \frac{1}{f} \quad \beta_2 = \frac{y_2'}{y_1'} = \frac{x_2'}{x_1'} \quad y_1' = y_2' \cdot \frac{x_1'}{x_2'}$$

Inmulțind cele două relații, membru cu membru se obține :

$$y_1^2 = y_2 \cdot y_2' \cdot \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_1'}{x_2'} \quad D = -x_1 + x_2 = -x_1' + x_2'$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1'} \quad \text{cu } x_1 - x_2 = x_1' - x_2'$$

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{x_1' - x_2'}{x_1' \cdot x_2'}$$

Se obține după simplificare ;

$$x_1 \cdot x_2 = x_1' \cdot x_2' \quad x_1' = \frac{x_1 \cdot x_2}{x_2'}$$

$$\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_1'}{x_2'} = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{1}{x_2'} \cdot \frac{x_1 \cdot x_2}{x_2'} = \frac{x_1^2}{x_2'^2}$$

Din simetria construcției imaginilor:

$$x_1 = x_2' \quad y_1^2 = y_2 \cdot y_2' = h' \cdot h'' \quad y_1 = \sqrt{h' \cdot h''} = 3\text{mm}$$

25. Avem două lentile subțiri simetrice, una convergentă de indice  $n_1 = 1,7$  iar cealaltă divergentă de indice  $n_2 = 1,51$ . Fețele celor două lentile sunt lipite și plasate în apă. Se cere distanța focală a sistemului în apă.



Datele problemei:

$$n_1 = 1,7 \quad n_2 = 1,51$$

$$R = 10\text{cm}$$

$$f = ? \quad n_o = ?$$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{2}{R} \cdot \left( \frac{n_1}{n_o} - 1 \right) \quad \text{pentru lentila biconvexă}$$

$$\frac{1}{f_2} = -\frac{2}{R} \cdot \left( \frac{n_2}{n_o} - 1 \right) \quad \text{pentru lentila biconcavă}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{2}{R} \cdot \left( \frac{n_1}{n_o} - 1 - \frac{n_2}{n_o} + 1 \right)$$

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{R} \cdot \frac{n_1 - n_2}{n_o} \quad f = \frac{n_o \cdot R}{2 \cdot (n_1 - n_2)} = 35\text{cm}$$



## CAPITOLUL IV

### INSTRUMENTE OPTICE

#### 4.1. Tipuri de instrumente

Prin instrument optic înțelegem un ansamblu de piese optice montate astfel încât să formeze fie imagini reale pentru proiectarea lor pe un ecran, fie imagini virtuale ce se pot vedea cu ochiul. Deci instrumentele pot fi:

- **instrumente de proiecție;**

- **instrumente oculare.**

Piesele optice din componența lor pot fi: *lentile, oglinzi, prisme.*

Din punctul de vedere al alinierii pieselor optice la o axă de simetrie putem avea:

- **instrumente centrate;**

- **instrumente necentrate.**

**Sistemele centrate** - sunt formate numai din lentile și oglinzi care pot fi așezate cu centrele lor pe aceeași axă optică, în această categorie intrând luneta și microscopul.

**Sistemele necentrate** - sunt sisteme care conțin pe lângă lentile și oglinzi și prisme care schimbă axa optică cum sunt: binoclul, vizoarele de la aparate de fotografiat pretențioase, telemetru, periscop etc.

**Instrumentele de proiecție** - sunt formate în principal dintr-o *lentilă-obiectiv* care are rolul de a crea o imagine reală, mărită sau micșorată, după cum este nevoie, pe un ecran.

Spre exemplu, aparatul de proiecție cinematografică diaproiectorul, mărește imaginile în timp ce aparatul fotografic le micșorează pentru a putea fi înregistrate pe o pelicula îngustă.

**Instrumentele oculare** - sunt formate din două părți componente: obiectivul și ocularul.



**Obiectivul** are același rol ca și la instrumentele de proiecție: acela de a forma o imagine reală și mărită, corectată de aberații care să constituie obiect pentru ocular.

Obiectivul cel mai simplu este format dintr-o lentilă convergentă, dar se folosește rar sub această formă, datorită aberațiilor cromatice. De obicei este format din mai multe lentile unele convergente altele divergente pentru compensarea refracției diferite a luminii albe.

**Ocularul** este format din cel puțin o lentilă convergentă care are rolul de a forma o imagine virtuală a imaginii venite de la obiectiv. Rolul esențial al ocularului constă în aceea că face imaginea vizibilă direct cu ochiul. În afară de aceasta aduce o mărire suplimentară și eventual o îndreptare a imaginii când este necesar (vezi luneta Galilei).

*Obiectivul este îndreptat totdeauna către obiectul ce trebuie cercetat în timp ce ocularul este totdeauna apropiat de ochiul observatorului.*

## 4.2. Caracteristici optice

Instrumentele sunt caracterizate prin anumite mărimi privitoare la calitatea imaginilor și a puterii lor de mărire. Importanța acestor mărimi constă în aceea că permit alegerea celor mai potrivite instrumente pentru o aplicație dată.

**Mărirea liniară** - este raportul dintre dimensiunea liniară considerată a obiectului și aceeași dimensiune liniară a imaginii. Este de două feluri:

- *transversală* dacă se ia raportul distanțelor perpendiculare pe axa optică se notează cu  $\beta_{tr}$ ;

- *longitudinală* dacă se ia raportul distanțelor de-a lungul axei optice se notează cu  $\beta_{lg}$ .

$$\beta_{tr} = \frac{y_2}{y_1} \quad \beta_{lg} = \frac{\Delta x'}{\Delta x}$$

$\Delta x'$  - este imaginea lui  $\Delta x$

$y_2$  - este imaginea lui  $y_1$

Mărirea liniară caracterizează de obicei instrumentele de proiecție.

**Grosismentul** - este un raport care arată de câte ori este mai mare tangenta unghiului sub care se vede un obiect prin instrument, decât tangenta unghiului sub care se vede obiectul cu ochiul liber de la distanța minimă normală de vedere clară ( $d = 25 \text{ cm}$ ).

$$G = \frac{\text{tg}\alpha_2}{\text{tg}\alpha_1} \text{ pentru unghiuri mici } G \equiv \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$



În figura de mai jos se arată cele două unghiuri:

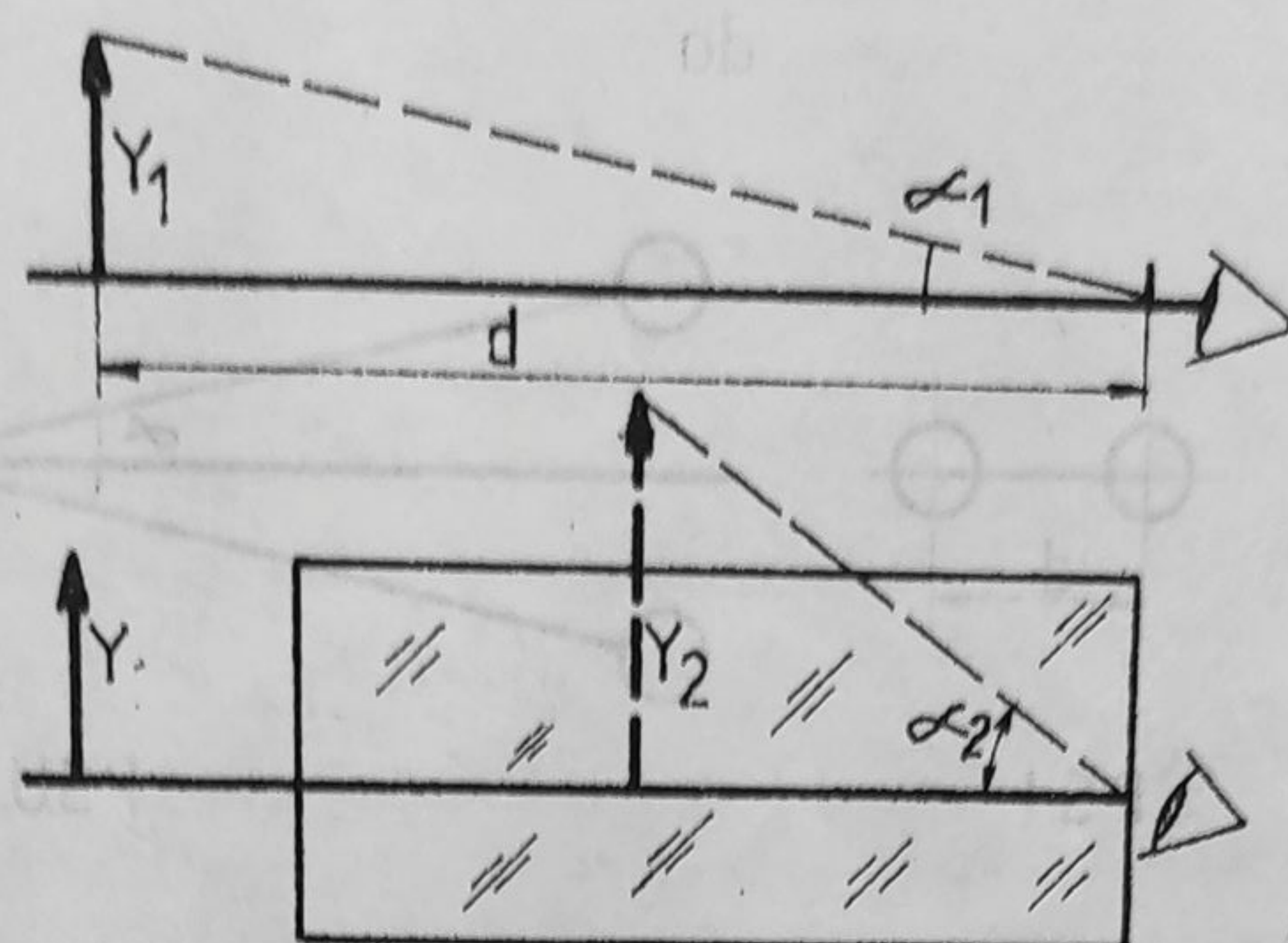


Fig. 108

După cum vedem grosimentul caracterizează instrumentele oculare. Deși  $G$  nu are unități de măsură, se pune semnul  $X$  după cifra respectivă și se citește *ori*. De exemplu,  $G=200X$  înseamnă că unghiul sub care apare imaginea prin instrument este de 200 *ori* mai mare decât unghiul de vedere directă.

**Puterea optică**-caracterizează puterea de convergență a lentilelor și în același timp și efectul măririi:

$$P = \frac{\text{tg} \alpha_2}{y_1}$$

unde  $y_1$  este mărimea obiectului, așezat perpendicular pe axa optică astfel ca ochiul să vadă imaginea lui fără acomodare.

$$[P]_{SI} = m^{-1} = \delta(\text{dioptrie})$$

Deci puterea optică se măsoară tot în dioptrii și această mărime caracterizează instrumentele oculare.

**Puterea separatoare** - este mărimea care caracterizează proprietatea instrumentului de a reda distincte pentru privire două puncte obiect apropiate. Este de două feluri:

- **putere separatoare liniară** ( $P_{sl}$ ) egală cu distanța minimă dintre punctele obiect ce mai pot fi văzute distinct. Puterea separatoare liniară a ochiului este de maxim  $10 \mu m$  deci ochiul poate vede distincte punctele îndepărtate mai mult de  $10 \mu m$ .

- **putere separatoare unghiulară** ( $P_{su}$ ) este egală cu unghiul minim dintre razele care sosesc de la două puncte obiect ce pot fi văzute distinct. Pentru ochiul normal această putere separatoare unghiulară este de  $60''$  de



arc. În figura următoare se srată unghiul minim și distanța minimă dintre două puncte.

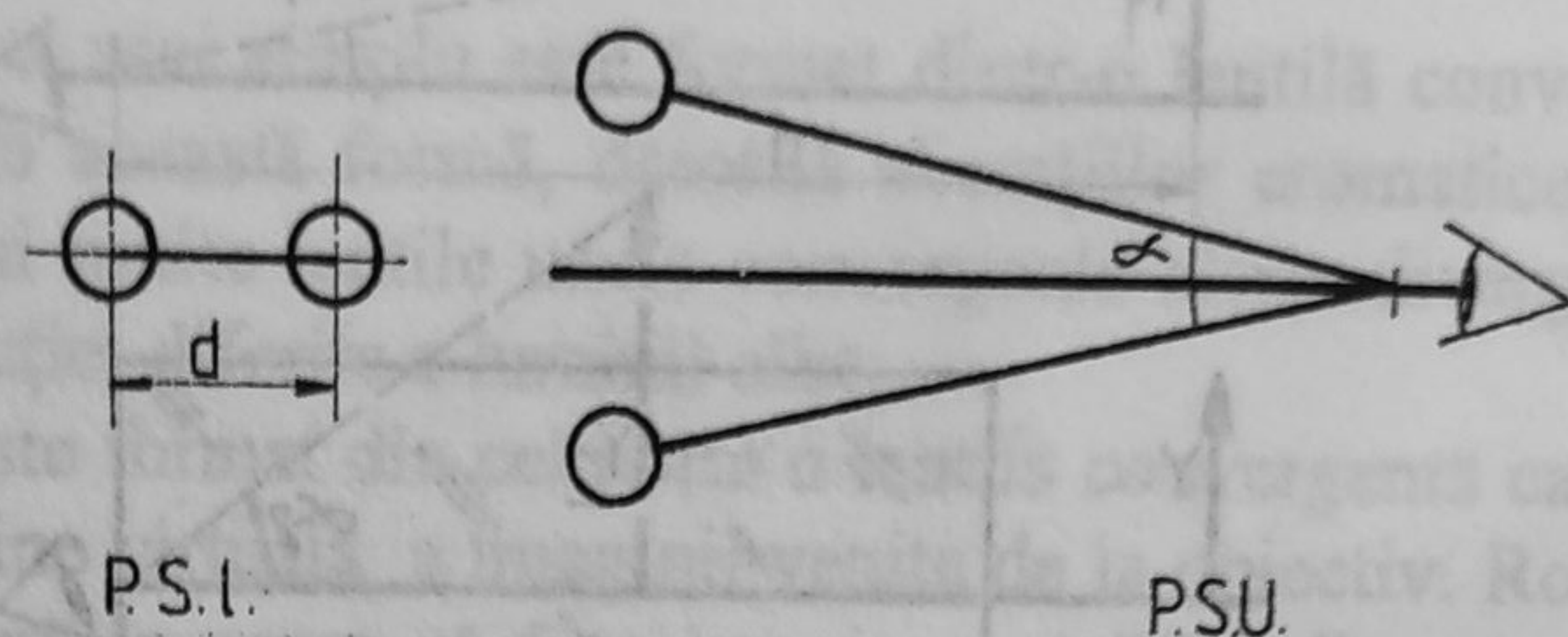


Fig. 109

### 4.3. Ochiul omenesc

#### 4.3.1. Construcția ochiului

Din punct de vedere optic, ochiul poate fi considerat ca un sistem optic centrat deoarece are țesuturi transparente care conduc lumina și formează imagini reale pe retină.

Ochiul este compus din *sclerotică* și *coroidă*, țesuturi subțiri, rezistente în care se găsesc **piesele optice**: *corneea*, *umoare apoasă*, *cristalinul*, *irisul*, *umoarea sticloasă*, *retina* și *nervul optic* după cum se poate vedea pe figura următoare.

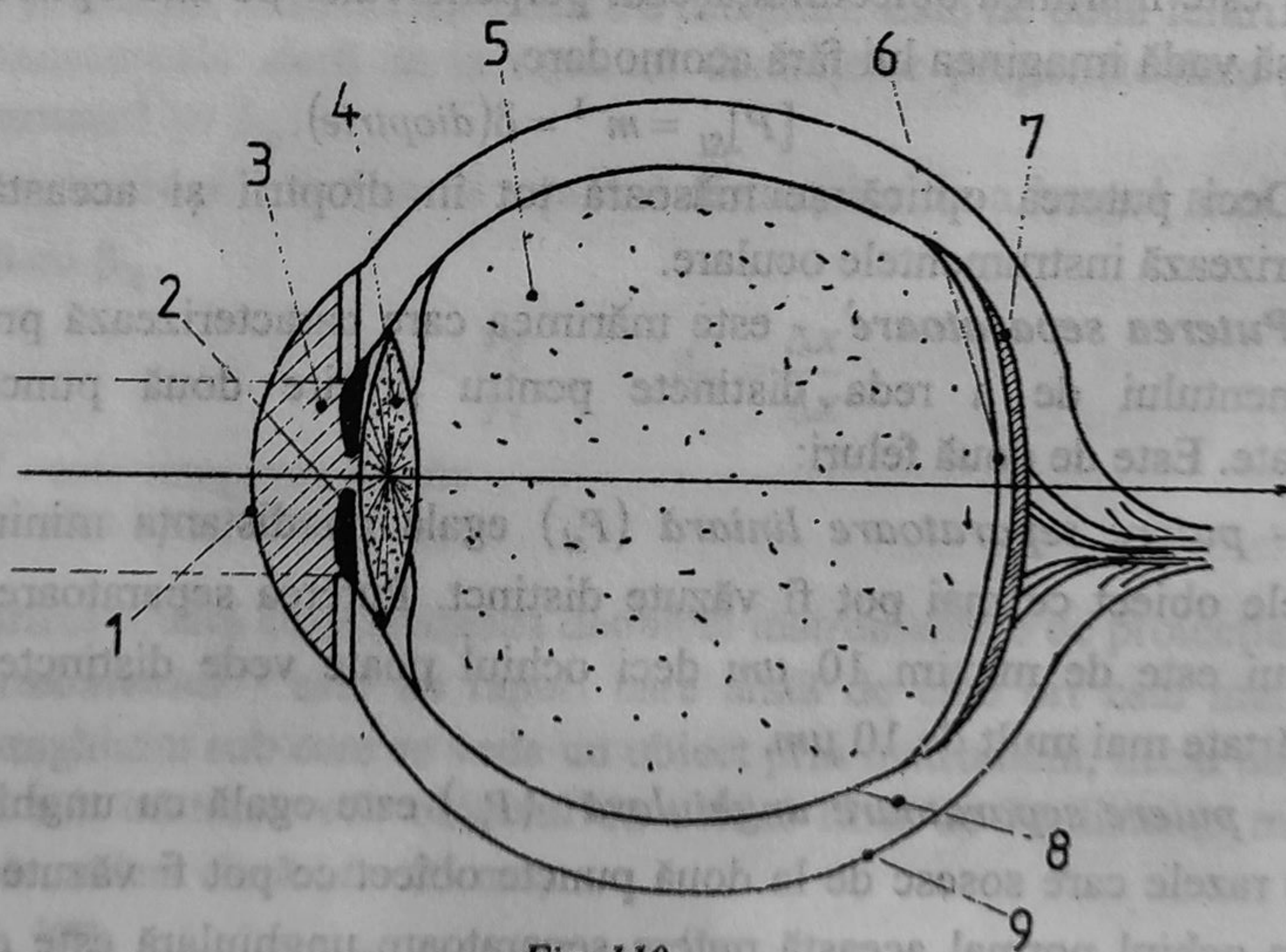


Fig. 110



**Corneea** - (1) este un țesut transparent sub forma unei calote sferice, protejează cristalinul de corpurile străine: praf, fum, ceață, etc.

**Irisul** - (2) este o diafragmă colorată care dă *culoarea ochilor*, cu o deschidere circulară numită *pupilă* care determină prin micșorare mărimea fluxului de lumină incident pe retină.

**Umoarea apoasă** - (3) este un lichid situat în spatele corneei și are un indice de refracție de 1,33.

**Cristalinul** - (4) este un țesut transparent situat la 4 mm în spatele corneei, are forma lenticulară și îndeplinește aceleași funcții ca și o lentilă convergentă, deosebindu-se de cele de sticlă prin aceea că are distanța focală variabilă. Mușchii cu care este prevăzut cristalinul prin contracție sau extensie pot modifica curbura și deci distanța focală.

**Umoarea sticloasă** - este un mediu optic cu indice de refracție de 1,33 ce conduce lumina pe retină, după cum se vede în figură.

**Retina** - este un țesut format din celule sensibile la lumină așezate în două straturi:

- stratul de la suprafață unde sunt celule numite *bastonașe*, din cauza formei lor;

- stratul de dedesubt este format din celule numite *conuri*, tot datorită formei lor.

Aceste celule conțin o substanță chimică numită *porfirină* care se descompune în prezența luminii, substanțele rezultate acționând asupra prelungirilor nervului optic într-un mod specific. Informația este apoi trimisă la creier dând senzația de lumină în fiecare punct de pe retină.

Elementul esențial din punct de vedere optic este *cristalinul* care este o lentilă biconvexă (deci convergentă) cu indice de refracție de 1,405 și cu distanța focală variabilă.

La ochiul normal, imaginea unui obiect situat la infinit se formează pe retină la 15 mm de cristalin, distanță egală cu distanța focală a acestuia. Cristalinul are deci o convergență minimă:

$$C_0 = \frac{1000}{15} \cdot \delta = 67 \cdot \delta$$

Când privește un obiect mai apropiat, cristalinul își micșorează distanța focală acționând mușchii oculari. Modificarea distanței focale (deci și a convergenței) în scopul aducerii pe retină a imaginii, se numește *acomodare*.



Valoarea maximă și minimă a distanței focale produsă de mușchii oculari în scopul aducerii pe retină a imaginii caracterizează o mărime numită **putere de acomodare** pe care o notăm cu  $\Delta C$  sau  $A$  și se definește astfel:

$$A = \frac{1}{f_{\min}} - \frac{1}{f_{\max}} \quad \Delta C = C_{\max} - C_{\min}$$

Dacă distanța focală a cristalinului variază astfel încât se produce o variație de convergență  $\Delta C = 4\delta$  se spune despre puterea de acomodare că este normală, bună.

#### 4.3.2. Defecte de vedere

Oamenii cu putere de acomodare mică se plâng că au *vederea slăbită*, înțelegând o vedere scurtă (*miopia*) sau lungă (*prezbitismul*).

La *ochiul prezbit* ca și la cel *hipermetrop* sau *miop*, această putere de acomodare este mică, de una, două dioptrii sau chiar nulă, în jurul unei distanțe focale remanente datorită sclerozării mușchilor oculari.

- La **defectul de prezbitism** - puterea de acomodare slăbește cu vârsta (sau datorită bolilor), cristalinul păstrând datorită obișnuinței de a privi la depărtare sau a sclerozei, o distanță focală permanentă mare.

Când privește obiecte mai apropiate, imaginea se formează în spatele retinei și prezbitul nu mai vede clar, datorită sclerozării mușchilor oculari, cristalinul nu mai poate fi bombat, deci imaginea nu mai poate fi adusă pe retină.

- La **defectul de hipermetropie** - se produc aceleași efecte, dar cauza se datorează fie bolii, fie provine din naștere cu acest defect.

- La **defectul de miopie** - distanța focală a cristalinului rămâne mică datorită obișnuinței de a privi la distanță mică. Puterea de acomodare normală de  $4\delta$  nu este suficientă readucerii imaginii pe retină. De asemenea, micșorarea puterii de acomodare poate fi concomitentă sau nu cu instalarea miopiei. Privind obiectele îndepărtate, imaginea lor se formează în fața retinei și miopul nu le vede clar, puterea de acomodare redusă nu permite aducerea imaginii pe retină.

În figura următoare se arată formarea imaginilor în ochiul prezbit și în ochiul miop.



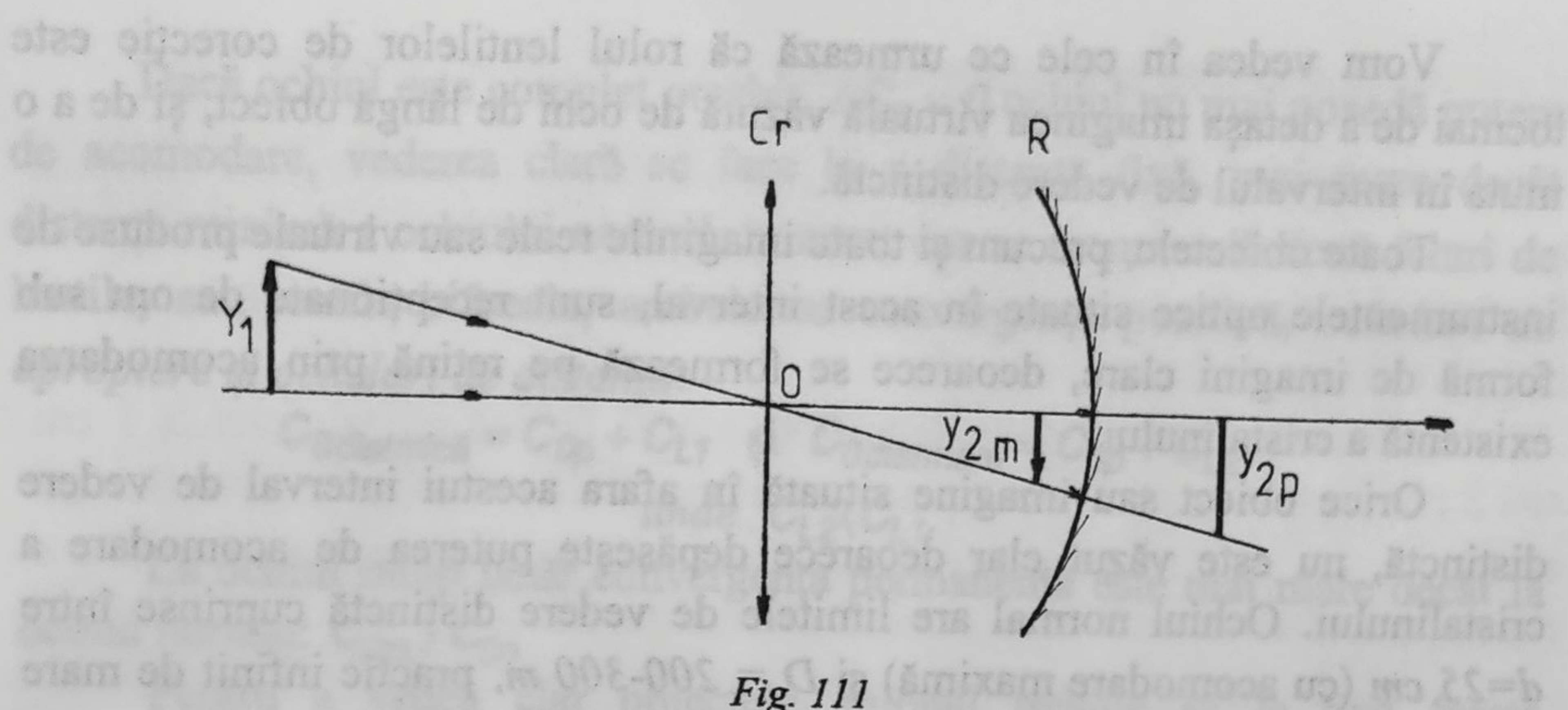


Fig. 111

Se definește pentru ochiul normal:

- o *distanță maximă de vedere* clară numită **punctum remotum** notată cu  $D$ , la care ochiul privește fără acomodare;
- o *distanță minimă de vedere clară* numită **punctum proximum** notată cu  $d$  la care ochiul privește cu acomodare maximă.

Aceste două distanțe determină un interval  $(d, D)$  numit **interval de vedere distinctă**, sau de vedere clară, iar cele două extreme, **limite de vedere distinctă** și sunt prezentate în figură:

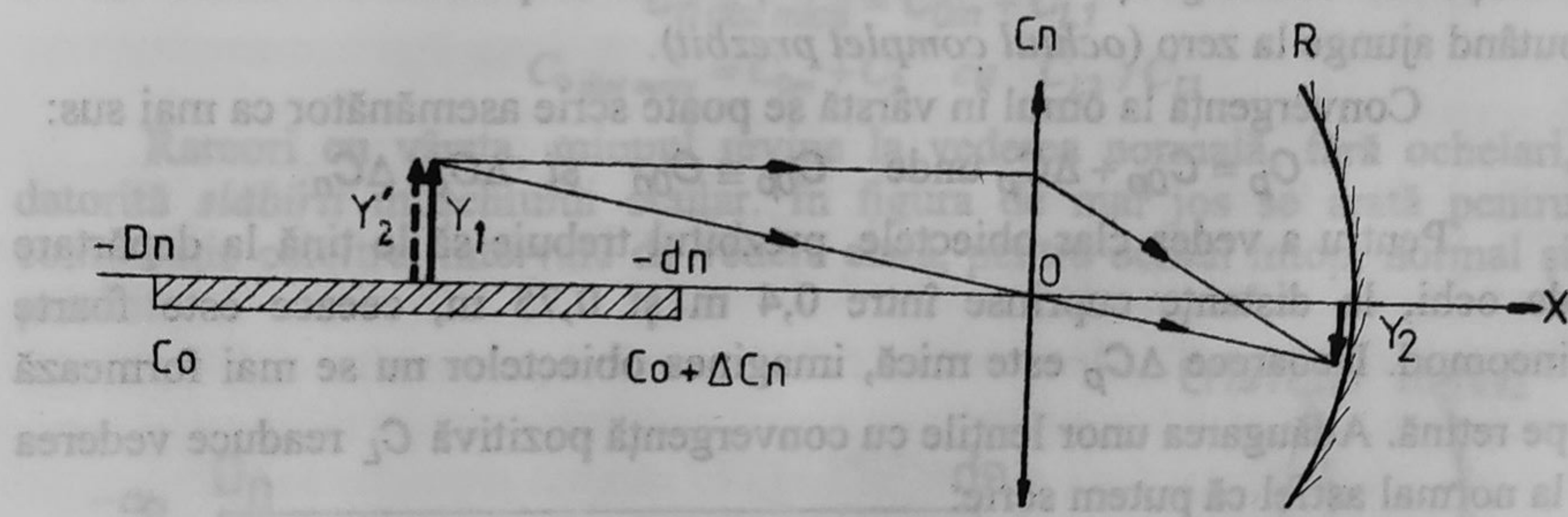


Fig. 112

La un ochi normal imaginea reală  $Y_2$  ce se formează pe retină este răsturnată, ochiul vede imaginea sa  $Y_2'$  lângă obiectul  $Y_1$ , la intersecția prelungirilor ultimelor raze ce ajung la cristalin, deci în același loc cu obiectul. Pe desen se arată obiectul și imaginea văzută de ochi în același loc situat în intervalul de vedere clară.



Vom vedea în cele ce urmează că rolul lentilelor de corecție este tocmai de a detașa imaginea virtuală văzută de ochi de lângă obiect, și de a o muta în intervalul de vedere distinctă.

Toate obiectele, precum și toate imaginile reale sau virtuale produse de instrumentele optice situate în acest interval, sunt recepționate de om sub formă de imagini clare, deoarece se formează pe retină prin acomodarea existentă a cristalinului.

Orice obiect sau imagine situată în afara acestui interval de vedere distinctă, nu este văzut clar deoarece depășește puterea de acomodare a cristalinului. Ochiul normal are limitele de vedere distinctă cuprinse între  $d=25\text{ cm}$  (cu acomodare maximă) și  $D = 200-300\text{ m}$ , practic infinit de mare față de distanța focală a cristalinului.

Se ia distanța de 25 cm și nu de 15 cm deoarece ochiul normal, deși poate vedea clar și la aceasta distanță, obosește mai repede. Din acest motiv această distanță se mai numește și *distanță a vederii optime*.

Deplasând privirea de la *punctum remotum* ( $-D$ ) la *punctum proximum* ( $-d$ ), convergența cristalinului se mărește treptat și spontan de la  $C_0$  la  $C$  iar distanța focală a cristalinului se micșorează în mod corespunzător de la  $f_{\max}$  la  $f_{\min}$ . Putem scrie pentru ochiul normal:  $C_n = C_{0n} + \Delta C_n$

După cum am mai spus,  $C_{0n} = 67$  dioptrii pentru ochiul normal, iar variația de convergență este de  $\Delta C_n = 4\delta$  dioptrii. La persoanele în vârstă variația de convergență este mai mică, decât la persoanele tinere uneori putând ajunge la zero (*ochiul complet prezbit*).

Convergența la omul în vârstă se poate scrie asemănător ca mai sus:

$$C_p = C_{0p} + \Delta C_p \text{ unde } C_{0p} \equiv C_{0n} \text{ și } \Delta C_p < \Delta C_n.$$

Pentru a vedea clar obiectele, prezbitul trebuie să le țină la depărtare de ochi, la distanțe cuprinse între 0,4 m și 0,75 m, ceea ce este foarte incomod. Deoarece  $\Delta C_p$  este mică, imaginea obiectelor nu se mai formează pe retină. Adăugarea unor lentile cu convergență pozitivă  $C_L$  readuce vederea la normal astfel că putem scrie:

$$C_n = C_p + C_L = C_{0p} + (\Delta C_p + C_L)$$

Comparând cu relațiile de mai sus:

$$\Delta C_n = \Delta C_p + C_L$$

putem spune că prezența lentilei readuce ochiul sclerosat de vârstă la o convergență, normală, ceea ce permite apropierea obiectelor de ochi.



Dacă ochiul este complet prezbit,  $\Delta C_p = 0$  ochiul nu mai posedă putere de acomodare, vederea clară se face la o distanță fixă, mai mare decât distanța minimă a ochiului normal, în acest caz se recomandă două feluri de lentile, sau lentile bifocale, ambele cu convergența pozitivă, *ochelari de apropiere* și *ochelari de distanță*:

$$C_{0 \text{ dist mică}} = C_{0p} + C_{L1} \text{ și } C_{0 \text{ dist mare}} = C_{0p} + C_{L2}$$

$$\text{unde } C_{L2} < C_{L1}.$$

La ochiul miop tânăr, convergența permanentă este mai mare decât la ochiul normal:  $C_{0m} > C_{0n}$

Pentru a vedea clar obiectele, miopul trebuie să le țină foarte aproape de ochi, deoarece puterea de acomodare existentă nu este suficientă pentru aducerea imaginii pe retină, de aceea se pun lentile cu convergență negativă ( $C_L < 0$ ):

$$C_m = C_{0m} + \Delta C_m$$

$$C_n = C_m + C_L = C_{0m} + (\Delta C_m + C_L)$$

$$\Delta C_n = \Delta C_m + C_L$$

Și aici se poate spune că prezența lentilei divergente readuce ochiul la convergență normală. Pentru miopul vârstnic  $\Delta C_m = 0$  și vederea clară se face la o distanță fixă mai mică decât distanța normală. Se recomandă fie lentile bifocale, fie *ochelari de distanță* și *ochelari de apropiere*. Acest miop este complet prezbit.

$$C_{0 \text{ dist mică}} = C_{0m} + C_{L1}$$

$$C_{0 \text{ dist mare}} = C_{0m} + C_{L2} \text{ cu } C_{L2} > C_{L1}$$

Rareori cu vârsta, miopul revine la vederea normală, fără ochelari, datorită *slăbirii* mușchiului ocular. În figura de mai jos se arată pentru comparație cele trei intervale de vedere clară, pentru ochiul miop, normal și prezbit

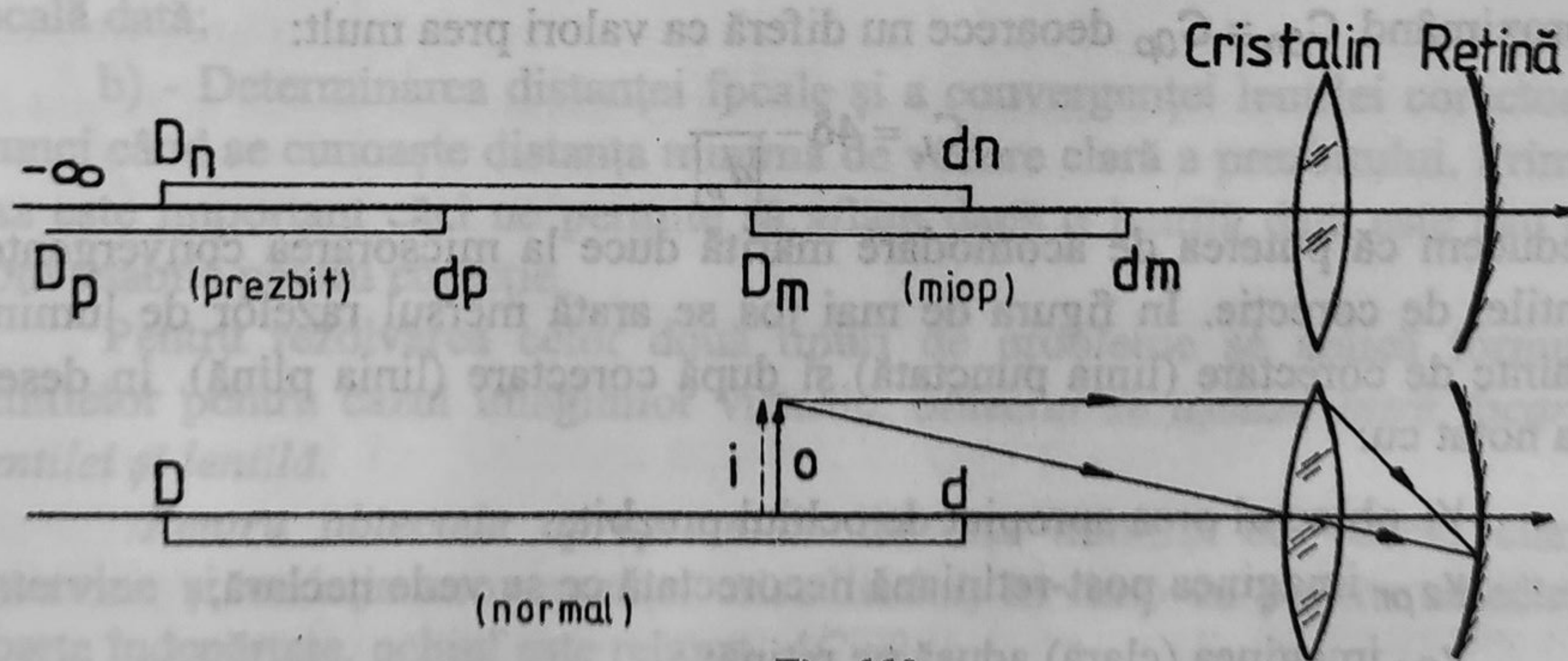


Fig. 113



### 4.3.3. Corectarea prezbitismului

**Prezbitismul** se corectează cu ajutorul lentilelor convergente (dioptrii pozitive), deoarece convergența suplimentară a lentilelor, aduce imaginea formată de cristalin în spatele retinei, din nou pe retină, astfel că imaginea este văzută din nou clar.

Lentilele de corecție (ochelarii) se așează în fața cristalinului la 1 cm sau 2 cm depărtare, produc o convergență prealabilă a razelor de lumină ( $C_L$ ) astfel ca să se compenseze exact pierderea de putere de acomodare (variație de convergență mică), datorită îmbătrânirii.

$$C_L = C_n - C_p = \Delta C_n - \Delta C_p = 4\delta - (C_{p\text{ prox}} - C_{p\text{ remot}})$$

Am folosit formula lentilelor pentru convergențele:

$$C_{p\text{ prox}} = \frac{1}{f_{pp}} = \frac{1}{d_p} - \frac{1}{d_n} \quad \text{cu} \quad C_{p\text{ remot}} = \frac{1}{f_{pr}} = \frac{1}{D_p} - \frac{1}{d_n} \quad \text{fără acomodare.}$$

Pentru obiectul situat la  $d_n$  cu acomodare, imaginea este situată la  $d_p$ . Pentru un obiect situat la  $d_n$ , fără acomodare, imaginea este situată la distanța  $D_p \rightarrow \infty$ .

Variația de convergență măsoară tocmai puterea de acomodare:

$$\Delta C_p = C_{p\text{ prox}} - C_{p\text{ remot}} = \frac{1}{f_{pp}} - \frac{1}{f_{pr}} = \frac{1}{d_p} - \frac{1}{D_p}$$

$$\Delta C_p = \frac{1}{d_p} - \frac{1}{D_p} \quad \text{de regulă } D_p \rightarrow \infty.$$

Rezultă deci pentru prezbiți:  $\Delta C_p = \frac{1}{d_p}$

În concluzie:

Aproximând  $C_{0n} \equiv C_{0p}$  deoarece nu diferă ca valori prea mult:

$$C_L = 4\delta - \frac{1}{d_p}$$

Deducem că puterea de acomodare mărită duce la micșorarea convergenței lentilei de corecție. În figura de mai jos se arată mersul razelor de lumină înainte de corectare (linia punctată) și după corectare (linia plină). În desen s-a notat cu:

$Y_1$  obiectul prea apropiat de ochiul prezbit;

$Y_{2pr}$  imaginea post-retiniană necorectată ce se vede neclară;

$Y_{2r}$  imaginea (clară) adusă pe retină;



$y_{2v}$  imaginea virtuală văzută de ochi în prelungirea ultimelor raze ce ajung la acesta, care la punerea ochelarilor s-a desprins de  $Y_1$  și se situează în intervalul de vedere distinctă al prezbitului.

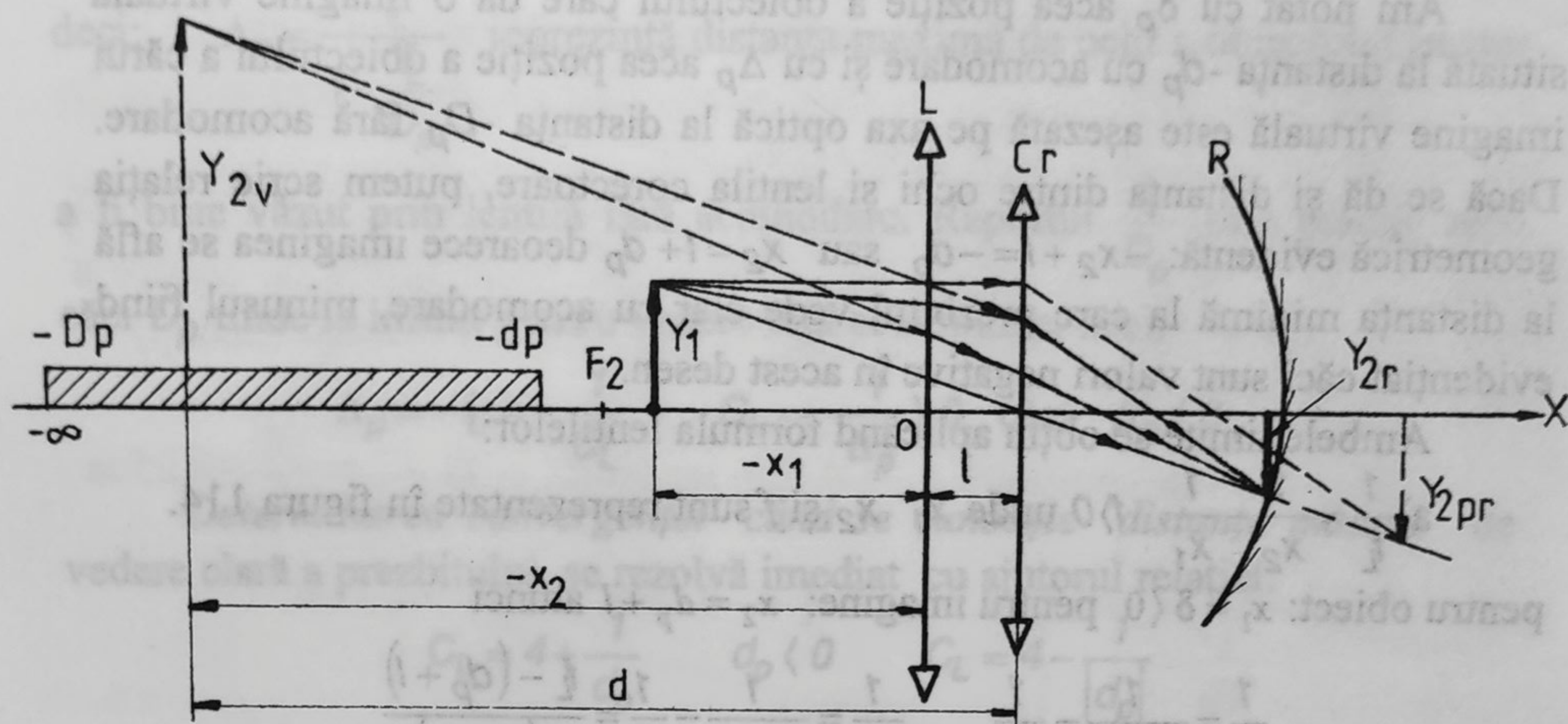


Fig. 114

Când obiectul se găsește chiar în focarul lentilei, imaginea virtuală  $y_{2v}$  se formează la infinit unde ochiul privește fără acomodare. Când imaginea  $y_{2v}$  se află la distanță minimă  $d_p$ , ochiul vede această imagine cu acomodarea maximă a ochiului prezbit.

Se pot efectua, rezolva, două tipuri importante de probleme legate de corecția prezbitismului:

a) - Determinarea intervalului de situare a obiectului astfel încât să poată fi văzut clar prin intermediul unei lentile corectoare cu distanța focală dată;

b) - Determinarea distanței focale și a convergenței lentilei corectoare atunci când se cunoaște distanța minimă de vedere clară a prezbitului. Primul caz este important căci ne permite să aflăm dacă o lentilă dată este sau nu convenabilă pentru corecție.

Pentru rezolvarea celor două tipuri de probleme se aplică formula lentilelor pentru cazul imaginilor virtuale: *obiectul se așează între focarul lentilei și lentilă.*

*Pentru obiectele apropiate de distanța minimă de vedere clară, intervine și variația convergenței cristalinului, în timp ce pentru obiectele foarte îndepărtate, ochiul este relaxat,  $\Delta C=0$ .*



Prin folosirea ochelarilor, intervalul de situare al obiectelor, va fi mărginit de extremitățile  $-\delta_p$  și  $-\Delta_p$  care se află în legătură directă cu limitele  $d_p$  și  $D_p$  ale vederii cu ochiul liber.

Am notat cu  $\delta_p$  acea poziție a obiectului care dă o imagine virtuală situată la distanța  $-d_p$  cu acomodare și cu  $\Delta_p$  acea poziție a obiectului a cărui imagine virtuală este așezată pe axa optică la distanța  $-D_p$  fără acomodare. Dacă se dă și distanța dintre ochi și lentila corectoare, putem scrie relația geometrică evidentă:  $-x_2 + l = -d_p$  sau  $x_2 = l + d_p$  deoarece imaginea se află la distanța minimă la care prezbitul vede clar cu acomodare, minusul fiind evidențiat căci sunt valori negative în acest desen.

Ambele limite se obțin aplicând formula lentilelor:

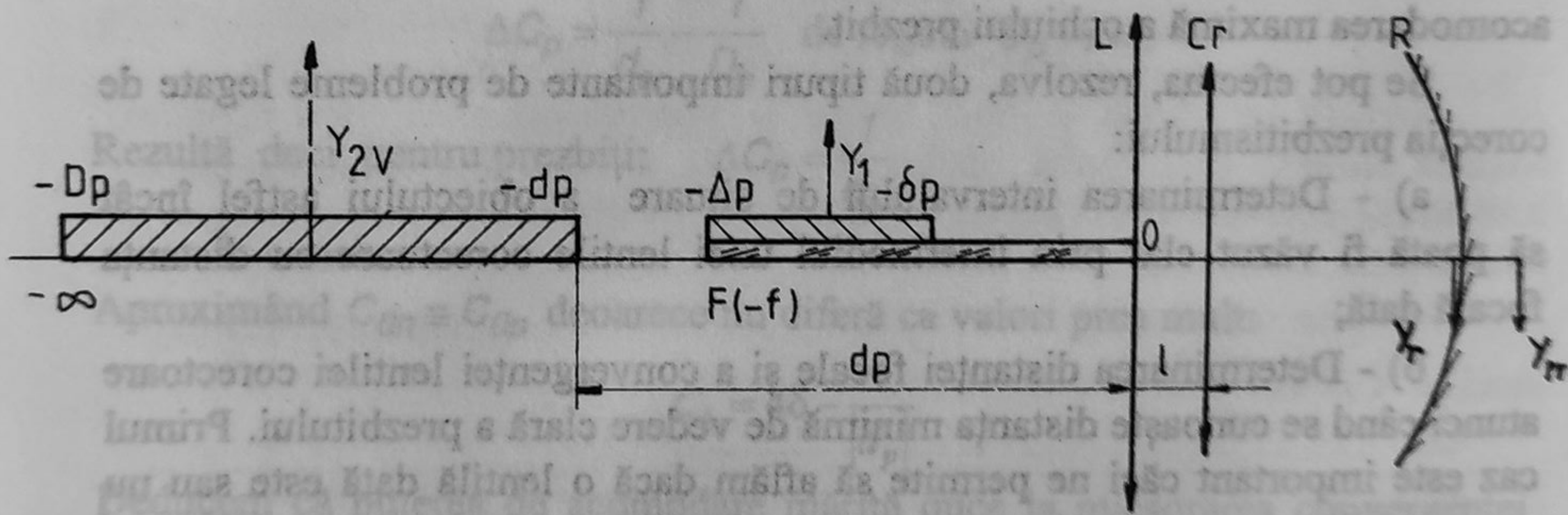
a)  $\frac{1}{f_L} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}$  în 0 unde  $x_1$ ,  $x_2$  și  $f$  sunt reprezentate în figura 114.

pentru obiect:  $x_1 = \delta < 0$  pentru imagine:  $x_2 = d_p + l$  atunci

$$\frac{1}{f_L} = \frac{1}{d_p + l} - \frac{1}{\delta_p} \quad \frac{1}{\delta_p} = \frac{1}{d_p + l} - \frac{1}{f_L} = \frac{f_L - (d_p + l)}{f \cdot (d_p + l)_L}$$

iar pentru  $l=0$   $\delta_p = \frac{-f_L}{1 - \frac{f_L}{d_p}}$  reprezintă distanța minimă de ochi a obiectului

pentru a fi bine văzut prin lentilă cu acomodare.



*Fig. 115*

b) În mod asemănător obținem  $\Delta_p$ :

$$\frac{1}{f_L} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}$$

unde pentru obiect  $x_1' = \Delta_p < 0$  și pentru imagine  $x_2' = D_p < 0$



$$\frac{1}{f_L} = \frac{1}{D_p} - \frac{1}{\Delta_p} \quad \frac{1}{\Delta_p} = \frac{f_L - D_p}{f_L \cdot D_p}$$

deci:  $\Delta_p = \frac{-f_L}{1 - \frac{f_L}{D_p}}$  reprezintă distanța maximă de ochi a obiectului pentru

a fi bine văzut prin lentilă fără acomodare. Raportul  $\frac{f_L}{D_p}$  este practic zero căci  $D_p$  tinde la infinit pentru vedere fără acomodare, deci:

$$\Delta_p = -f_L = -\frac{1}{C_L} \quad C_L = -\frac{1}{\Delta_p} > 0 \quad \text{căci} \quad \Delta_p < 0.$$

*Determinarea convergenței când se cunoaște distanța minimă de vedere clară a prezbitului, se rezolvă imediat cu ajutorul relației:*

$$C_L = 4 + \frac{1}{d_p} \quad d_p < 0 \quad C_L = 4 - \frac{1}{|d_p|}$$

De aici o metodă practică de determinare a convergenței lentilei corectoare pentru prezbiții normali:

- Se măsoară cu o riglă distanța minimă de la care ochiul liber începe să vadă clar, fără oboseală se obține tocmai  $d_p$  exprimată în metri care se introduce în formula de mai sus.

Cu o astfel de metodă se acoperă un interval de situare a obiectelor  $(-\delta_p, -\Delta_p)$  mai mare în jurul distanței normale de citire, care se face cu acomodare (dacă ochiul nu este complet prezbit).

b) *Determinarea distanței maxime de situare a unui obiect pentru vedere clară fără acomodare.*

Este o metodă, utilă pentru ochiul complet prezbit și constă în alegerea unei distanțe focale pentru lentila corectoare, astfel ca imaginea unui obiect să se afle la infinit unde ochiul privește fără acomodare:

$$f_L = \Delta_p \quad \text{deci} \quad C_L = \frac{1}{\Delta_p}$$

În acest caz se obține o citire clară pentru distanțe mai mici decât distanța focală.

**Exemplul 1** - Distanța minimă la care poate citi un prezbit este de 0,75 cm, cu acomodare. Să se calculeze convergența lentilei corectoare în cazul când ochiul are putere de acomodare și în cazul ochiului complet prezbit.



**Rezolvare** - Se consideră  $d_p = -0,75 \text{ m} = -3/4 \text{ m}$

$$C_L = 4 - \frac{1}{|d_p|} = \frac{8}{3} \delta = 2,66 \delta$$

- Dacă ochiul este complet prezbit se ia  $f_L = -3/4 \text{ m}$  deci  $C_L = 1,33 \delta$ .  
Ochiul va vedea fără acomodare aceste obiecte, dar pentru a privi la distanța mai mare trebuie să-și scoată ochelarii.

**Exemplul 2** - un prezbit vede clar obiectele situate de la o anumită distanță, de la 50 cm la infinit. Să se determine noile limite de situare a obiectelor atunci când prezbitul își pune la ochi ochelari (nerecomandați) cu convergența de 4 dioptrii.

**Rezolvare** - Se consideră  $d_p = -0,75 \text{ m}$  iar din  $C_L = 4\delta$   $f_L = \frac{1}{C_p} = 0,25 \text{ m}$

$$\delta_p = \frac{f_L}{1 - \frac{f_L}{d_p}} = -16,6 \text{ cm} \quad \Delta_p = -f_L = -0,25 \text{ m} \quad \text{căci } D_p \rightarrow \infty.$$

- Deci când prezbitul folosește ochelari cu  $C_L = 4 \cdot \delta$  poate vedea clar cu aceștia obiectele numai când sunt situate între limitele 16,6 cm la 25 cm față de ochi. Obiectele trebuind așezate prea aproape de ochi rezultă că ochelarii nu sunt potriviți decât pentru cititul ziarului.

#### 4.3.4. Corectarea miopiei

La miopi imaginea unui obiect îndepărtat se formează înaintea retinei, datorită bombării remanente a cristalinului.

Distanța focală mai mică decât la ochiul normal este rezultatul unei activități îndelungate, încă din copilărie, la distanță mică de ochi, uneori se moștenește și mai rar se capătă prin boală.

Pentru a menține o imagine clară pe retină, obiectul trebuie depărtat până la o distanță maximă  $D_m$  la care ochiul miop privește fără acomodare, numit ca și mai înainte *punctum remotum*.

De la aceasta distanță, orice obiect situat mai aproape poate fi văzut clar prin acomodare continuă și spontană (dacă mai există o rezervă de putere de acomodare) până se ajunge la o distanță minimă de la care acomodarea este maximă, acest punct fiind *punctum proximum*.

De regulă pentru miopi  $D_m = 1 \text{ m}$  sau mai mică, iar  $d_m = 5 \text{ cm} - 10 \text{ cm}$  (am luat distanțele în modul).



Deci miopii nu văd bine la depărtare dar văd foarte bine obiectele situate la mică distanță de ochi. Acesta este un inconvenient major și se corectează cu ajutorul lentilelor divergente.

Acestea împrăstie razele de lumină ce ajung la ochi, suficient de mult încât cristalinul să le poată converge exact pe retină prin puterea de acomodare proprie (existentă), astfel imaginea devenind clară pentru ochi. În figura de mai jos se arată cu linie punctată mersul necorectat al razelor de lumina și cu linie plină mersul corectat:

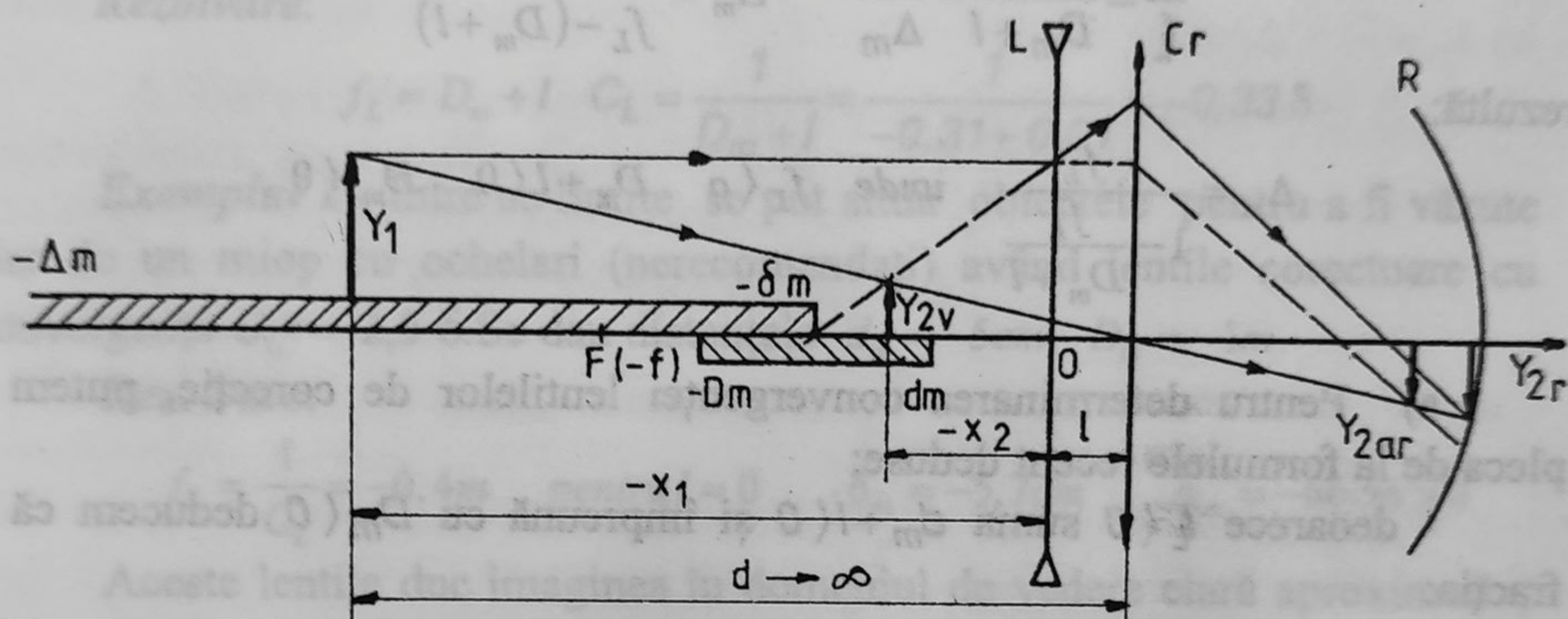


Fig. 116

În figură distingem:

$y_1$  - obiectul situat în afara domeniului de vedere clară cu ochiul liber;

$y_{2ar}$  - imaginea anteretiniană (neclară);

$y_{2r}$  - imaginea reală pe retină (clară);

$y_{2v}$  - imaginea virtuală văzută de ochi în domeniul de vedere clară.

După cum se poate vedea din figură, imaginea  $y_{2v}$  este văzută de ochi în prelungirea razelor de lumină ce ajung la ochi.

Pentru vedere clară această imagine trebuie să se situeze în interiorul intervalului de vedere distinctă ( $-D_m$ ,  $-d_m$ ) caracteristic miopului.

Lucrurile se petrec ca și cum lentila corectoare divergentă ar muta imaginea obiectului de lângă obiect în intervalul de vedere distinctă, clară.

Aceleași tipuri de probleme se pun și la corectarea miopiei așa că începem cu determinarea limitelor de situare a obiectelor pentru a fi văzute clar cu ajutorul ochelarilor.



a) **Calculul distanței minime.** Aplicăm formula lentilelor:

$$\frac{1}{f_L} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \text{ unde } -d_m = -x_2 + l \quad x_2 = d_m + l$$

$$\frac{1}{f_L} = \frac{1}{d_m + l} - \frac{1}{\delta_m} \quad \delta_m = \frac{f_L \cdot (d_m + l)}{f_L - (d_m + l)}$$

$$\delta_m = \frac{-f_L}{1 - \frac{f_L}{d_m + l}}$$

b) **Calculul distanței maxime.** Aplicând formula lentilelor pentru

$$x_2 = D_m \quad x_2 = D_m + l \quad x_1 = \Delta_m$$

$$\frac{1}{f_L} = \frac{1}{D_m + l} - \frac{1}{\Delta_m} \quad \Delta_m = \frac{f_L \cdot (D_m + l)}{f_L - (D_m + l)}$$

rezultă:

$$\Delta_m = \frac{-f_L}{1 - \frac{f_L}{D_m + l}} \text{ unde } f_L < 0 \quad D_m + l < 0 \quad D_m < 0$$

a) Pentru determinarea convergenței lentilelor de corecție, putem pleca de la formulele recent deduse:

- deoarece  $f_L < 0$  suma  $d_m + l < 0$  și împreună cu  $D_m < 0$  deducem că fracția:

$$1 - \frac{f_L}{D_m + l} < 0 \text{ de unde } f_L < D_m + l \text{ dacă } l \neq 0 \text{ atunci putem lua}$$

$$f_L = D_m + l$$

În cazul când putem neglija  $l$  ( $l=0$ ), numitorul lui  $\Delta_m$  se poate anula dacă  $f_L = D_m$ ; Dacă  $\Delta_m \rightarrow \infty$ , este bine, miopul cu acești ochelari poate vedea obiectele situate la mare depărtare, fără acomodare.

Din aceasta expresie deducem o metoda practică de determinare a distanței focale a unei lentile de corecție divergente, astfel că miopul să poată vedea clar la infinit.

Se măsoară cu o riglă, distanța maximă de vedere distinctă cu ochiul liber ( $-D_m$ ) fără a-l obosi, apoi se alege distanța focală a lentilei egală cu această distanță:

$$f_L = D_m \quad C_L = -\frac{1}{|D_m|} \quad (\delta)$$



O altă metodă de determinare a convergenței pentru lentile corectoare, dar care presupune existența unei puteri de acomodare se bazează pe relația:

$$C_n = C_m - |C_L|$$

unde:  $C_n = C_{0n} + \Delta C_n = C_{0n} + 4\delta$  iar  $C_m = C_{0m} + \Delta C_m$  scăzând:

$$C_n - C_m = -C_L$$

$$C_L = C_{0m} - C_{0n} - 4 + \Delta C_m$$

Pentru miopie ușoară  $C_{0m} - C_{0n} \approx 0$  deci  $C_L \approx \Delta C_m - 4 \cdot \delta$ .  
Cu această lentilă ochiul miop vede normal.

**Exemplul 1** - Distanța maximă de vedere clară la un miop este de 31 cm, care este convergența lentilei corectoare așezate la 1 cm de ochi pentru a vedea fără acomodare.

**Rezolvare:**

$$f_L = D_m + l \quad C_L = \frac{1}{D_m + l} = \frac{1}{-0,31 + 0,01} = -0,33 \delta$$

**Exemplul 2** - Între ce limite se pot situa obiectele pentru a fi văzute clar de un miop cu ochelari (nerecomandați) având lentile corectoare cu convergența  $C_L = -2,5 \delta$ . Se dau distanțele  $d_m = -5 \text{ cm}$   $D_m = -1 \text{ m}$

**Rezolvare:**

$$f_L = \frac{1}{C_L} = -0,4 \text{ m} \quad \text{pentru } l = 0 \quad \delta_m = -5,7 \text{ cm} \quad \Delta_m = -66 \text{ cm} > 0$$

Aceste lentile duc imaginea în domeniul de vedere clară aproximativ, obiectele situate la distanță prea mare nu vor fi văzute clar.

#### 4.3.5. Probleme rezolvate

1. Care este convergența lentilelor corectoare și ce fel de defect corectează, la o persoană care vede clar de la 80 cm la infinit.

Datele problemei:

$$d_p = -80 \text{ cm}$$

$$C_L = ?$$

Deoarece  $d_p > d_n$  ochiul este complet prezbit:

$$C_L = \left( 4 + \frac{1}{d_p} \right) m^{-1} = \left( 4 - \frac{1}{0,8} \right) \delta = 2,75 \delta$$



2. Un prezbit vede clar obiectele situate de la 1 m de ochi până la 30 cm.

a) Ce convergență trebuie să aibă lentilele corectoare dacă se neglijează distanța lentilei față de ochi;

b) Între ce limite se pot situa obiectele pentru a fi văzute clar prin acești ochelari.

Datele problemei:

$$l = 0 \quad d_p = -1m$$

$$D_p = -300m$$

a)  $C_L = ?$

b)  $\delta_p = ? \quad \Delta_p = ?$

$$a) C_L = \left( 4 + \frac{1}{d_p} \right) m^{-1} = 4 + (-1) = 3\delta$$

$$f_L = \frac{1}{3} m = 0,33m$$

$$b) \delta_p = -\frac{f_L}{1 - \frac{f_L}{d_p}} = -0,25m = -25cm$$

$$\Delta_p = -\frac{f_L}{1 - \frac{f_L}{D_p}} = -33,3cm$$

Deci  $d \in [-33,3cm, -25cm]$ , prezbitul vede clar numai obiectele apropiate.

3. Un prezbit care vede clar cu ochiul liber de la 75 cm la infinit, folosește ochelari cu lentile cu convergența de 2,5 dioptrii pentru a vedea un obiect situat la 15 cm de ochi. Să se determine:

a) Care este convergența potrivită pentru acest lucru;

b) Să se afle dacă cu ochelarii ocazionali poate vedea clar obiectul.

Datele problemei:

**Rezolvare:**

$$d_p = -0,75m \quad D_p \rightarrow \infty$$

$$C_L' = 2,5\delta \quad d = -15cm$$

a)  $C_L = ?$

b)  $\delta_p < d$



Convergența potrivită este dată de relația:

$$a) C_L = \left( 4 - \frac{1}{0,75} \right) m^{-1} = 2,66 \delta$$

Lentilele ocazionale au distanța focală  $f'_L = \frac{1}{2,5} m = 40 cm$

Calculăm distanța minimă la care un obiect se poate apropia de ochi pentru a fi văzut clar cu această lentilă:

$$\delta_p = \frac{-0,4}{1 - \frac{0,4}{-0,75}} = -0,3m$$

b) deoarece  $d < \delta_p$ , ochiul nu vede clar obiectul situat la -15 cm de ochi cu această lentilă.

4. Variația de convergență a unui ochi prezbit este de  $0,75 \delta$  când se acomodează. Să se determine:

- a) care sunt limitele de vedere clară;
- b) ce convergență are lentila corectoare.

Datele problemei:

$$\Delta C_p = -0,75 \delta$$

$$a) d_p = ? \quad D_p = ?$$

$$b) C_L = ?$$

Privirea cu acomodare se face pentru obiectele apropiate:

a) Plecăm de la definiția puterii de acomodare  $\Delta C_p = C_p - C_{p0}$  unde:

$C_p$  - este convergența ochiului prezbit cu acomodare,

$C_{p0}$  - este convergența ochiului prezbit fără acomodare.

$$C_p = \frac{1}{f_{\min}} = \frac{1}{d_p} - \frac{1}{\infty} \text{ imaginea fiind la } d_p, \text{ iar obiectul la infinit.}$$

$$C_{p0} = \frac{1}{f_{\max}} = \frac{1}{\infty} - \frac{1}{D_p} \text{ imaginea fiind la infinit iar obiectul depărtat.}$$

$$\Delta C_p = \frac{1}{d_p} - \frac{1}{D_p}$$

$$\Delta C_p = C_p - C_{p0} = \frac{1}{f_{\max}} - \frac{1}{f_{\min}} = \frac{1}{d_p} \text{ deoarece } D_p \rightarrow -\infty$$

$$b) d_p = \frac{1}{C_p} = -\frac{1}{0,75} m = -1,33m \text{ iar } D_p \rightarrow \infty$$

$$C_L = 4 - \frac{1}{1,33} = 3,25 \delta$$



5. Un bătrân vede bine cu ochiul liber obiectele depărtate de la 0,75m la infinit. Care trebuie să fie convergența lentilelor de ochelari pentru ca să vadă un obiect situat la 20 cm de ochi fără acomodare.

Datele problemei:

$$d_p = -0,75m \quad D_p = -\infty$$

$$\delta = -20cm$$

$$C_L = ? \quad C_L' = ?$$

Pentru a vedea fără acomodare, trebuie ca imaginea virtuală să se formeze la infinit:  $D_p \rightarrow -\infty$  atunci:

$$\Delta_p = -f_L = C_L = -\frac{1}{\Delta_p} = +5\delta$$

Pentru a vedea cu acomodare:

$$\delta_p = \frac{-f_L}{1 - \frac{f_L}{d_p}} \quad f_L = 27,2cm \quad C_L = \frac{1}{0,272} \cdot \delta \approx 4 \cdot \delta$$

6. Un prezbit folosește ochelari cu lentile având convergența de 7 dioptrii ca să citească fără acomodare, ziarul situat la 25 cm de ochi.

a) Să se determine limitele vederii clare fără ochelari;

b) să se determine limitele de situare a obiectelor pentru a fi văzute clar.

Datele problemei:

$$\delta_p = -25cm \quad C_L = 7\delta$$

$$a) d_p = ? \quad D_p = ?$$

$$b) \delta_p' = ? \quad \Delta_p' = ?$$

a) dacă citește fără acomodare, imaginea virtuală este situată la infinit, deci:

$$f_L = -\Delta_p' = -\frac{1}{C_L} = -14,28cm \quad \Delta_p' = 14,28cm \quad \delta_p' = \delta = -0,25m$$

b) Deoarece nu se dă puterea de acomodare, presupunem că este nulă.

7. Care este semnul și distanța focală a lentilei corectoare și ce fel de defect corectează la o persoană care vede clar numai obiectele îndepărtate între 5 cm și 15 cm de ochi. Se așează lentila la 1,5 cm de ochi.



Datele problemei:

$$d_m = -5\text{cm} \quad D_m = -15\text{cm}$$

$$l = 1,5\text{ cm}$$

$$f = ?$$

$$C = ?$$

Defectul este de miopie deoarece  $d_m < d_n$ :

$$f_L = D_m + l = -15 + 1,5 = -13,5\text{cm}$$

$$C_L = -\frac{1}{f_L} = -7,4\delta$$

8. O persoană vede clar obiectele situate între 5 și 15 cm de ochi.

a) Ce convergență trebuie să aibă lentila corectoare;

b) Între ce limite se pot situa obiectele pentru a fi văzute clar prin ochelari.

Datele problemei:

$$d_m = -5\text{cm} \quad D_m = -15\text{cm}$$

$$l = 0$$

$$\text{a) } C_L = ?$$

$$\text{b) } \delta_m = ?$$

$$\text{a) } f_2 = D_m + l = (-15 + 0)\text{cm} = -15\text{cm}$$

$$C_L = -\frac{1}{0,15}\text{m}^{-1} = -6,66\delta$$

$$\text{b) } \delta_m = -\frac{f_2}{1 - \frac{f_2}{d_m}} = \frac{15}{1 - 3} = -7,5\text{cm} \quad \Delta_m = -\frac{f_2}{1 - \frac{f_2}{D_m}} \rightarrow \infty$$

$$\text{deci } d \in (-\infty, -7,5].$$

9. Un miop care vede clar între 10 cm și 20 cm, pune ochelari cu lentile având convergența de - 3,5 dioptrii pentru a vedea clar un obiect situat la 100 de m.

a) să se afle care este convergența potrivită pentru lentile;

b) să se afle dacă cu ochelarii dați poate vedea clar obiectul.

Datele problemei:

$$d = -10\text{ cm} \quad D_m = -20\text{cm}$$

$$C'_L = -3,5\delta$$

$$\text{a) } f_L = ? \quad \Delta_m \geq d$$



$$a) f_L = D_m + l \quad l = 0 \quad f_L = -20 \text{ cm} \quad C_L = -5,5 \delta$$

$$b) \Delta_m = -\frac{f_L'}{1 - \frac{f_L}{D_m}} = -\frac{(-20)}{1 - \frac{(-28,57)}{-20}} \text{ cm} = -46,67 \text{ cm}$$

unde  $f_L' = \frac{1}{C_L} = -28,57 \text{ cm}$  deci  $\Delta_m < d$ , miopul nu poate vede clar obiectul cu acești ochelari.

10. Un miop vede clar între 10 cm și 21 cm și poartă ochelari. După câțiva ani constată că vede cu ochiul liber între 15 cm și 21 cm.

a) Ce distanță focală au ochelarii și care este intervalul de situare al obiectelor.

b) Între ce limite se pot situa obiectele pentru a vedea clar imaginea lor după trecerea anilor, mai sunt buni ochelarii?

c) Ce fel de ochelari trebuie să poarte în acest caz.

Datele problemei:

$$l = 1 \text{ cm} \quad d_m = -10 \text{ cm}$$

$$D_m = -21 \text{ cm} \quad d_m' = -15 \text{ cm}$$

$$D_m' = -21 \text{ cm}$$

$$a) f_L = ?$$

$$b) \delta_m = ? \quad \Delta_m = ?$$

$$c) f_L' = ?$$

a) alegând

$$f_L = D_m + l = -20 \text{ cm} \quad \Delta_m \rightarrow -\infty$$

$$\delta_m = -\frac{f_L}{1 - \frac{f_L}{d_m + l}} = -\frac{180 \text{ cm}}{11} = -16,36 \text{ cm}$$

b) prin îmbătrânire se schimbă limitele  $\delta$  și  $\Delta$  după cum urmează:

$$\delta_m' - \delta_m = 46,66 - 16,36 = 30,3 \text{ cm}$$

$$\delta_m' = +\frac{f_L}{1 - \frac{f_L}{d_m + l}} = -46,66 \text{ cm}$$

$$\Delta_m' = -\frac{f_L}{1 - \frac{f_L}{D_m + l}} \rightarrow -\infty$$



Ochelarii nu mai sunt potriviți întrucât obiectul trebuie distanțat față de ochi mai mult, cu 30,3 cm. Deci va folosi ochelarii pentru a vedea obiecte mai depărtate de 47,66 m de ochi.

$$c) f_L' = -46,66 \text{ cm}$$

11. Un miop poartă ochelari cu lentile divergente de 5 dioptrii cu care vede clar un obiect situat la distanța de 25 cm. După îmbătrânire, devine prezbit într-o asemenea măsură încât imaginea unui obiect așezat la 25 cm de ochi nu mai este clară.

Depărtat la 20 cm, imaginea devine din nou clară, iar la distanța mai mare vede ca și mai înainte.

a) Să se calculeze limitele vederii clare, fără ochelari și limitele de situare a obiectelor pentru a fi clar văzute;

b) Care sunt noile limite ale vederii clare.

Datele problemei:

$$C_L = -5 \text{ d} \quad \delta_m = 25 \text{ cm}$$

(neclar după îmbolnăvire)

$$d = -25 \text{ cm} \quad \delta' = -50 \text{ cm}$$

$$a) d_m = ? \quad D_m = ?$$

$$b) \delta_m = ? \quad \Delta_m = ?$$

$$f_L = \frac{1}{C_L} = -\frac{1}{5} \text{ m}^{-1} = -20 \text{ cm} \quad \text{deci } f_L = D_m = -20 \text{ cm}$$

$$a) \frac{1}{f_L} = \frac{1}{d_m} - \frac{1}{\delta_m} \quad \frac{1}{d_m} = \frac{1}{f_L} + \frac{1}{\delta_m} = \frac{\delta_m + f_L}{\delta_m \cdot f_L}$$

$$d_m = \frac{f_L \cdot \delta_m}{f_L + \delta_m} = -8,88 \text{ cm}$$

Intervalul de vedere clară este:  $[-20 \text{ cm}, -8,88 \text{ cm}]$  corespunzător cu intervalul de situare a obiectelor  $(-\infty, -25 \text{ cm})$ .

b) S-a schimbat doar limita inferioară  $d_m'$  căci

$$d_m' = \frac{f_L \cdot \delta_m'}{f_L + \delta_m'} = -14,28 \text{ cm}$$

noul interval de vedere clară este:

$$[-20 \text{ cm}, -14,28 \text{ cm}]$$



12. Din cauza vârstei, un pensionar poate vede clar numai obiectele din jur aflate la distanțe cuprinse între 0,65 m și 3,5 m. Folosește ochelari bifocali pentru citirea ziarului la indicația medicului.

a) Ce fel de lentile corectoare au ochelarii;

b) care sunt convergențele lor;

c) când privește obiectele din jur prin cele două tipuri de lentile să se determine între ce limite pensionarul nu poate vede clar obiectele din cauza absenței puterii de acomodare.

Rezolvare:

$$d = 0,65 \text{ m} \quad D = 3,5 \text{ m}$$

a) tipul lentilelor ?

b)  $C = ?$

c)  $\Delta x = ?$

Pentru a privi un obiect situat la  $x_1 = 0,25 \text{ m}$  ochiul privește cu acomodare și vede imaginea la  $x_2 = -d = -0,65 \text{ m}$ . Datorită prezenței lentilei imaginea cade pe retină și este văzută clar.

$$\frac{1}{f_c} = -\frac{1}{0,65} + \frac{1}{0,25} \quad f_c = 0,406 \text{ m} \quad C_c = +2,5\delta$$

Deplasând obiectul în altă poziție  $x_1'$  imaginea sa se deplasează până când ajunge la distanța maximă la care mai poate vede pensionarul este  $D = -3,5 \text{ m}$ .

$$\frac{1}{f_c} = -\frac{1}{3,5} + \frac{1}{x_1'} \quad \frac{1}{x_1'} = \frac{1}{f_c} + \frac{1}{3,5} \quad x_1' = 0,36 \text{ m}$$

Deci pensionarul vede clar prin ochelarii de apropiere numai obiectele situate în intervalul de distanțe  $\Delta x_1 = 0,25 \text{ la } 0,36 \text{ m}$ .

Pentru a privi obiecte mai depărtate decât D, unde privește fără acomodare imaginea este văzută în  $D = -3,5 \text{ m}$ :

$$\frac{1}{f_d} = -\frac{1}{3,5} + \frac{1}{\infty} \quad f_d = -3,5 \text{ m} \quad C_d = -0,3\delta$$

Deci pensionarul poate privi obiectele de la infinit, fără acomodare. Distanța minimă la care pensionarul vede cu acești ochelari este obținută astfel :

$$\frac{1}{f_d} = -\frac{1}{0,65} + \frac{1}{x_1'} \quad \frac{1}{x_1'} = \frac{1}{f_d} + \frac{1}{0,65} \quad x_1' = -0,79 \text{ m}$$

Deci intervalul de situare a obiectelor pe care le vede clar cu lentilele divergente este de  $\Delta x_2 = 0,79 \text{ m la infinit}$ . Nu vede clar obiectele situate în intervalul  $(0,36 ; 0,79)$ .



#### 4.4. Instrumente de proiecție

Aceste instrumente creează imagini reale fie pentru proiectarea pe un ecran cum sunt :-aparatul de proiecție de filme, diapozitive, fotografii, fie o placă fotografică cum este cazul aparatelor fotografice și de filmare.

Construcția imaginilor prin aceste aparate se reduce la cazul când obiectul se află între focar și dublul distanței focale, când se obține o imagine reală, mărită și răsturnată. Pentru a vedea imaginea dreaptă, totdeauna operatorul așează filmul în aparat invers, *cu capul în jos*.

##### 4.4.1. Aparat de proiecție de redare

Acestea au rolul de a produce imagini reale și mărite, drepte, pe un ecran pentru a fi urmărite de mai mulți oameni. La acestea apare un element suplimentar: sursa de lumină și piesele optice accesorii ce produc un flux de lumină intens, uniform pentru iluminarea prin transparență numite după caz, *fotograme* (la filmele de cinema), *diapozitive*, *planșe* pe care se desenează în timpul proiecției; sau prin reflexie de pe o planșă sau fotografie mată. În figura de mai jos se prezintă schema unui aparat de proiecție a diapozitivelor (prin transparență).

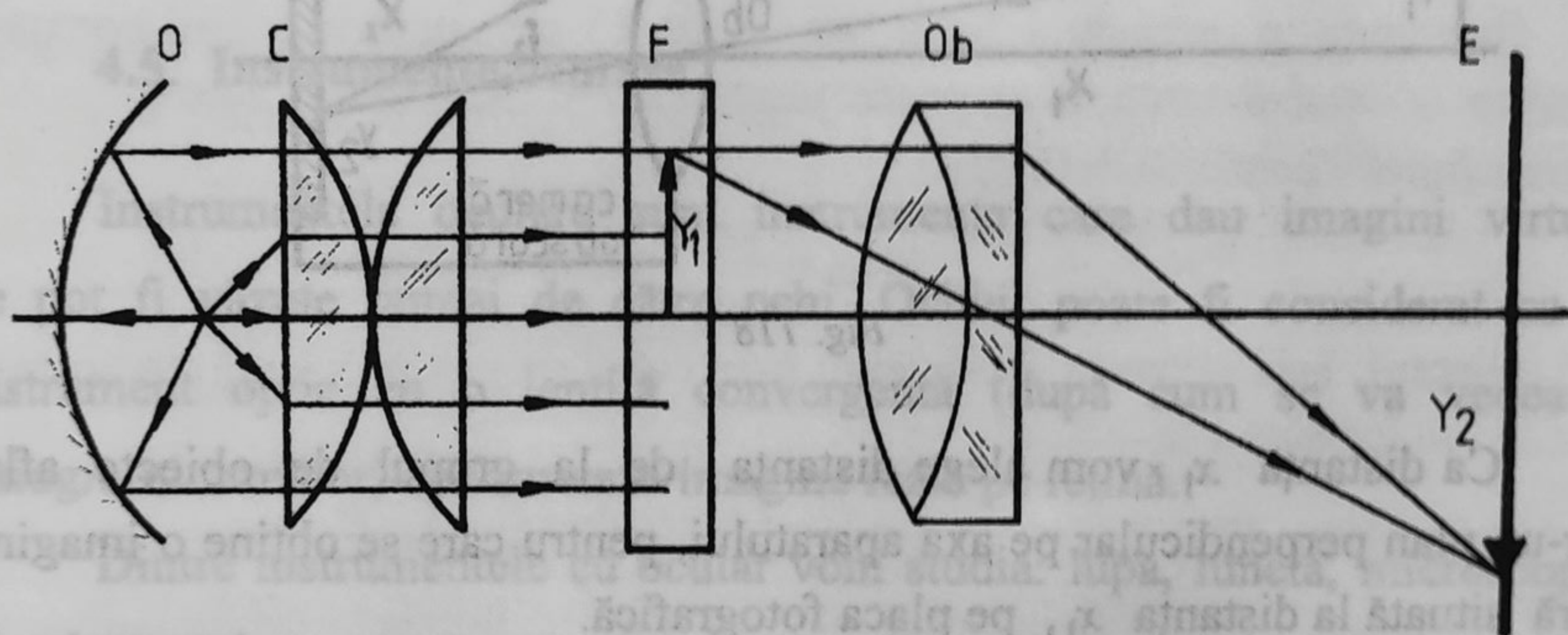


Fig. 117

În figură distingem:

- *Oglinda concavă* O care primește razele de lumină de la o sursă de lumină situată în focarul oglinzii, după reflexie se obține un fascicul paralel cu axa optică;

- *Condensorul* C, un sistem de două lentile plan-convexe ce asigură concentrarea luminii și iluminarea uniformă a obiectului;



- *Fereastra de proiecție* F, este o deschidere într-un material opac unde se așează diapozitivul;

- *Obiectivul* Ob, cel mai simplu este format din două lentile pentru a corecta aberația cromatică.

În rezolvarea problemelor cu instrumente de proiecție contează doar distanțele  $x_1$  și  $x_2$  ale obiectului față de obiectiv, respectiv a ecranului (pe care imaginea este clară) și obiectiv.

#### 4.4.2. Aparate cu înregistrare

Acestea nu posedă surse de lumină, aceasta o primește de la obiect în interiorul unei camere obscure unde se află un film fotosensibil sau un fotocatod cu micro celule fotoelectrice.

Simplificând, se poate spune că aparatul de fotografiat este format dintr-o *cameră obscură* prevăzută cu un orificiu (o deschidere) în care se pune obiectivul, iar pe peretele opus obiectivului se pune placa fotosensibilă după cum se poate vedea mai jos.

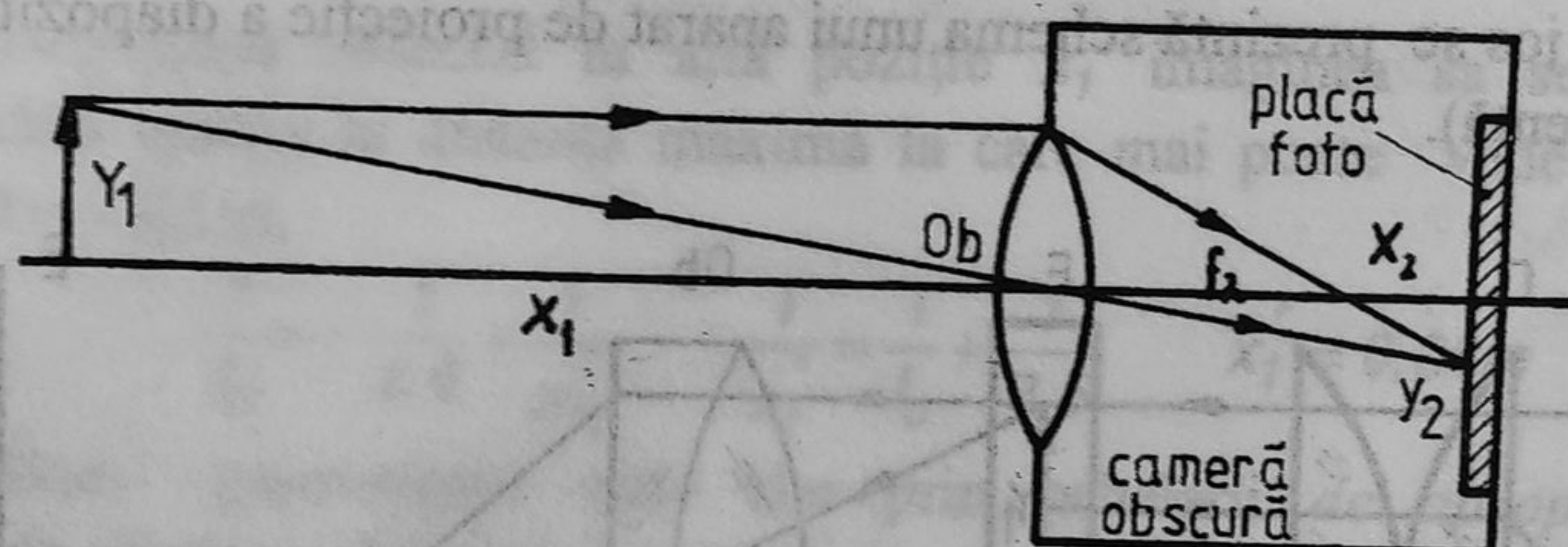


Fig. 118

Ca distanță  $x_1$  vom alege distanța de la grupul de obiecte aflat într-un plan perpendicular pe axa aparatului, pentru care se obține o imagine clară situată la distanța  $x_1$ , pe placa fotografică.

Deoarece obiectele sunt mai apropiate sau mai depărtate, iar distanța focală a obiectivului este fixă, pentru obținerea unei imagini clare, trebuie deplasat obiectivul de-a lungul axei (operație ce se numește *punere la punct*) pe distanțe mici, prin înșurubarea într-un filet cu pasul mic.

Mișcarea obiectivului se face fie de către operator, (privind printr-un vizor sau potrivind distanța la obiect cu distanța scrisă pe inelul distanțelor), fie automat la aparatele perfecționate.



O calitate a obiectivelor o prezintă raportul  $D/f$  numită *deschidere relativă*, unde  $D$  este diametrul maxim al diafragmei mobile iar  $f$  este distanța focală a obiectivului. Cu cât acest raport este mai mare cu atât obiectivul este mai *luminos*, adică primește mai multă lumină.

Camerele de luat vederi sunt de două feluri:

- *analogice*, imaginea optică de pe placa fotosensibilă se transformă în *imagine electrică*, adică potențialul fiecărei microfotocelule variază direct proporțional cu lumina care cade pe aceasta. Imaginea electrică se transformă apoi într-un curent cu variație continuă numit semnal analogic, care ajungând pe un tub cinescop reproduce imaginea obiectului dat.

- *digitale*, la care potențialul punctual din imaginea electrică se codifică în prealabil digital, apoi se transmite sub această formă la receptor.

Camerele video (tip CCD), au avantajul că permit procesarea imaginilor, pe lângă o calitate superioară a acestora.

#### 4.5. Instrumente oculare

Instrumentele oculare sunt instrumente care dau imagini virtuale ce pot fi văzute numai de către ochi. Ochiul poate fi considerat ca un instrument optic cu o lentilă convergentă (după cum se va vedea în paragraful următor) ce formează imagine reală pe retină.

Dintre instrumentele cu ocular vom studia: lupa, luneta, microscopul, și telescopul.

##### 4.5.1. Lupa

Este un sistem optic compus din una sau mai multe lentile, cu distanța focală de ordinul centimetrilor, ce formează o imagine virtuală, mărită și dreaptă a unui obiect situat în fața lentilei, între focar și lentilă după cum se poate vedea în figura de mai jos.



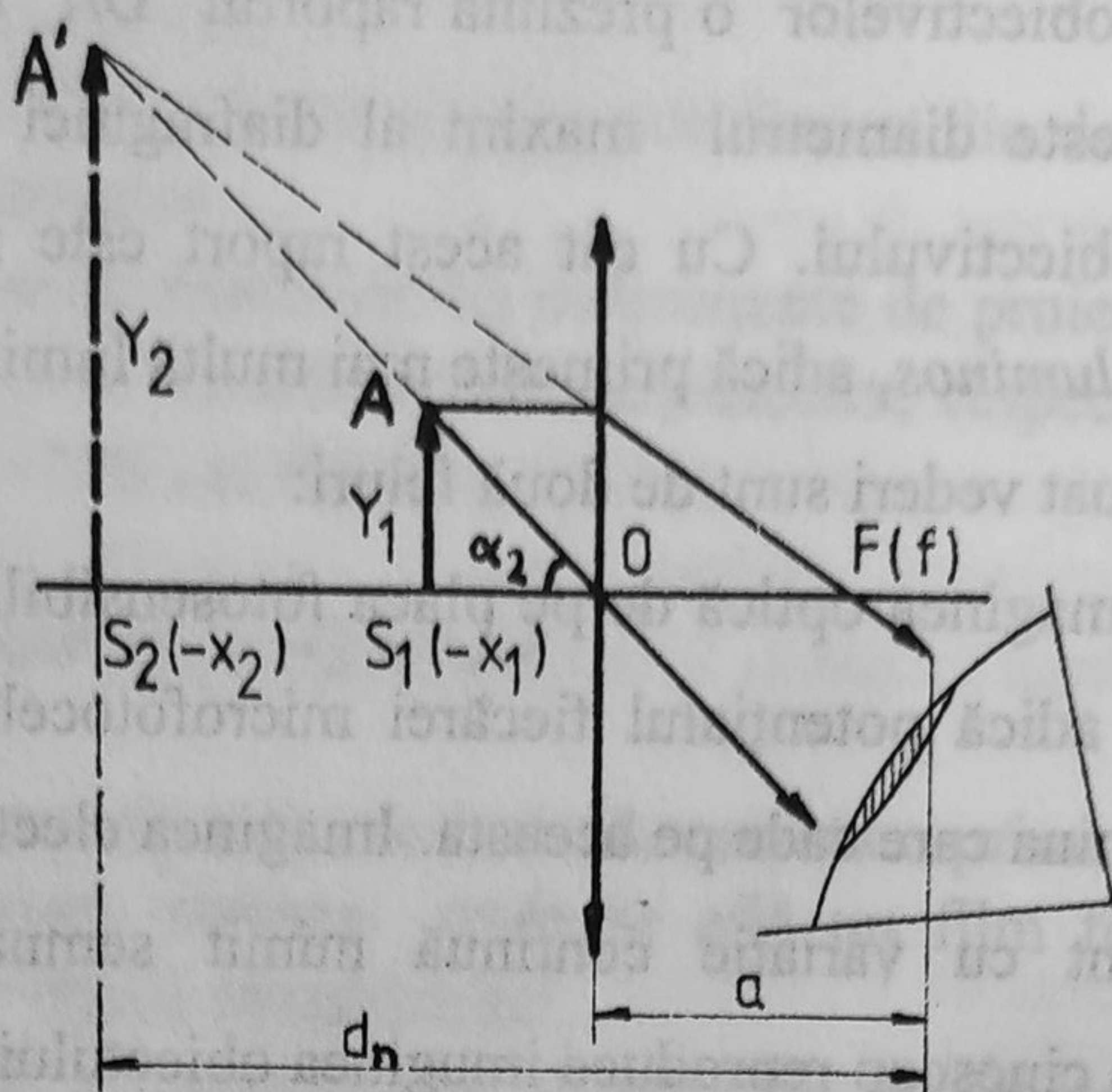


Fig. 119

Ochiul se așează la distanța  $a$  de lentilă (uneori se poate aproxima egală cu zero). Imaginea se formează cu acomodare la distanța minimă de vedere clară  $d$ .

Pentru a privi fără acomodare, imaginea trebuie să se formeze la infinit, deci obiectul trebuie așezat chiar în focar.

De regula  $a$  este de 1-2 cm iar  $d$  de 25 cm pentru ochiul normal. Deoarece  $a \ll d$  distanța  $a$  se poate neglija astfel încât avem  $x_2 = d$ .

**Puterea lupei** - conform definiției:

$$P = \frac{\text{tg}\alpha_2}{y_1} \quad \text{tg}\alpha_2 = \frac{y_1}{y_2} \quad \text{din } \Delta OAB$$

când obiectul este situat în focar, cum este cazul priviri prin lupă, imaginea virtuală se formează la infinit:

$$x_1 = f \quad \text{deci} \quad \text{tg}\alpha_2 = \frac{y_1}{f} \quad P = \frac{1}{y_1} \cdot \frac{y_1}{f} \quad \text{deci} \quad P = \frac{1}{f} = C$$

De obicei  $P$  este de ordinul câtorva sute (valoarea maximă pentru o lupă) iar puterea separatoare este de 3  $\mu\text{m}$  sau 0,0003 radiani (pentru o lupă cu  $f = 1$  cm), sau 60'' de arc.

#### 4.5.2. Microscopul optic

Acest instrument este destinat observării obiectelor foarte mici ce nu se pot vedea cu ochiul liber. Este format din două părți componente: *obiectivul* și *ocularul* ale căror funcții au fost deja precizate.



În figura următoare se arată mersul razelor de lumina într-un microscop pentru formarea unei imagini mărite a obiectului *microscopic*  $y_1$ .

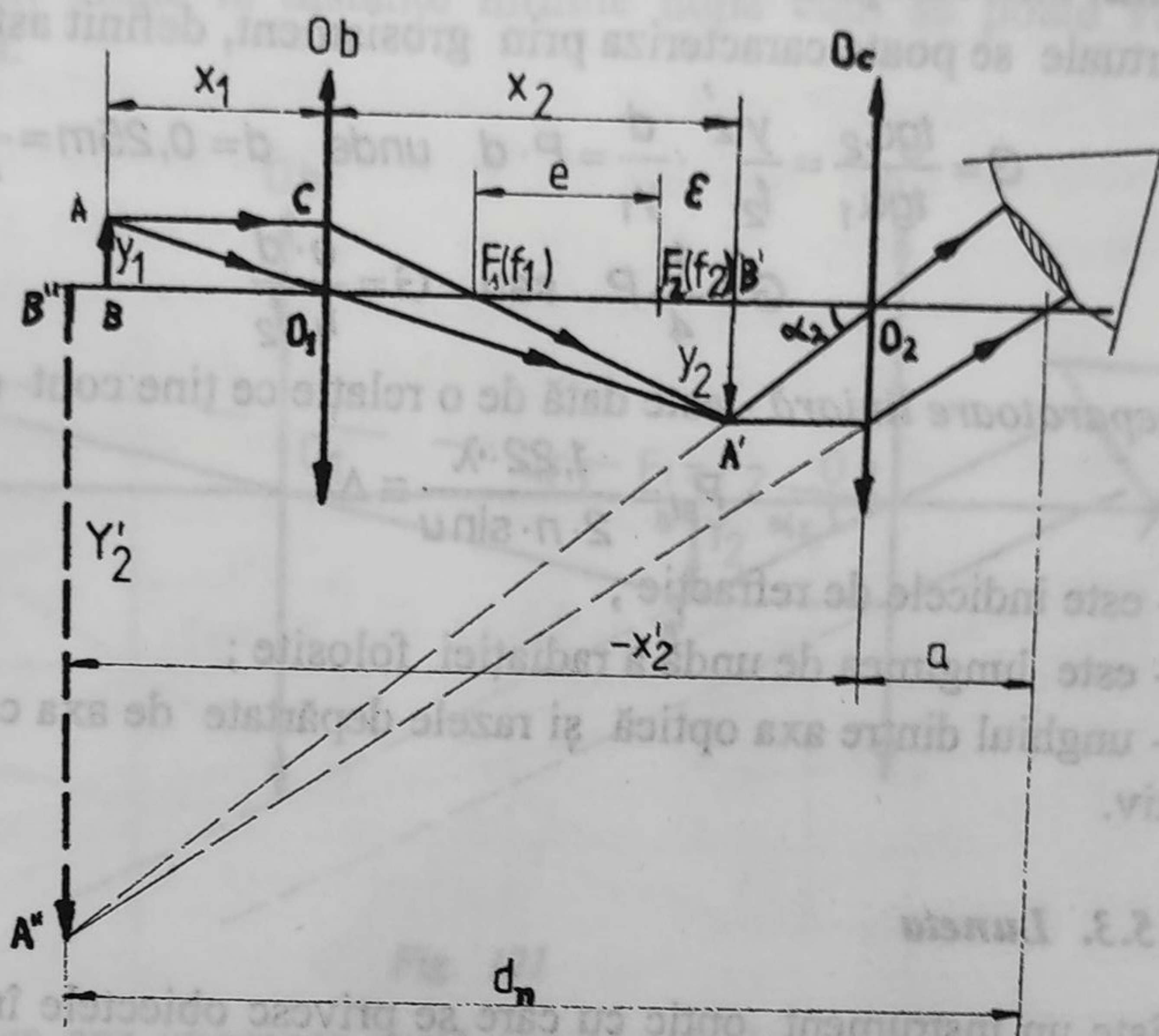


Fig. 120

În această figură distingem:

$y_1$  - obiectul ce trebuie observat;

$y_2$  - imaginea reală dată de obiectivul Ob;

$e$  - lungime optică;

$y_2'$  - imaginea virtuală dată de ocularul Oc;

$a$  - distanța ochiului față de ocular;

$\alpha_1$  - unghiul sub care se vede obiectul cu ochiul liber;

$\alpha_2$  - unghiul sub care se vede imaginea virtuală mărită, prin instrument;

$d$  - distanța minimă de vedere clară (cu acomodare);

Când imaginea  $A'B'$  se formează în focarul  $F_2$  (imaginea este *aruncată* la infinit) distanța de la ocular la imaginea  $A'B'$  este egală cu  $f_2$ .

Puterea optică a microscopului se mai poate scrie:

$$P = \frac{\tan \alpha_2}{y_1} = \frac{y_2}{f_2 \cdot y_1} \quad \text{din } \Delta O_1 C F_1 = \Delta F_1 B' A'$$

cu  $e \rightarrow 0$  prin punere la punct, imagine la infinit. Deci:

$$P = \frac{\theta}{f_1 \cdot f_2} \quad \text{sau} \quad P = C_1 \cdot C_2 \cdot \theta$$



Deci puterea optică este direct proporțională cu convergența lentilelor și distanța dintre focarele lor (între anumite limite).

**Grosimentul microscopului** - Microscopul fiind un instrument ce formează imagini virtuale se poate caracteriza prin grosiment, definit astfel :

$$G = \frac{\text{tg}\alpha_2}{\text{tg}\alpha_1} = \frac{y_2'}{f_2} \cdot \frac{d}{y_1} = P \cdot d \quad \text{unde} \quad d = 0,25\text{m} = \frac{1}{4}\text{m}$$

$$G = \frac{1}{4} \cdot P \quad \text{sau} \quad G = \frac{e \cdot d}{f_1 \cdot f_2}$$

**Puterea separatoare liniară** - este dată de o relație ce ține cont de difracție :

$$P_{sl} = \frac{1,22 \cdot \lambda}{2 \cdot n \cdot \sin u} \equiv \Delta x$$

$n$  - este indicele de refracție ;

$\lambda$  - este lungimea de undă a radiației folosite ;

$u$  - unghiul dintre axa optică și razele depărtate de axa care mai intră în obiectiv.

#### 4.5.3. Luneta

Este un instrument optic cu care se privesc obiectele îndepărtate. În funcție de obiectele privite, terestre sau astronomice, lunetele se împart în lunete terestre respectiv lunete astronomice.

Ambele lunete posedă un obiectiv cu distanța focală mult mai mare ca la microscop (cu cât este mai mare cu atât este mai bine) și un ocular cu distanța focală mică, o lupă obișnuită.

Obiectivul formează o imagine reală care constituie obiect real pentru ocular. Acesta formează o imagine virtuală pe care ochiul o poate vedea fără acomodarea cristalinului la infinit sau cu acomodare la *distanța minimă a vederii clare*.

**Luneta astronomică Kepler** - este destinată observării corpurilor cerești și câte o dată a celor terestre dacă nu ne supără faptul că imaginea este răsturnată.

Obiectivul și ocularul sunt formate în cazul cel mai simplu din lentile convergente, lunetele profesionale fiind construite din asociații de lentile pentru corectarea imaginilor de diferite aberații. În problemele ce urmează va fi vorba doar de lunete foarte simple, necorectate.

Există două poziții extreme de lucru între care poate fi reglată luneta:

- ochiul vede imaginea la infinit;
- ochiul vede imaginea la distanța minimă de vedere clară.



În primul caz se formează un sistem afocal pentru că focarul obiectivului și focarul ocularului coincid iar imaginea se formează la infinit. Acest mod de lucru este utilizat îndeosebi la observarea corpurilor cerești, aflate la distanțe infinite după cum se poate vede din figura de mai jos:

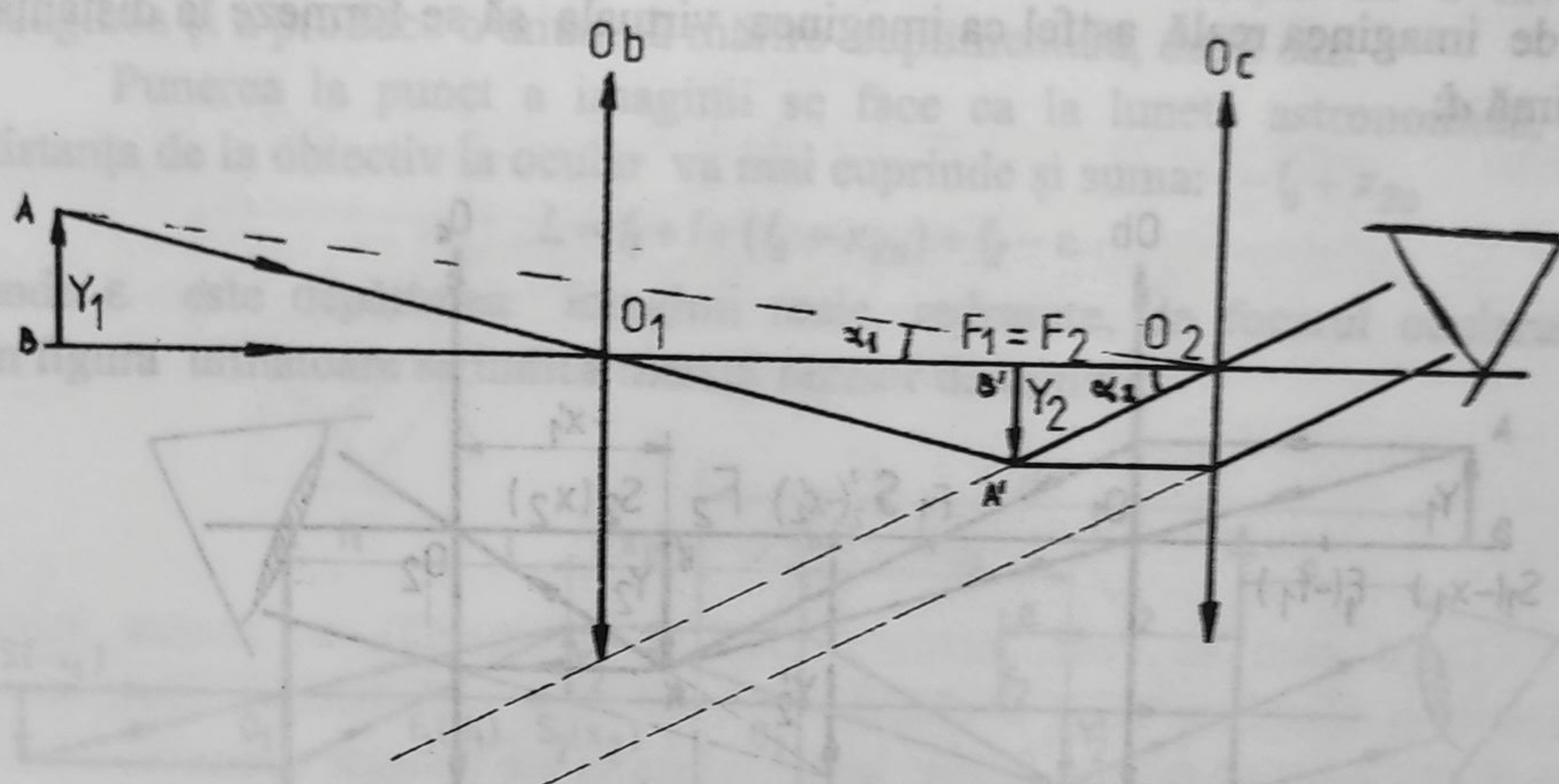


Fig. 121

În al doilea caz imaginea reală provine de la obiecte terestre mai apropiate de obiectiv și ca urmare imaginea reală se depărtează de focarul obiectivului apropiindu-se de ocular mai mult, ceea ce produce o micșorare a imaginii virtuale și concomitent o apropiere de ochi.

Ochiul normal are acomodare maximă pentru distanța de 25 cm, dacă imaginea virtuală se apropie sub această distanță de ochi, acesta nu mai vede clar imaginea virtuală.

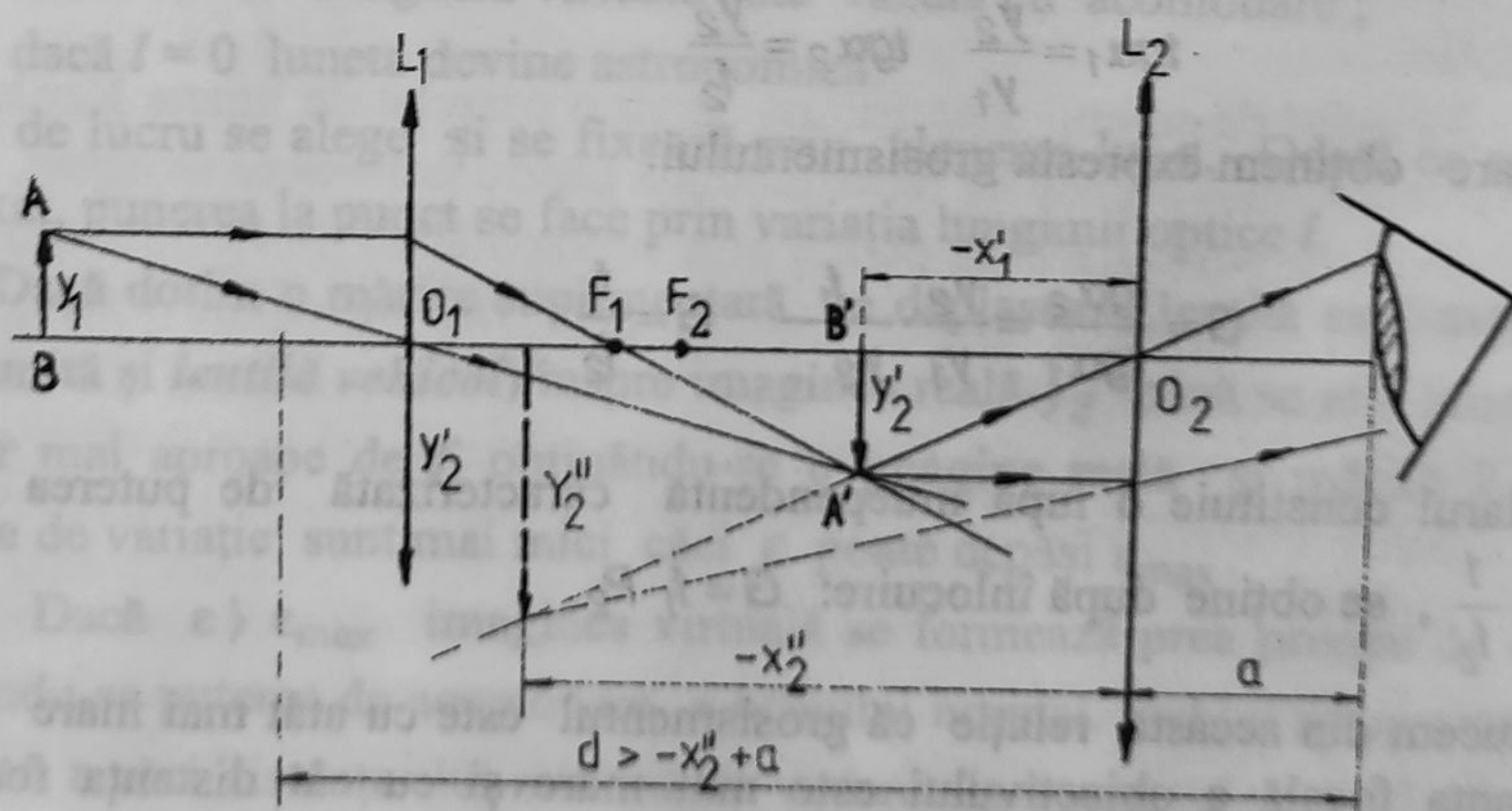


Fig. 122



Deci observatorul începe să depărteze ocularul (sau obiectivul la lunetele mai vechi), astfel ca focarul ocularului să se apropie de imaginea reală până când imaginea virtuală ajunge la 25 cm sau până când imaginea se formează la infinit.

În figura ce urmează se arată poziția relativă a ocularului față de imaginea reală astfel ca imaginea virtuală să se formeze la distanța minimă  $d$ :

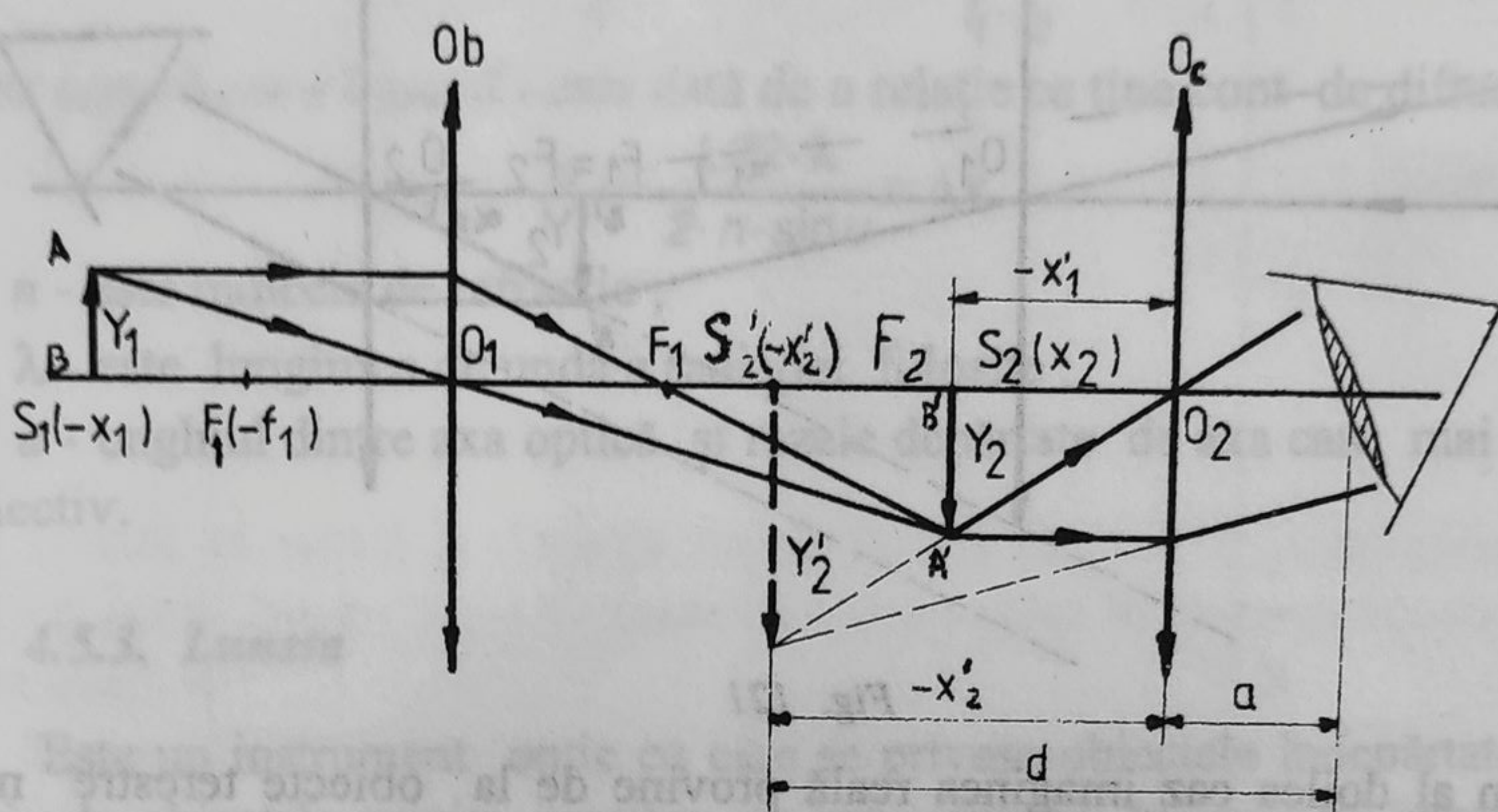


Fig. 123

Pentru sistemul afocal din figura 121 deducem:

din  $\triangle O_2 A' B'$  și din  $\triangle O_1 A' B'$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{y_2}{y_1} \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{y_2}{f_2}$$

din care obținem expresia grosimentului:

$$G = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{f_1}{y_2} \quad G = \frac{f_1}{f_2}$$

Ocularul constituie o lupă independentă caracterizată de puterea optică

$$P_2 = \frac{1}{f_2}, \text{ se obține după înlocuire: } G = f_1 \cdot P_2$$

Deducem din această relație că grosimentul este cu atât mai mare cu cât distanța focală a obiectivului este mai mare și cu cât distanța focală a ocularului este mai mică.



#### 4.5.4. Luneta terestră cu lentilă intermediară

Deoarece imaginea obiectului este răsturnată în luneta Kepler, observarea obiectelor terestre este îngreunată, de aceea se adaugă între obiectiv și ocular o lentilă intermediară cu rolul esențial de a inversa imaginea și a produce o anumită mărire suplimentară, după caz.

Punerea la punct a imaginii se face ca la luneta astronomică, dar distanța de la obiectiv la ocular va mai cuprinde și suma:  $-f_s + x_{2s}$

$$L = f_1 + l + (f_s + x_{2s}) + f_2 - \varepsilon$$

unde  $\varepsilon$  este depărtarea imaginii reale, redresate, de focarul ocularului. În figura următoare se indică mersul razelor de lumină:

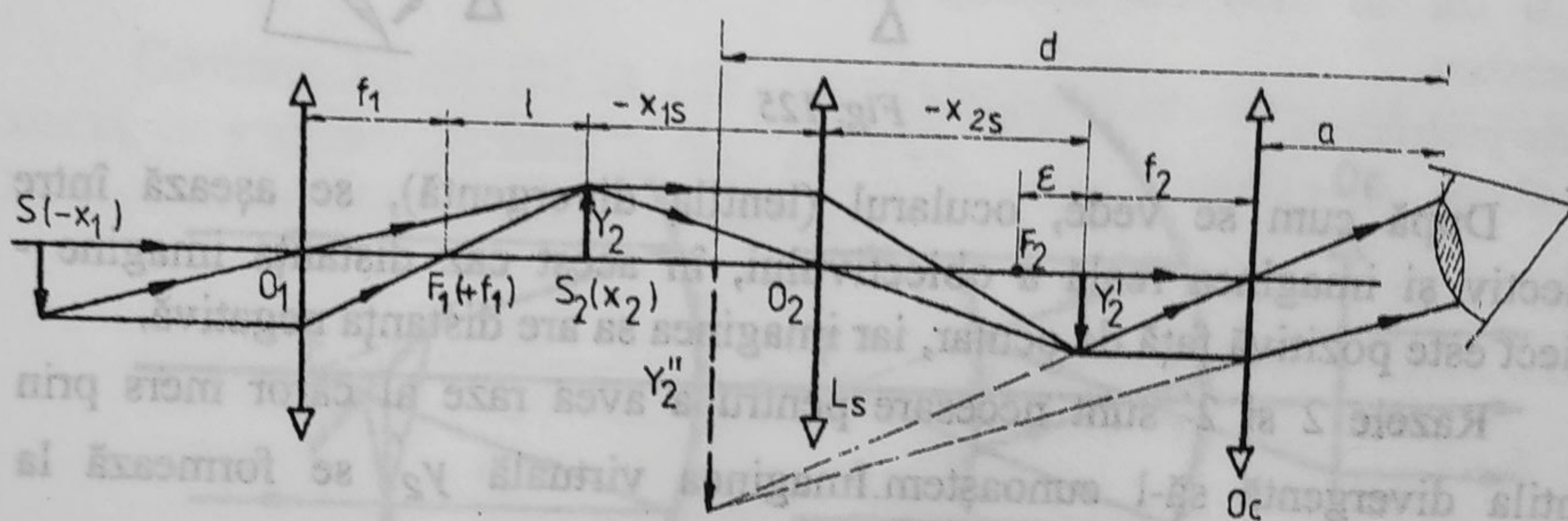


Fig. 124

Avem următoarele cazuri:

- dacă  $\varepsilon = 0$  imaginea virtuală se formează la infinit;
- dacă  $\varepsilon \neq 0$  imaginea virtuală este văzută cu acomodare;
- dacă  $l = 0$  luneta devine astronomică.

Modul de lucru se alege și se fixează prin alegerea lui  $\varepsilon$ . Odată ce acesta este fixat, punerea la punct se face prin variația lungimii optice  $l$ .

Dacă dorim o mărire suplimentară se deplasează lentila suplimentară  $L$  (numită și **lentilă vehicol**) înspre imaginea reală  $y_2$  până se află între  $f$  și  $2f$  dar mai aproape de  $f$ , obținându-se o imagine reală și mărită  $Y$ , dar limitele de variație sunt mai mici căci  $\varepsilon$  poate depăși  $\varepsilon_{\max}$ .

Dacă  $\varepsilon > \varepsilon_{\max}$  imaginea virtuală se formează prea aproape de ochi depășindu-se puterea de acomodare a ochiului normal. Ochiul miop permite deplasări  $\varepsilon$  căci distanța lui minimă de vedere clară este mică, de 5-10 cm, dar nu prea mult.



**4.5.5. Luneta terestră Galilei** - Pentru redresarea imaginii obiectelor terestre se folosește (cu rezultate mai modeste) un ocular format dintr-o lentilă divergentă. Mersul razelor de lumină printr-o luneta Galilei se vede din figură:

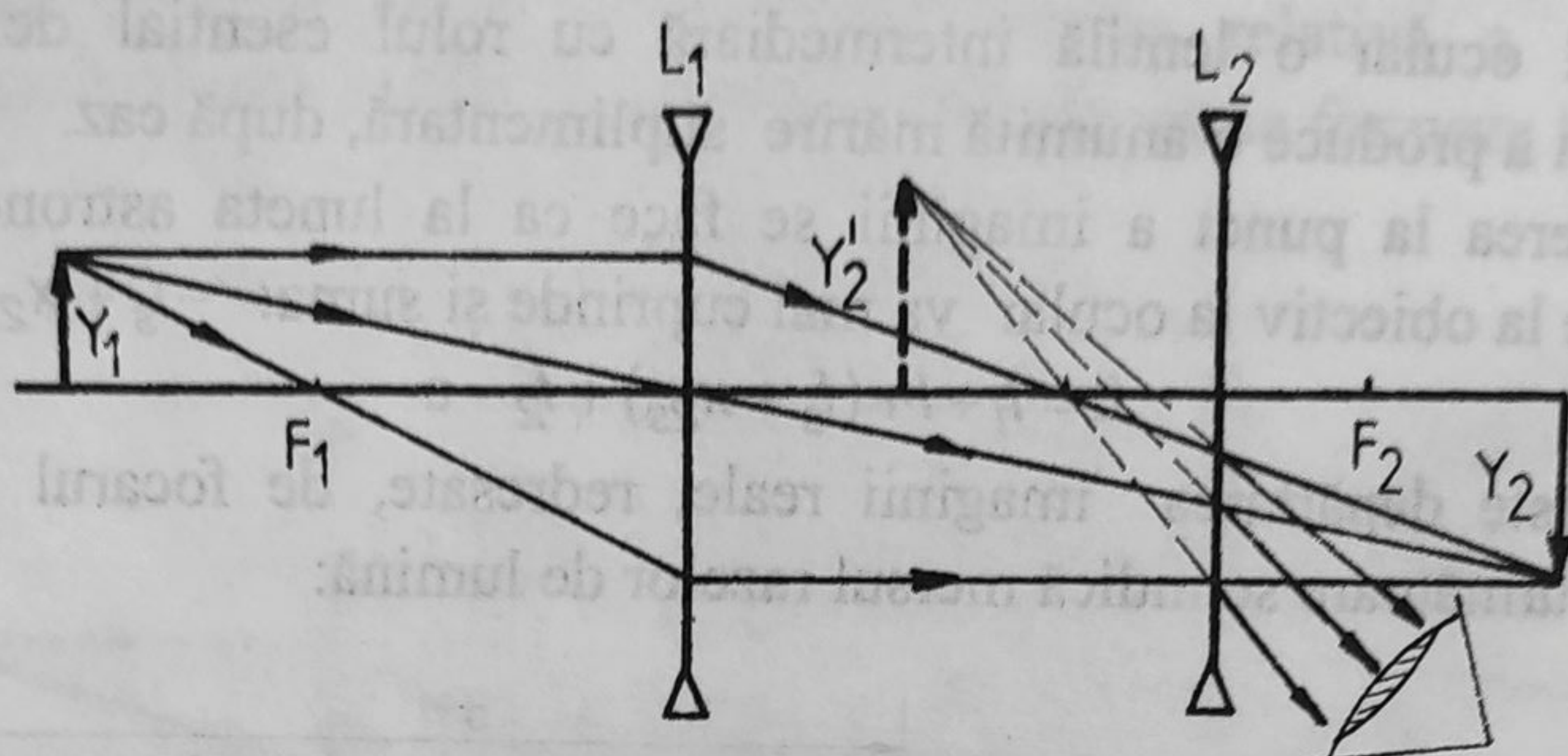


Fig. 125

După cum se vede, ocularul (lentila divergentă), se așează între obiectiv și imaginea reală a obiectivului, în acest caz distanța imagine - obiect este pozitivă față de ocular, iar imaginea sa are distanța negativă.

Razele 2 și 2' sunt necesare pentru a avea raze al căror mers prin lentila divergentă să-l cunoaștem. Imaginea virtuală  $y_2'$  se formează la intersecția prelungirii razelor 2 și 2'.

Prin deplasarea ocularului spre, imaginea virtuală se mărește și se deplasează spre infinit, micșorându-se distanța  $L$ . La o anumită distanță  $L'$  imaginea virtuală se va găsi la  $-x_2 = d$  când ochiul vede cu acomodare.

**Binoclul de teatru** - este în principiu format dintr-o pereche de lunete Galilei.

**Binoclul de câmp** - este format dintr-o pereche de lunete Kepler care au intercalate niște prisme cu reflexie totală pentru redresarea imaginii.

Vederea binoculară se obține prin suprapunerea imaginilor văzute de ambii ochi. Binoclurile militare au în plus fire reticulare cu gradații etalonate ce servesc la evaluarea distanțelor.

#### 4.5.6. Telescopul

**Telescopul** - este un instrument optic al cărui obiectiv este o oglindă. El este destinat cercetării stelelor îndepărtate care au intensitatea luminoasă foarte slabă. Oglinda concavă este de formă parabolică și dă o imagine perfect acromatică a obiectelor situate pe axa optică a oglinzii.



Pentru captarea unei cantități cât mai mare de lumină și pentru a obține o definiție cât mai bună a imaginilor (oglinda nu produce aberații), se folosește în locul obiectivului o oglindă sferică sau parabolică cu diametrul cât mai mare.

Imaginea reală a corpului ceresc ce s-ar forma în focar este dirijată cu o oglindă plană sau convexă, pe altă direcție către un ocular care formează imaginea virtuală ușor de văzut cu ochiul.

În funcție de poziția axei ocularului față de axa optică a oglinzii putem avea:

- *telescop tip Cassegrain* când cele două axe sunt înprelungire.
- *telescop tip Newton* la care axa ocularului este perpendiculară pe axa oglinzii după cum se vede și în figura următoare:

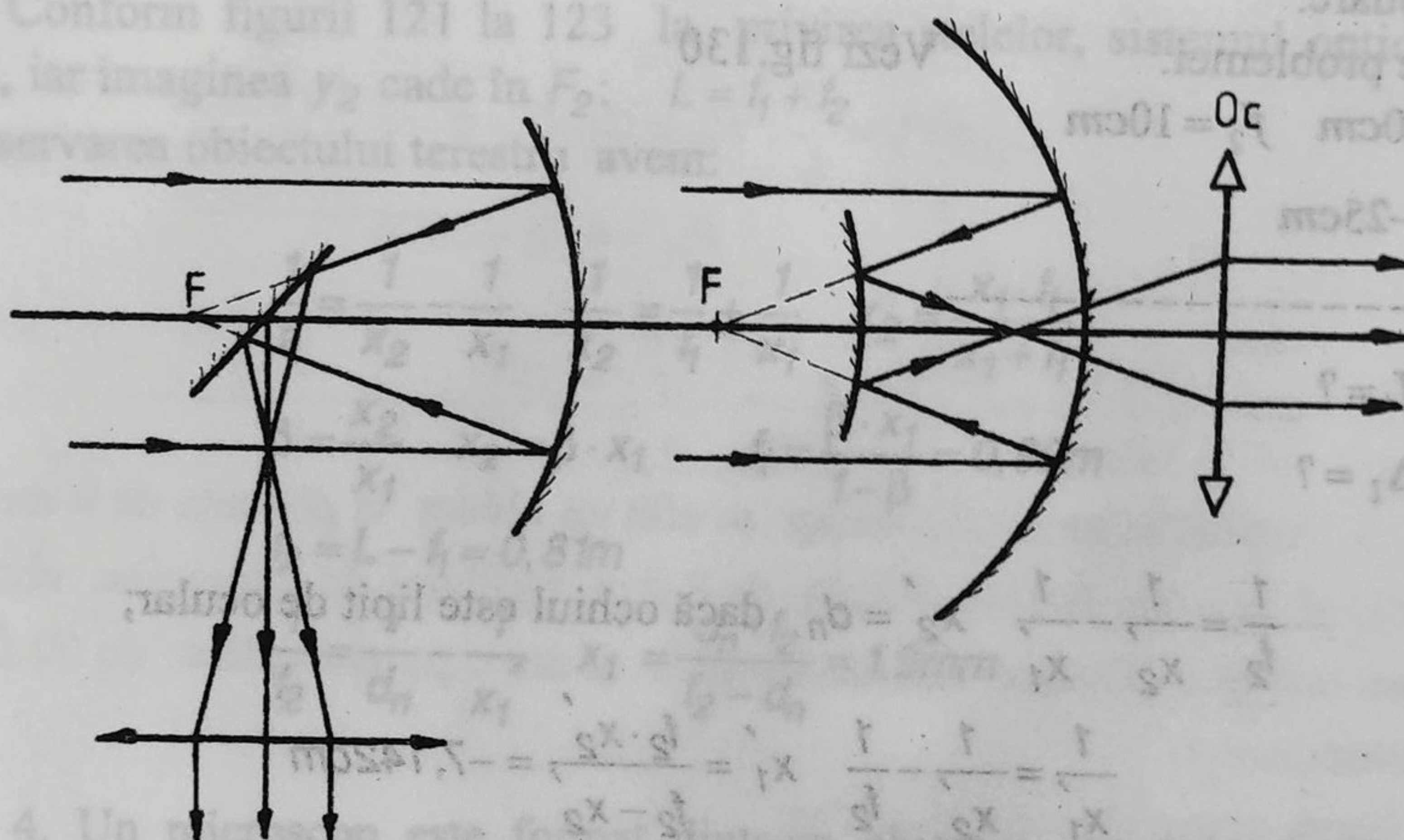


Fig. 126

#### 4.5.7. Probleme rezolvate

1. Ce înălțime are o casă dacă fiind fotografiată, pe clișeu are înălțimea de 3 mm iar distanța până la clădire este de 200 m. Se cunoaște distanța focală a obiectivului de 100 mm.

Datele problemei:

$$y_2 = 3 \text{ mm} \quad x_1 = d = -200 \text{ m}$$

$$f = 100 \text{ mm}$$

$$y_1 = ?$$



Când imaginea este clară pe film, avem relațiile de asemănare:

$$\frac{y_1}{f_2} = -\frac{x_1}{x_2} \quad y_1 = -y_2 \cdot \frac{x_1}{x_2}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \quad \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{f_2} \quad x_2 = \frac{x_1 \cdot f_1}{f_1 + x_1} = 10 \text{ m}$$

$$y_1 = 6 \text{ m}$$

2. O navă maritimă este privită cu o lunetă Kepler care are distanța focală a obiectivului de 80 cm și a ocularului de 10 cm. Observatorul vede imaginea cu acomodare și are ochiul lipit de ocular.

- Ce distanță există între obiectiv și ocular;
- Cu cât se modifică distanța obiectiv-ocular dacă ochiul vede fără acomodare.

Datele problemei:

Vezi fig.130

$$f_1 = 80 \text{ cm} \quad f_2 = 10 \text{ cm}$$

$$d_n = -25 \text{ cm}$$

$$a) \quad L = ?$$

$$b) \quad \Delta_l = ?$$

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1'} \quad x_2' = d_n \quad \text{dacă ochiul este lipit de ocular;}$$

$$\frac{1}{x_1'} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{f_2} \quad x_1' = \frac{f_2 \cdot x_2}{f_2 - x_2} = -7,142 \text{ cm}$$

$$L = x_2 - x_1' \quad x_2 = f_1 \quad \frac{1}{f_1} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{\infty}$$

$$L = f_1 - x_1' = 87,142 \text{ cm}$$

b) dacă ochiul vede fără acomodare, imaginea virtuală se află la infinit, iar imaginea dată de obiectiv se află în focarul ocularului.

$$L' = x_2 + f_2 \quad L' = f_1 + f_2 = 90 \text{ cm}$$

$$\Delta_l = L' - L = (90 - 87,142) \text{ cm} = 2,858 \text{ cm}$$

3. Privind o stea prin luneta Kepler, ochiul vede imaginea la infinit după potrivire, distanța dintre centrele optice ale obiectivului și ocularului fiind de 180 cm.



Privind prin aceeași lunetă un obiect terestru situat la 100 m, ocularul se deplasează pentru a vedea cu acomodare. Știind că mărirea liniară a obiectivului este de 0,001 să se determine distanțele focale ale celor două lentile, și noua poziție a imaginii reale față de ocular.

Datele problemei:

$$L = 180\text{cm} \quad x_1 = -100\text{cm}\beta$$

$$\beta = -0,01 \quad x_2' = d_n = -25\text{cm}$$

a)  $f_1 = ? \quad f_2 = ?$

b)  $x_1' = ?$

Conform figurii 121 la 123 la privirea stelelor, sistemul optic este afocal, iar imaginea  $y_2$  cade în  $F_2$ :  $L = f_1 + f_2$

La observarea obiectului terestru avem:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \quad \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{x_1} \quad x_2 = \frac{x_1 \cdot f_1}{x_1 + f_1}$$

$$\beta = \frac{x_2}{x_1} \quad x_2 = \beta \cdot x_1 \quad f_1 = \frac{\beta \cdot x_1}{1 - \beta} = 0,99\text{m}$$

$$f_2 = L - f_1 = 0,81\text{m}$$

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{d_n} - \frac{1}{x_1'} \quad x_1' = \frac{d_n \cdot f_2}{f_2 - d_n} = 1,9\text{mm}$$

4. Un microscop este format dintr-un obiectiv cu convergența de 150 δ și un ocular cu distanța focală necunoscută. Să se determine:

a) mărirea liniară realizată de obiectiv știind că lungimea optică este de 20 cm iar imaginea este văzută fără acomodare;

b) ce putere optică și ce distanță focală are ocularul dacă grosimentul microscopului este de 200 X.

Datele problemei:

$$C_1 = 150\delta \quad f_1 = \frac{1}{150}\text{m}$$

a)  $\beta = ? \quad e = 20\text{cm}$



$$a) \quad L = f_1 + f_2 + e = x_2 + f_2 \quad (\varepsilon = 0)$$

$$x_2 = f_1 + e \quad f_1 = \frac{1}{C_1} = 6,6 \text{ mm}$$

$$\text{In } (O_1) \quad \frac{1}{f_1} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \quad x_1 = \frac{f_1 \cdot x_2}{f_1 - x_2} = \frac{f_1}{e} \cdot (f_1 + e)$$

$$\beta = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f_1 + e}{-\frac{f_1}{e} \cdot (f_1 + e)}$$

$$\beta = -\frac{e}{f_1} = -30$$

$$C_2 = P_2 = \frac{1}{f_2} \quad P_m = C_1 \cdot C_2 \cdot e$$

$$b) \quad P_m = 4 \cdot G = 800\delta$$

$$C_2 = \frac{P_m}{C_1 \cdot e} = 26,6\delta$$

5. Pe platina unui microscop se află un obiect la distanța de 9 mm de obiectivul care are distanța focală de 8 mm. Ocularul dă o imagine virtuală pe care ochiul o privește fără acomodare și are o putere optică de 50 δ. Să se determine:

- distanța dintre obiectiv și ocular;
- puterea optică și grosimentul microscopului;
- distanța dintre imaginea virtuală și cea reală când ocularul se apropie de obiectiv cu 5 mm;
- noile valori pentru P și G.

Datele problemei:

$$x_1 = -9 \text{ mm} \quad f_1 = 8 \text{ mm} \quad (\varepsilon = 0) \quad C_2 = 50\delta$$

$$a) L = ?$$

$$b) P = ? \quad G = ?$$

$$c) x = ? \quad \Delta l = 5 \text{ mm} \quad F' = ? \quad G' = ?$$



a) conform figuri 127 în care imaginea  $Y_2'$  este la infinit:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \quad \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 + f_1}{x_1 \cdot f_1} \quad x_2 = 72 \text{ mm}$$

$$f_2 = \frac{1}{C_2} = 20 \text{ mm} \quad L = f_1 + f_2 + e = x_2 - x_1'$$

$$e = x_2 - f_1 = 64 \text{ mm}$$

$$b) P = \frac{e}{f_1 \cdot f_2} = 400 \delta \quad G = \frac{P}{4} = \frac{400 X}{4} = 100 \quad X$$

c) prin apropierea ocularului cu 5 cm, imaginea reală se apropie de ocular ceea ce face ca imaginea virtuală să vină la  $x_2'$  unde ochiul privește cu acomodare:

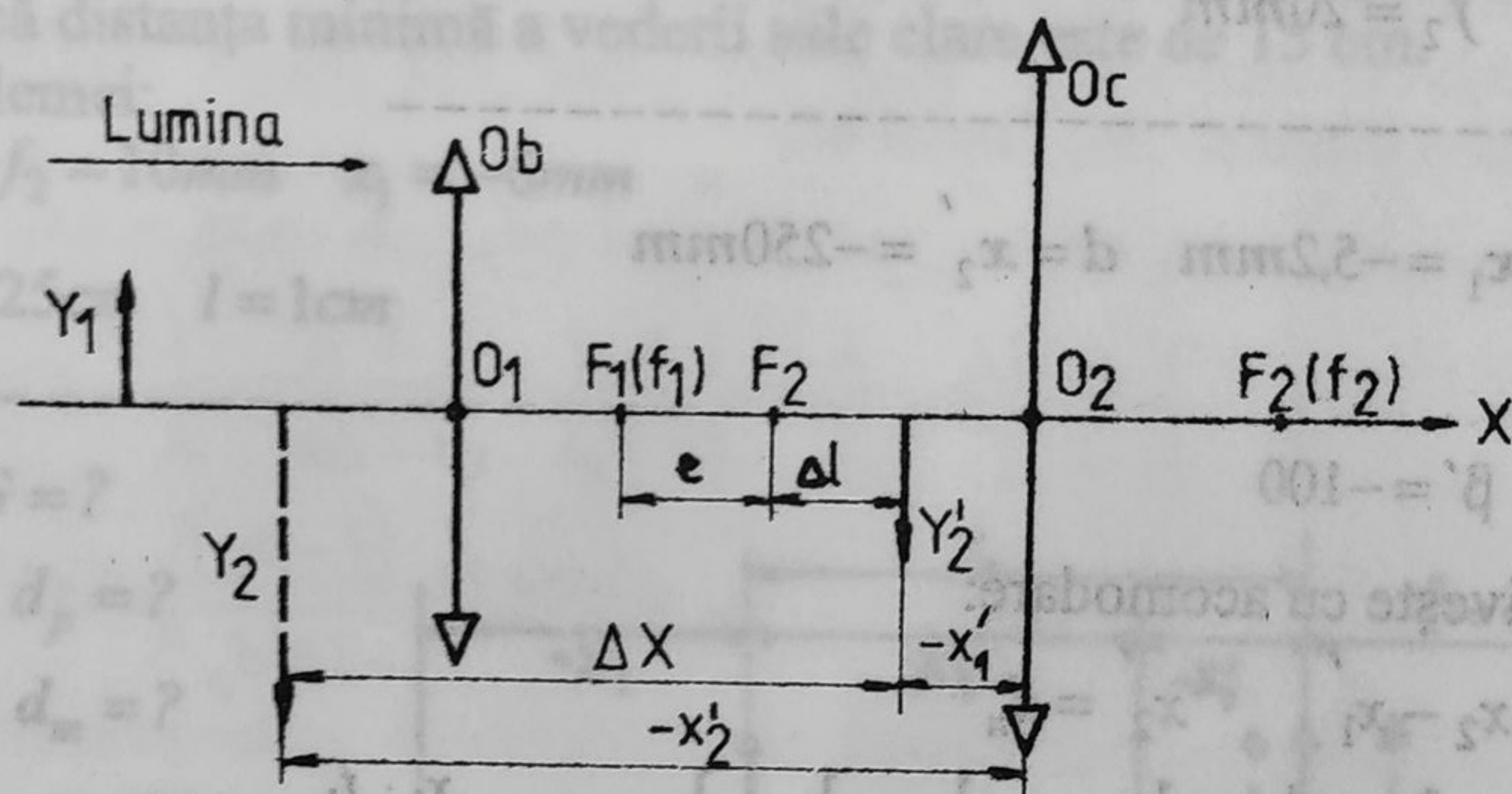


Fig. 127

Deci prin apropierea obiectivului de ocular, când se privește cu acomodare, puterea optică și grosimentul se micșorează.

6. Un microscop are un obiectiv cu distanța focală de 5 mm și un ocular cu distanța focală de 20 mm.

a) Se cere distanța dintre obiectiv și ocular atunci când un observator privește prin microscop un obiect situat la 5,2 mm în fața obiectivului iar imaginea virtuală se formează la 25 cm de ochiul presupus lipit de ocular;

b) De câte ori este mai mare decât obiectul, imaginea formată de obiectiv ;

c) În ce sens și cu cât trebuie deplasat ocularul în raport cu obiectivul ca să se obțină o imagine finală reală de 100 ori mai mare decât obiectul.

(Revista de Fizica și chimie C 839/1975).



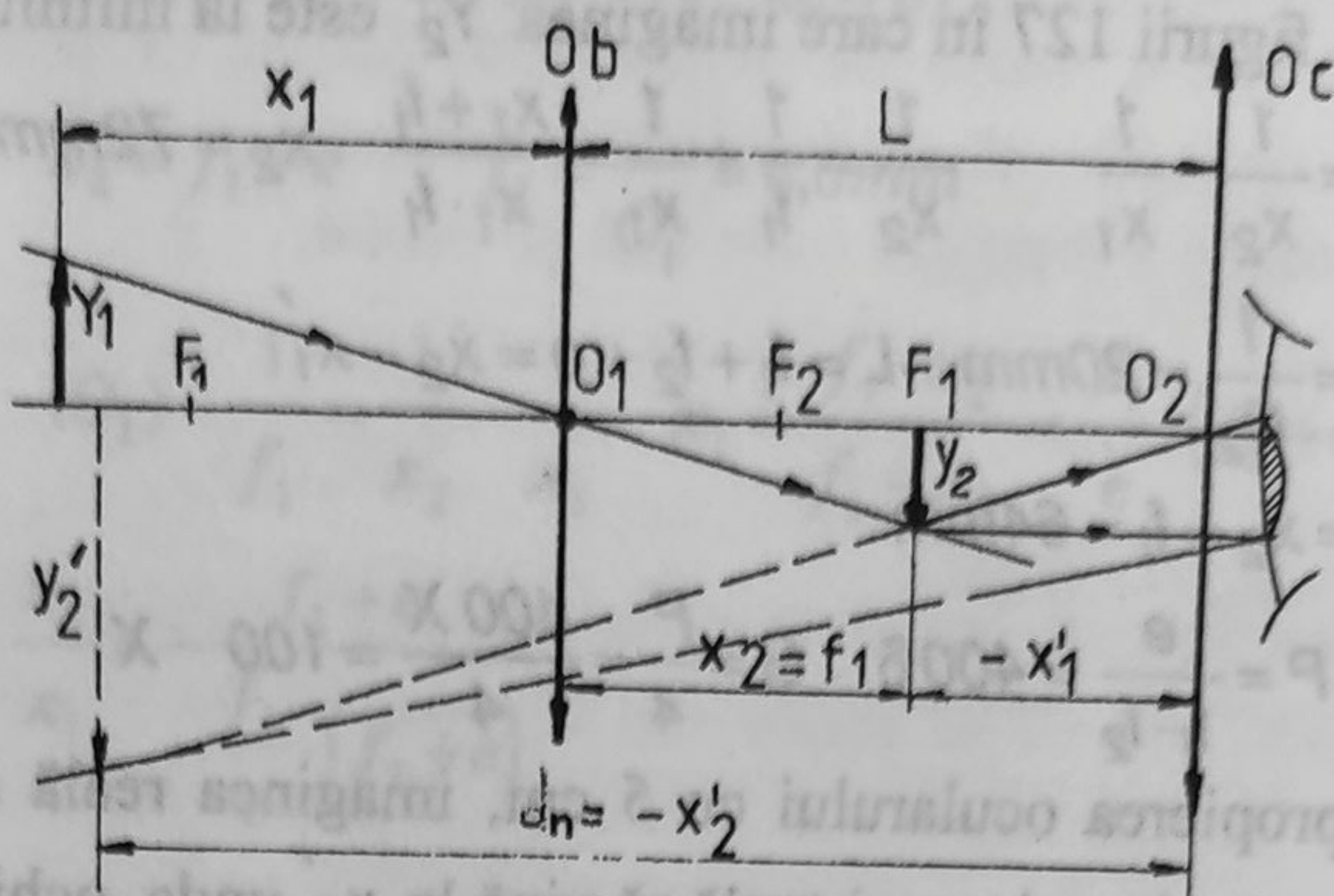


Fig. 128

Datele problemei:

$$f_1 = 5\text{mm} \quad f_2 = 20\text{mm}$$

a)  $L = ? \quad x_1 = -5,2\text{mm} \quad d = x_2' = -250\text{mm}$

b)  $\beta = ?$

c)  $\Delta x = ? \quad \beta' = -100$

Ochiul privește cu acomodare:

$$L = +x_2 - x_1' \quad x_2' = d_n$$

$$\text{In } O_1 \quad \frac{1}{f_1} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \quad \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{x_1} \quad x_2 = \frac{x_1 \cdot f_1}{x_1 + f_1} = 130\text{mm}$$

$$\text{In } O_2 \quad \frac{1}{f_2} = \frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1'} \quad \frac{1}{x_1'} = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{f_2} \quad x_1' = \frac{f_2 \cdot x_2}{f_2 - x_2} = -18,51\text{mm}$$

$$L = x_2 - x_1' = 130 - (-18,5) = 148,5\text{mm}$$

$$b) \quad \beta = \frac{x_2}{x_1} = \frac{130}{-5,2} = -25$$

c) Pentru a se obține o imagine reală prin ocular, trebuie ca ocularul să se depărteze astfel încât imaginea reală de la obiectiv, să se formeze înaintea focarului  $F_2$ .



$$\beta' = \frac{x_2''}{x_1} \quad x_2'' = \beta \cdot x_1''$$

$$\text{In } O_2 \quad \frac{1}{f_2} = \frac{1}{x_2''} - \frac{1}{x_1''} = \frac{1 - \beta'}{x_1'' \cdot \beta} \quad x_1'' = f_2 \cdot \frac{1 - \beta'}{\beta} = -20,2 \text{ mm}$$

$$\Delta x = x_1' - x_1'' \quad \Delta x = 20,2 - 18,5 = 1,7 \text{ mm}$$

7. Un microscop are distanța focală a obiectivului de 5 mm și distanța focală a ocularului de 10 mm. Se așează un obiect la 6 mm de obiectiv și se reglează ocularul până când un observator vede clar prin acomodare, cu ochiul situat la distanța de 1 cm de ocular.

- Care este puterea optică și grosimentul microscopului;
- În ce sens se va deplasa ocularul dacă prin acesta privește un prezbit cu distanța minimă a vederii clare de 80 cm;
- În ce sens va deplasa ocularul un miop care privește după prezbit, și cu ce distanță, dacă distanța minimă a vederii sale clare este de 15 cm.

Datele problemei:

$$f_1 = 5 \text{ mm} \quad f_2 = 10 \text{ mm} \quad x_1 = -6 \text{ mm}$$

$$d_n = x_2' = -25 \text{ cm} \quad l = 1 \text{ cm}$$

$$a) P = ? \quad G = ?$$

$$b) \Delta x_1 = ? \quad d_p = ?$$

$$c) \Delta x_2 = ? \quad d_m = ?$$

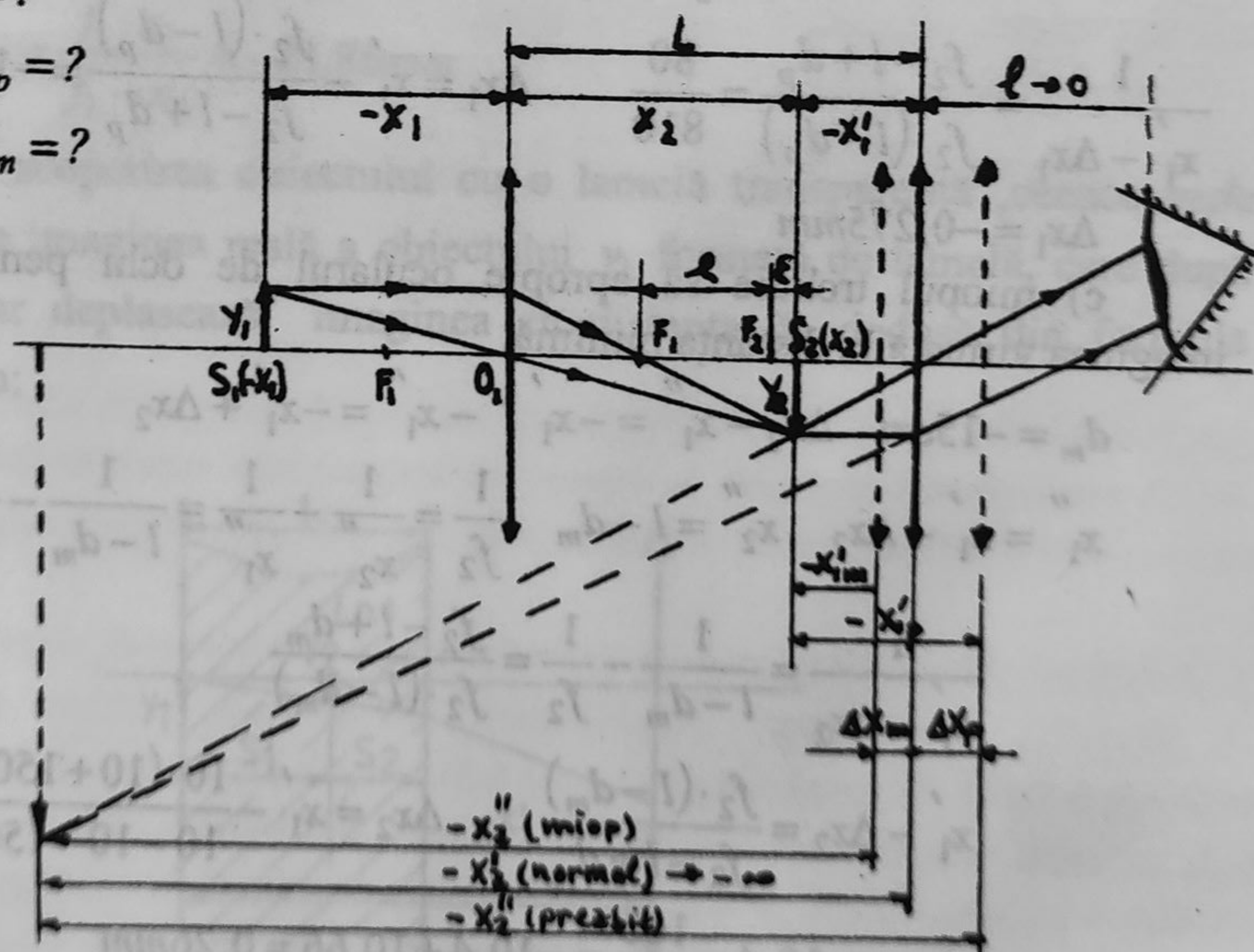


Fig. 129



Vedere clară fără acomodare înseamnă că imaginea  $x_2' \rightarrow \infty$

$$a) \text{ In } O_1 \quad \frac{1}{f_1} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \quad x_2 = \frac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} = 30 \text{ mm}$$

$$L = f_1 + f_2 + e = x_2 - x_1' \quad -x_2' + l = d_n \quad x_2' = l - d_n$$

$$\text{In } O_2 \quad \frac{1}{f_2} = \frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1'} \quad x_1' = \frac{f_2 \cdot (e - d_n)}{f_2 - e + d_n} = -10,4 \text{ mm}$$

$$\text{deci } f_1 + f_2 + e = x_2 - x_1' \quad e = x_2 - x_1' - (f_1 + f_2) = 25,4 \text{ mm}$$

$$P = \frac{e}{f_1 \cdot f_2} = \frac{25,4 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 508\delta \quad G = \frac{P}{4} = \frac{508}{4} = 127 X$$

b) prezbitul are distanța minimă de vedere clară de 80 cm, deci la această distanță minimă se poate forma imaginea virtuală privită cu acomodare maximă. În  $O_1$  avem distanțele :  $x_1 = -6 \text{ mm}$   $x_2 = 30 \text{ mm}$   
Pentru a aduce imaginea de la  $-\infty$  la  $d_p = -x_2 + l$  prezbitul depărtează ocularul cu o distanță  $\Delta x_1$  astfel că:

$$-x_1' + \Delta x_1 = -x_1'' \quad \text{si} \quad x_2'' = l - d_p \quad x_1'' = x_1' - \Delta x_1$$

$$\text{In } O_2 \quad \frac{1}{f_2} = \frac{1}{x_2''} - \frac{1}{x_1''} = \frac{1}{l - d_p} - \frac{1}{x_1' - \Delta x_1}$$

$$\frac{1}{x_1' - \Delta x_1} = \frac{f_2 - l + d_p}{f_2 \cdot (l - d_p)} = \frac{80}{810} \quad \Delta x_1 = x_1' - \frac{f_2 \cdot (l - d_p)}{f_2 - l + d_p} = -10,4 + 10,125$$

$$\Delta x_1 = -0,275 \text{ mm}$$

c) miopul trebuie să apropie ocularul de ochi pentru a apropia imaginea virtuală la distanța minimă:

$$d_m = -15 \text{ cm} \quad \Delta x_2 - x_1'' = -x_1' \quad -x_1'' = -x_1' + \Delta x_2$$

$$x_1'' = x_1' - \Delta x_2 \quad x_2'' = l - d_m \quad \frac{1}{f_2} = \frac{1}{x_2''} - \frac{1}{x_1''} = \frac{1}{l - d_m} - \frac{1}{x_1' - \Delta x_2}$$

$$\frac{1}{x_1' - \Delta x_2} = \frac{1}{l - d_m} - \frac{1}{f_2} = \frac{f_2 - l + d_m}{f_2 \cdot (l - d_m)}$$

$$x_1' - \Delta x_2 = \frac{f_2 \cdot (l - d_m)}{f_2 - l + d_m} \quad \Delta x_2 = x_1' - \frac{10 \cdot (10 + 150)}{10 - 10 - 150} =$$

$$\Delta x_2 = -10,4 - \frac{160}{-15} = -10,4 + 10,66 = 0,26 \text{ mm}$$



8. Pe masa unui microscop format din două lentile convergente așezate la distanța de 25 cm una de alta se află un obiect a cărui imagine prin microscop se formează la infinit.

Cunoscând distanțele focale de 20 cm pentru ocular și 15 mm pentru obiectiv să se determine:

- distanța obiectului și a imaginii față de obiectiv;
- cu cât trebuie deplasat ocularul pentru a vedea clar, fără acomodare, imaginea obiectului peste care s-a pus o lamelă subțire, transparentă, cu fețele plan-paralele, de grosime  $e = 1\text{ mm}$  și indice de refracție  $n = 1,5$ .

Datele problemei:

$$L = 25\text{ cm} \quad f_2 = 15\text{ mm} \quad f_1 = 20\text{ mm}$$

a)  $x_1 = ? \quad x_2 = ?$

b)  $\Delta x = ? \quad d = 1\text{ mm} \quad n = 1,5$

a) Conform figurii 113, imaginea reală se află în  $F_2$  iar imaginea virtuală la  $-\infty$

$$L = f_1 + f_2 + e = x_2 + f_2 \quad x_2 = L - f_2 = 250 - 15 = 235\text{ mm}$$

$$\text{In } O_1 \quad \frac{1}{f_1} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \quad \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{f_1} = \frac{f_1 - x_2}{f_1 \cdot x_2}$$

$$x_1 = \frac{f_1 \cdot x_2}{f_1 - x_2} = -21,86\text{ mm}$$

b) Prin acoperirea obiectului cu o lamelă transparentă, ceea ce vede obiectivul este imaginea reală a obiectului  $y_1$  formată de lamelă, care după cum știm doar deplasează imaginea cu distanța  $S_1$  dedusă din formula dioptrului plan;

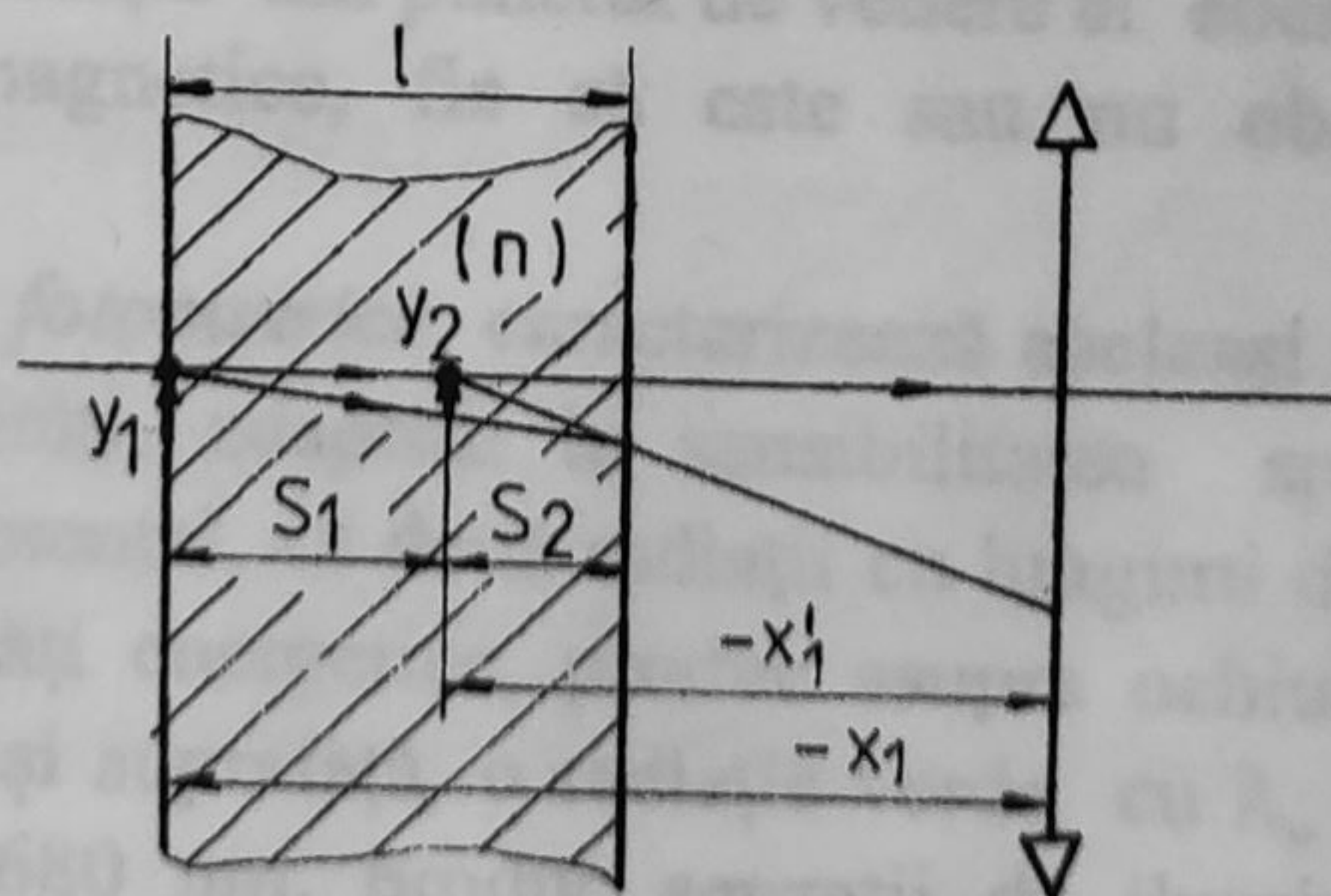


Fig. 130



$$S_2 = \frac{d}{n} \quad S_1 = d - S_2 = d \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = d \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{0,5}{1,5} \cdot 1\text{mm} = 0,33\text{mm}$$

deci distanța obiect-obiectiv s-a micșorat cu  $S_1$ :

$$-x_1 = S_1 - x_1' \quad x_1' = S_1 + x_1 = \frac{n-1}{n} \cdot d + x_1 = -21,53\text{mm}$$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{x_1'} - \frac{1}{x_1} \quad x_2' = \frac{f_1 \cdot x_1'}{f_1 + x_1'} = 281,44\text{mm}$$

$$\Delta x = x_2' - x_2 = 46,44\text{mm}$$

c) în cazul observării fără lamelă:

$$L = f_1 + f_2 - e = x_2 + f_2 \quad e = L - (f_1 + f_2) = 215\text{mm}$$

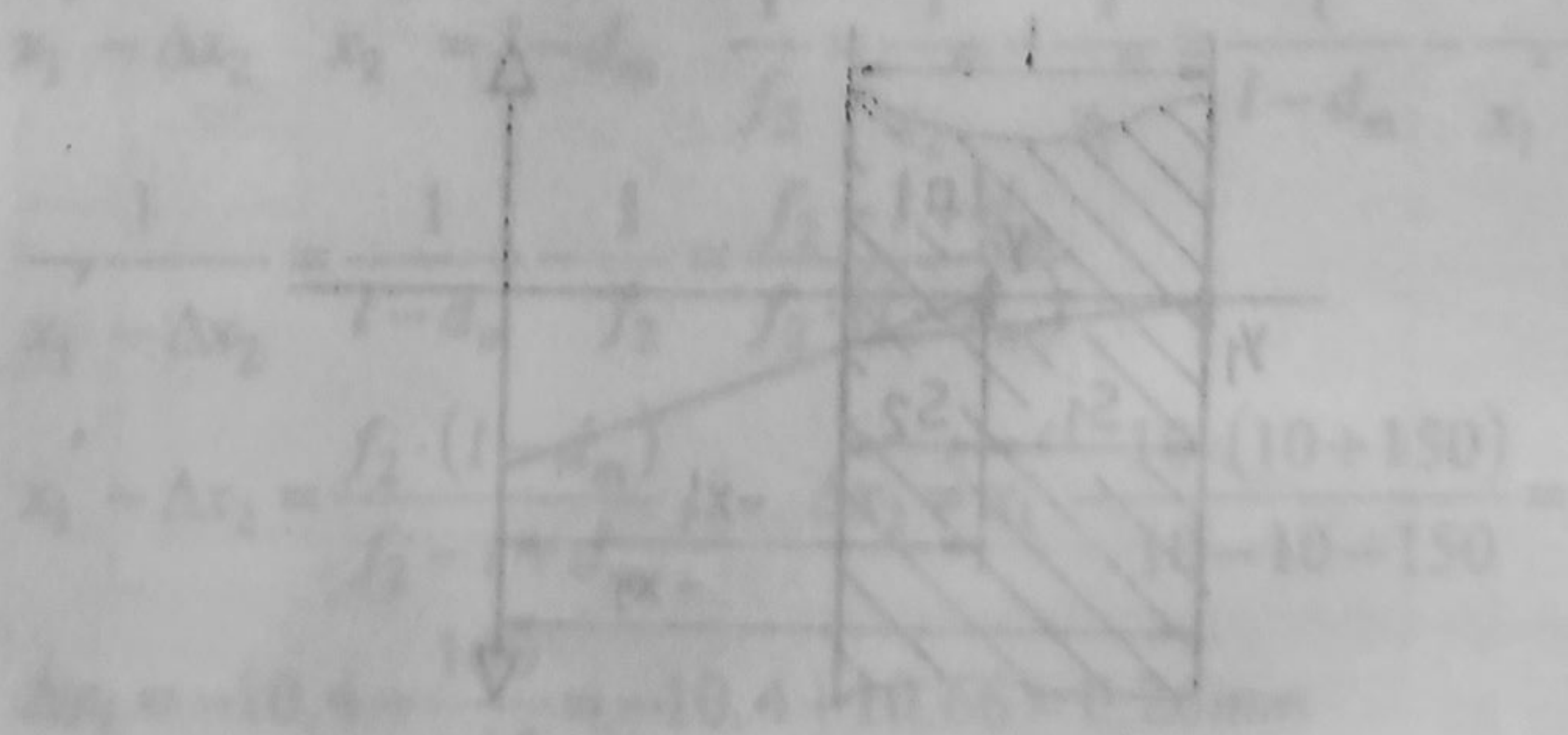
$$P = \frac{e}{f_1 \cdot f_2} = \frac{215 \cdot 10^{-3}}{15 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} \cdot \text{m}^{-1} = 716,6\delta \quad F = \frac{716,6}{4} = 179X$$

în cazul deplasării imaginii datorită lamelei:

$$L = f_1 + f_2 + e' = x_2' + f_2 \quad e' = x_2' + f_2 - f_1 - f_2 = x_2' - f_1 = 261,44\text{mm}$$

$$P' = \frac{e'}{f_1 \cdot f_2} = 871,46\delta$$

deci crește puterea optică a microscopului.





## CAPITOLUL V

### FOTOMETRIE

Fotometria este un capitol de optică în care se definesc toate mărimile ce caracterizează sursele de radiații luminoase, a unităților și a metodelor de măsură a acestor mărimi.

Radiațiile luminoase sunt caracterizate prin două feluri de mărimi optice:

- mărimi energetice;
- mărimi fotometrice.

Dintre mărimile energetice vom defini **Fluxul de energie radiantă** ( $\Phi_e$ ), **Iluminarea energetică** ( $E_e$ ), **Intensitatea energetică** ( $I_e$ ), **Luminanța** sau **strălucirea energetică** ( $B_e$ ) și **Radianța energetică** ( $R_e$ ). Mărimile fotometrice corespunzătoare sunt: **Fluxul luminos** ( $\Phi$ ) **Iluminarea luminoasă** ( $E$ ), **Intensitatea luminoasă** ( $I$ ), **Luminanța** sau **Strălucirea** ( $B$ ) și **Radianța** ( $R$ ).

**Mărimile energetice** împreună cu unitățile de măsură corespunzătoare, caracterizează radiația din punctul de vedere al energiei transportate de către undele electromagnetice, fie că este sau nu observabilă pentru ochiul omenesc.

**Mărimile fotometrice** caracterizează aceleași proprietăți ale radiațiilor dar cu alte unități, adaptate la sensibilitatea spectrală a ochiului. S-a constatat experimental, că două radiații cu lungimi de undă diferite măsurate de aceleași unități energetice, produc asupra ochiului efecte diferite: puse alături, pe aceeași suprafață, o radiație verde cu  $\lambda_v = 550$  nm cu o radiație roșie cu  $\lambda_r = 680$  nm, produc senzații de iluminare diferită și anume, culoarea verde pare de opt ori mai intensă decât culoarea roșie și de câteva sute de ori mai intensă decât culoarea violet.



Senzațiile luminoase produse de cele două iluminări devin aceleași prin mărirea corespunzătoare a fluxului de energie a radiațiilor cu culori diferite de culoarea verde. Se spune în acest caz că ochiul are sensibilitate spectrală și că aceasta este maximă pentru culoarea verde.

### 5.1. Fluxul de energie radiantă

**Fluxul de energie radiantă** notat cu  $\Phi_e$  este mărimea ce măsoară cantitatea de energie care străbate orice suprafață din secțiunea unui con divergent sub care emite sursa, în unitatea de timp. Prin definiție putem

scrie:  $\Phi_e = \frac{W}{t}$  cu unitatea  $[\Phi_e]_{SI} = \frac{J}{s} = W$

Pentru intervale mai mici de timp putem scrie:  $\bar{\Phi}_e = \frac{\Delta W}{\Delta t}$  și este o valoare medie.

La limită când  $\Delta t \rightarrow 0$  avem:  $\Phi_e = \frac{dW}{dt}$  și reprezintă valoarea momentană.

În același mod vom defini și celelalte mărimi. Delimitând în spațiul în care se propagă radiațiile un con de lumină cu vârful în sursă și care se sprijină pe o suprafață oarecare S ca în figură:

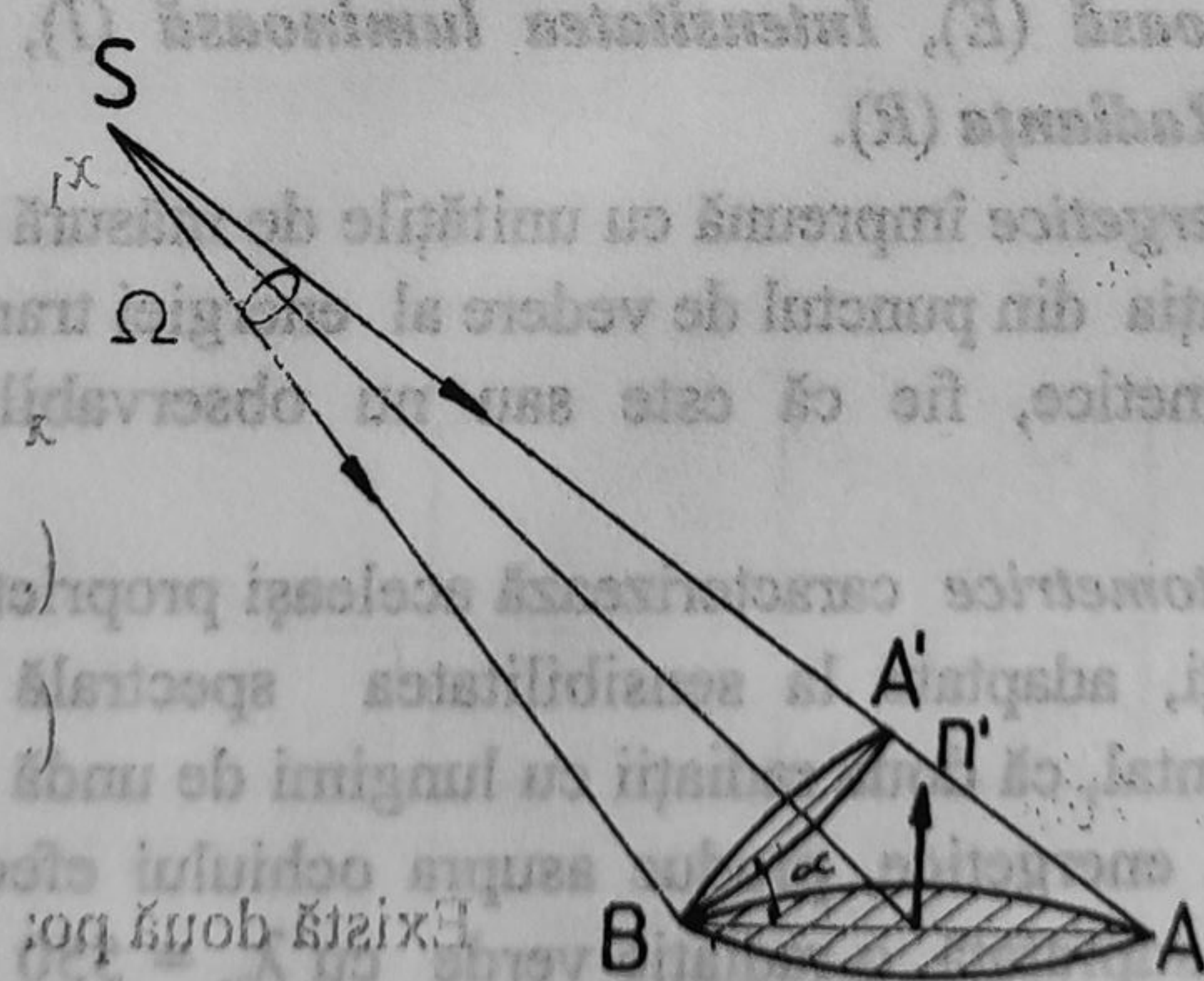


Fig. 131



putem afirma că energia care străbate în unitatea de timp suprafața de arie  $S$  este egală cu energia care străbate suprafața de arie  $S'$  în același timp.

Dacă sursa emite energie radiantă în mod izotrop în spațiu și în fiecare secundă aceeași cantitate, expresia dată mai sus pentru  $\Phi_e$  reprezintă fluxul energetic constant, același la orice moment de timp și nu contează conul ales. Definiția dată fluxului este valabilă și dacă sursa de radiație nu este punctiformă.

## 5.2. Iluminarea energetică

Iluminarea energetică notată cu  $E_e$  este mărimea ce caracterizează suprafețele iradiate și se măsoară prin fluxul de energie ce cade normal pe unitatea de suprafață:  $E_e = \frac{\Phi_e}{S} \left( \frac{W}{m^2} \right)$

Este numită *iluminare energetică medie* și are unitatea  $\frac{W}{m^2}$ . Dacă iluminarea nu este uniformă, variază cu poziția suprafeței alese, vom defini și o *iluminare energetică punctuală*:

$$\bar{E}_e = \frac{\Delta\Phi_e}{\Delta S} \text{ iar la limită: } E_e = \frac{d\Phi_e}{dS}$$

Observăm că în definiție se precizează că radiațiile cad perpendicular pe suprafața iradiată, deci se formează un unghi de  $180^\circ$  între direcția de propagare a radiației și normala la suprafață. Dacă suprafața este înclinată, vom lua proiecția sa pe planul transversal radiației.

## 5.3. Intensitatea energetică

*Intensitatea energetică* a radiației, notată cu  $I_e$ , este o mărime ce caracterizează sursa ce radiază energia și se măsoară prin fluxul de energie radiantă emisă în unitatea de unghi solid numit *steradian* (definit mai jos):

$$I_e = \frac{\Phi_e}{\Omega} \text{ numită } \textit{intensitate energetică medie}, \text{ cu unitatea: } [I_e]_{sr} = \frac{W}{sr}$$

$$\bar{I}_e = \frac{\Delta\Phi_e}{\Delta\Omega} \text{ numită } \textit{intensitatea energetică punctuală}.$$



În cazul iradierii neuniforme după diferite direcții în spațiu se definește ca în cazurile de mai sus intensitate punctuală diferențială:

$$I_e = \frac{d\Phi_e}{dS}$$

**Unghiul solid** - este un unghi delimitat în spațiu de suprafața laterală a unui con cu vârful în sursa  $S$  și de suprafața unei secțiuni prin acest con, care depinde atât de deschiderea conului cât și de depărtarea suprafeței secțiunii prin con precum și de orientarea normalei acestei suprafețe față de direcția de propagare după relația generală:

$$\Omega = \frac{S \cdot \cos \alpha}{r^2} \quad \text{sau punctual:} \quad d\Omega = \frac{\cos \theta \cdot dS}{r^2}$$

Unitatea de unghi solid este *steradianul*, este notat cu  $sr$  și este definit astfel, după cum se vede în figură.

**Steradianul** este unghiul solid care se sprijină pe o calotă sferică decupată de un con pe o sferă de rază  $r$  a cărei arie este egală cu aria unui pătrat de latură egală cu raza.

Dacă sfera are raza  $r = 1 \text{ m}$  atunci aria calotei decupată de unghiul solid de un steradian este  $1 \text{ m}^2$ . În jurul unei surse punctuale care emite radiație în întreg spațiul se formează un unghi solid de  $4 \cdot \pi$  steradiani căci suprafața sferei este  $S = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ , ceea ce ne dă:  $\Omega = 4 \cdot \pi \text{ sr}$ .

În mod corespunzător o sursă punctuală ce emite într-o emisferă cum este cazul unui bec lipit de tavan, unghiul solid este de  $2\pi$ .

**Deschiderea unghiului solid** - este unghiul format de generatoarele conului și se notează cu  $2 \cdot \theta$  deoarece este util și unghiul format de generatoare cu axa conului după cum se poate vede în probleme.

**Calculul unghiului solid** - se face plecând de la forma diferențială. Fie o suprafață iradiată de sursa  $S$  în interiorul unui unghi solid de deschidere, iar variația mică a unghiului solid cu deschiderea  $2 \cdot \theta$  se sprijină pe elementul de suprafață  $dS$ .

Pe desen am introdus unghiul plan  $2 \cdot \theta$  ce reprezintă deschiderea unghiului solid iar cu  $d\theta$  variația infinitezimală a acestuia. Atunci:

$$x = r \cdot \sin \theta \quad dx \equiv r \cdot d\theta$$

Se ține cont că raza este perpendiculară pe suprafața calotei sferice. Un element de suprafață de rază  $x$  are aria  $S = \pi \cdot x^2$  și variația  $dS = 2 \cdot \pi \cdot x \cdot r \cdot d\theta$ .



$$d\Omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \sin\theta}{r} \cdot d\theta = 2 \cdot \pi \cdot \sin\theta \cdot d\theta$$

$$\Omega = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{\theta_m} \sin\theta \cdot d\theta = 2 \cdot \pi \cdot (1 - \cos\theta_m)$$

Printr-o operație simplă de integrare se obține formula pentru unghiul solid în funcție de semideschiderea conului, care pentru cazurile particulare considerate mai sus confirmă valorile date.

#### 5.4. Luminanța energetică

**Luminanța energetică** este o mărime ce caracterizează sursele nepunctiforme și măsoară intensitatea energetică emisă de sursă în mod uniform în direcția normală, de către unitatea de suprafață se notează cu  $L_e$  sau  $B_e$ .

Conform definiției:  $L_e = \frac{I}{S}$

- Valoarea medie este dată de relația:  $\bar{L}_e = \frac{\Delta I}{\Delta S}$  cu unitatea  $\frac{W}{m^2 \cdot sr}$ .

- Valoarea diferențială punctiformă este:  $L_e = \frac{dI}{dS}$

**Radianța energetică** - măsoară fluxul luminos emis de către unitatea de arie în direcția normalei și are formula:  $R_e = \frac{\Phi_e}{S}$  cu unitatea  $\frac{W}{m^2}$ .

#### 5.5. Fluxul luminos ( $\Phi$ )

Pentru definirea mărimilor fotometrice este necesar să cunoaștem curba sensibilității spectrale relative a ochiului omenesc, adică funcția ce exprimă legătura dintre fluxul de energie  $\Phi_{e\lambda}$  corespunzător unei radiații de lungime de undă oarecare din spectrul vizibil și fluxul de energie  $\Phi_{e0}$  corespunzător radiației de culoare verde cu lungimea de undă de 550 nm, pentru a produce aceeași senzație de iluminare ochiului, deci raportul:

$$V_\lambda = \frac{\Phi_{e0}}{\Phi_{e\lambda}}$$

unde  $V_\lambda$  se numește *coeficientul de sensibilitate spectrală relativă*, iar dependența acestuia de lungimea de undă dedusă experimental este dată în figura de mai jos.



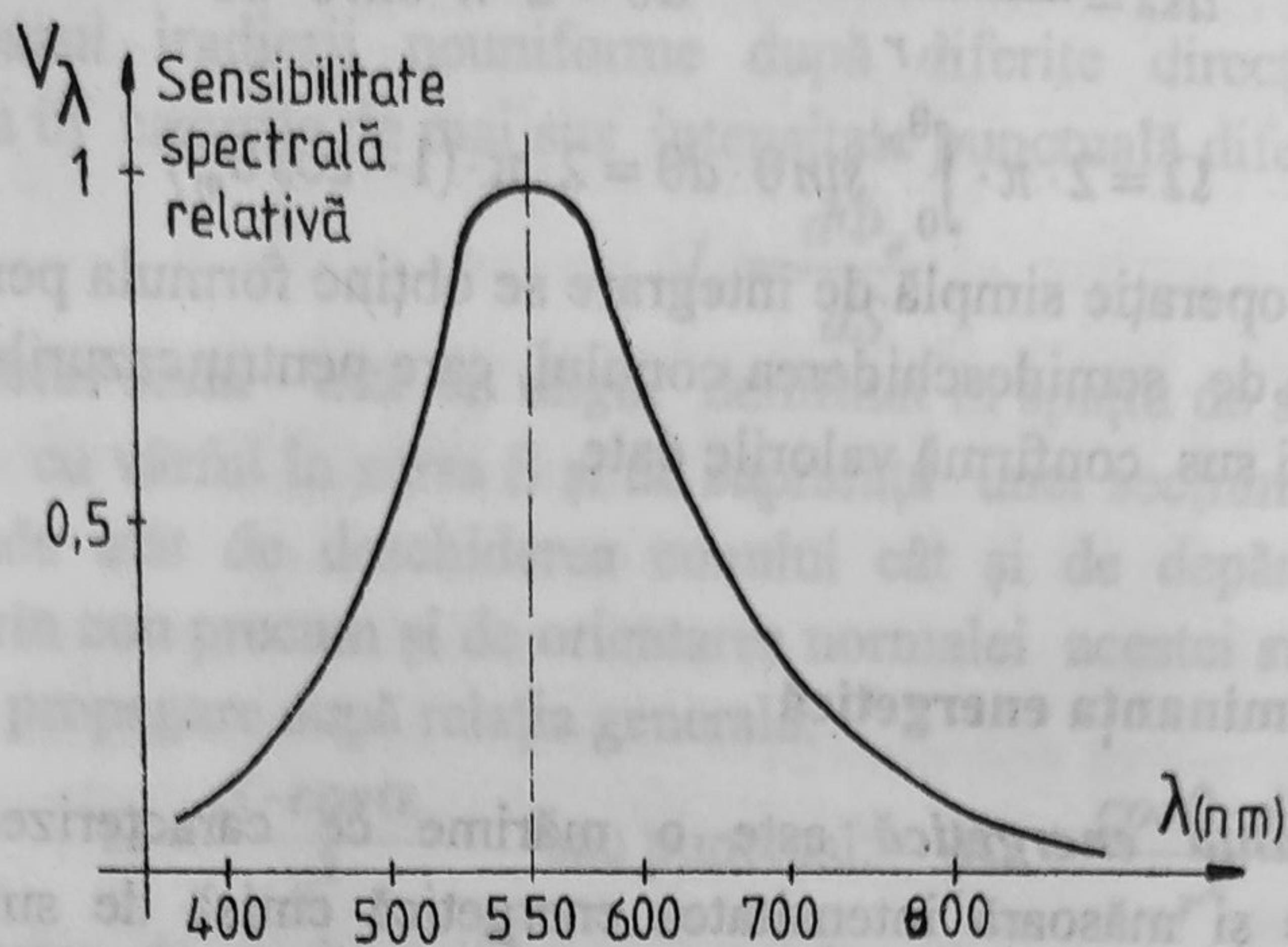


Fig. 132

După cum se vede, valorile lui  $V_\lambda$  sunt cuprinse în intervalul. Având definit acest coeficient, putem defini fluxul luminos astfel:

**Fluxul luminos** este o mărime ce caracterizează răspunsul ochiului la iluminarea energetică și reprezintă fluxul de energie radiantă evaluată prin intermediul senzației vizuale după expresia:

$$\Phi = k \cdot V_\lambda \cdot \Phi_{e\lambda}$$

Având drept unitate de măsură **lumenul** (lm). Coeficientul K este echivalentul fotometric al radiației și are valoarea de 675 lm/w.

Unitatea de flux, **lumenul**, reprezintă în trecut aproximativ fluxul produs de o lumânare. Întrucât această unitate deși foarte intuitivă, nu este reproductibilă cu precizie, lumenul devine unitate derivată din unitatea de intensitate luminoasă.

**Eficacitatea luminoasă** - (k) numit și coeficient de vizibilitate, arată câți lumeni corespund la fiecare watt de energie radiantă și se definește astfel:

$$k = \frac{\Phi}{\Phi_e} \text{ sau } k = k \cdot V_\lambda \quad [k]_{SI} = \frac{lm}{W}$$

Pentru radiația de culoare verde cu  $\lambda_0 = 550nm$  are valoarea maximă:

$$k = \frac{\Phi}{\Phi_{e0}}$$

În unele manuale această eficacitate luminoasă se mai notează și cu  $\eta$  considerând-o ca **randament luminos**.



## 5.6. Intensitatea luminoasă

*Intensitatea luminoasă* este o mărime ce măsoară cantitatea de flux luminos emisă de o sursă de lumină în unitatea de unghi solid:

- *Valoarea medie*

$$I = \frac{\Phi}{\Omega} \quad \text{sau} \quad \bar{I} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Omega}$$

- *Valoarea punctuală diferențială* pentru fluxuri variabile de la o direcție la alta:

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}$$

Unitatea de intensitate în **Sistemul International** de unități este **candela (cd)** care se poate defini în mod absolut în felul următor:

**Candela** este intensitatea luminoasă emisă de o suprafață de corp negru cu aria de  $\frac{1}{60} \cdot \text{cm}^2$ , adusă la temperatura de topire a platinei de 2043 K la presiunea normală a aerului de  $101\,325 \text{ N/m}^2$ .

Ca exemplu de corp negru, servește un cuptor din ceramică de formă sferică în care se topește platina, iar radiația de lumină iese printr-un orificiu cu suprafața de  $1/600\,000 \text{ m}^2$ .

Candela astfel definită are un grad înalt de reproductibilitate și este aleasă ca unitate fundamentală.

**Lumenul** este unitate derivată și se definește în funcție de candelă după relațiile de mai sus.

**Puterea specifică** - este definită ca raportul dintre puterea consumată pentru a produce o intensitate luminoasă de 1 cd și se măsoară în  $\text{W/cd}$ .

## 5.7. Iluminarea fotometrică

*Iluminarea fotometrică* este o mărime fotometrică ce se măsoară prin fluxul luminos ce cade normal pe unitatea de suprafață:

- *Valoarea medie a iluminării* unei suprafețe oarecare este dată de

$$\text{relația } E = \frac{\Phi}{S} \quad \text{sau} \quad \bar{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S}$$

- *Valoarea punctuală diferențială* în cazul unei iluminări neuniforme a întregii suprafețe este dată de relația:

$$E = \frac{d\Phi}{dS}$$



Unitatea de măsură pentru iluminare este **luxul (lx)** care este definit astfel:  $1lx = \frac{1lm}{m^2}$

Iluminarea este de  $1 lx$  atunci când pe o suprafață de  $1 m^2$  cade un flux luminos de 1 lumen. Fiind o unitate de măsură mică pentru iluminările obișnuite, se folosește un multiplu al său **phot-ul**.

$$1ph = \frac{1lm}{cm^2} = 10^4 \cdot lx$$

**Photul (ph)** măsoară o iluminare uniformă de:  $1ph = \frac{1lm}{cm^2} = 10^4 \cdot lx$ .

Ca și unitatea de flux, **luxul** este o unitate derivată. Pentru unghiuri de incidență diferite de zero se aplică legea lui Lambert.

### 5.8. Luminanța (L sau B)

**Luminanța** este o mărime fotometrică ce măsoară intensitatea luminoasă emisă în direcția normalei de către unitatea de suprafață a sursei de lumină.

- **Valoarea medie** pentru suprafața emițătoare de lumină este:

$$L = \frac{I}{S} \quad \text{sau} \quad \bar{L} = \frac{\Delta I}{\Delta S}$$

- **Valoarea punctuală diferențială**  $L = \frac{dI}{dS}$

Unitatea de măsură este în Sistemul International, **nitul** definit astfel:

$$1nt = \frac{1cd}{m^2}$$

În unele cărți această mărime este denumită și **Strălucire**, se notează cu B. Se folosesc următorii multiplii ai nit-ului:

$$- 1 \text{ stilb (sb)} = \frac{1cd}{m^2} = 10^4 \cdot nt$$

$$- 1 \text{ apostilb (asb)} = \frac{1}{\pi} \cdot nt$$

$$- 1 \text{ lambert (la)} = \frac{1}{\pi} \cdot st = \frac{10^4}{\pi} \cdot asb$$

$$- 1 \text{ nit (nt)} = \frac{lm}{sr \cdot m^2} = \frac{lx}{sr}$$



**Radianța** - este definită ca fluxul de lumină emis de o suprafață luminoasă în direcția normalei:

$$R = \frac{\Phi}{S} \text{ sau } \bar{R} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S} \text{ respectiv } R = \frac{d\Phi}{dS}$$

Unitatea de radianță este  $lm/m^2$ . Se pot face transformări de unități după cum urmează:

$$\frac{1lm}{m^2} = \frac{1cd \cdot 1sr}{1m^2} = lx$$

Între luminanță și radianță există o relație simplă:  $R = \pi \cdot L$

### 5.9. Legea lui Lambert

Prin iluminarea unei suprafețe cu radiație luminoasă provenită de la o sursă îndepărtată, razele vin aproximativ de-a lungul normalei după cum se poate vedea din figura de mai jos astfel că iluminarea se mai poate scrie:

$$E = \frac{\Phi}{S} \text{ unde } \Phi = I \cdot \Omega \text{ si } \Omega = \frac{S}{r^2} \text{ deci } E = \frac{I \cdot S}{S \cdot r^2} = \frac{I}{r^2}$$

Dacă fasciculul îngust de unghi solid  $\Omega$  cade sub un unghi  $\theta$  față de normală  $N$  la suprafața de arie  $S$ , vom lua proiecția acestei arii date pe planul  $S'$ :

$$E = \frac{I \cdot \cos\theta}{r^2}$$

numită legea Lambert.

### 5.10. Măsurări fotometrice

**Fotometrele** sunt aparate cu ajutorul cărora se pot compara intensitățile unor surse date, cu iluminări date de sursa etalon. Această comparație se poate face ușor pe baza legii lui Lambert astfel: sursa etalon de intensitate  $I_0$  și sursa de intensitate  $I$  necunoscută se așează la distanțele  $r_0$  și  $r$  respectiv de două ecrane ale căror iluminări sunt apreciate de ochi ca fiind egale cu destul de multă precizie datorită sensibilității mari a ochiului.

În acest caz:

$$E = E_0$$

$$\frac{I_0}{r_0^2} = \frac{I}{r^2} \quad I = I_0 \cdot \frac{r^2}{r_0^2}$$



Diferitele tipuri de fotometre diferă prin modalitatea de a conduce razele provenite de la cele două surse pe cele două câmpuri luminate juxtapuse astfel ca să nu se influențeze. Am expus doar principiul, ce poate fi aplicat la aparatele fotometrice, unele descrise în probleme.

### 5.11. Randament în radiația vizibilă

Acest *randament* se definește ca raportul dintre puterea emisă ca energie radiantă cu lungimea de undă din domeniul vizibil și puterea consumată de izvor.

$$\eta = \frac{\Phi_e}{P}$$

De exemplu: puterea electrică consumată de un bec electric se transformă doar în procent de 4 % în energie radiantă în domeniul vizibil (ca lumină). Deci din 60 W consumați din rețeaua electrică doar 3,4 W se transformă în putere luminoasă restul se transformă în putere calorică. Pentru un bec de 100 W se obține:

$$\Phi_e = \eta \cdot P = \frac{4}{100} \cdot 100W = 4W \quad k = 250lm/W$$

$$V = \frac{k}{k_{\max}} = \frac{250 \cdot \frac{lm}{W}}{620 \cdot \frac{lm}{W}} = 0,4$$

Pentru lămpile fluorescente randamentul este mai bun, de cca 20 %, ceea ce le face mai avantajoase în privința eficacității.

### 5.12. Probleme rezolvate

1. O sursă punctiformă cu intensitatea de 200 cd, se află la o înălțime de 3 m de podea. Să se determine :

- iluminarea pe verticala lămpii, produsă asupra podelei;
- iluminarea podelei la o distanță de 3 m de piciorul perpendicularei lămpii;
- la ce distanță de piciorul verticalei iluminarea este de 5 lx.

Datele problemei:

$$I = 200cd \quad h = 3m$$

-----  
a)  $E_1 = ?$

b)  $E_2 = ? \quad d = 3m$

c)  $x = ? \quad E_3 = 5lx$



$$a) E_1 = \frac{I}{h^2} = \frac{200}{9} \cdot \frac{cd}{m^2} \approx 21lx$$

$$b) E_2 = \frac{I \cdot \cos \alpha}{r^2} = \frac{I}{2 \cdot h^2} \cdot \frac{h}{h \cdot \sqrt{2}} = 8lx$$

$$c) E_3 = \frac{I}{h^2 + x^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}} \rightarrow x^2 = \left( \frac{I \cdot h}{E_3} \right)^{\frac{2}{3}} - h^2$$

2. O sursă punctiformă emite un flux luminos de 500 lm într-un con cu deschiderea de  $120^\circ$ . Să se determine intensitatea luminii produsă de această sursă.

Datele problemei:

$$\Phi = 500lm \quad 2 \cdot \theta = 120^\circ$$

$$I = ?$$

$$\Omega = 4 \cdot \pi \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2} = \pi \cdot sr \quad I = \frac{\Phi}{\Omega} = \frac{500}{\pi} \cdot \frac{lm}{sr}$$

3. O sursă punctiformă cu puterea electrică de 200 W este suspendată la 5 m înălțime, creind pe șosea o iluminare de 100 lx. Să se determine:

a) puterea consumată pentru fiecare candelă de intensitate;

b) fluxul luminos corespunzător fiecărui watt de putere consumată.

Datele problemei:

$$P = 200W \quad h = 5m$$

$$E = 100lx$$

$$a) \frac{P}{I} = ?$$

$$b) \frac{\Phi}{P} = ?$$

$$a) E = \frac{I}{r^2} \quad I = E \cdot r^2 = 100 \cdot 25 \cdot lx \cdot m^2 = 2500cd$$

$$\frac{P}{I} = \frac{200W}{2500cd} = 0,08 \frac{W}{cd}$$

$$b) \eta = \frac{\Phi}{P} = \frac{100 \cdot 4 \cdot \pi}{200} \cdot \frac{lm}{W} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{lm}{W}$$

4. O celulă fotoelectrică cu vid are aria suprafeței sensibile de  $2 cm^2$  și sensibilitatea de  $200 \mu A/lm$ . Ce curent electric va produce celula, dacă este iluminată de la o sursă punctiformă de 1000 cd la distanța de 0,5 cm.



Datele problemei:

$$S = 2\text{cm}^2 \quad s = 200\mu\text{A/lm}$$

$$I_C = ? \quad I = 1000\text{cd} \quad d = 0,5\text{cm}$$

$$\Phi = I \cdot \Omega = 1000 \cdot 8 \cdot \text{cd} \cdot \text{sr} \quad \text{deoarece} \quad \Omega = \frac{S}{r^2} = \frac{2}{25 \cdot 10^{-2}} \cdot \text{sr} = 8 \cdot \text{sr}$$

$$\Phi = 8000\text{lm} \quad s = \frac{I_C}{\Phi} \quad I_C = s \cdot \Phi = 200 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{\text{A}}{\text{lm}} \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot \text{lm} = 1,6\text{A}$$

5. O sursă punctiformă iluminează o masă rotundă cu raza de 1,5 m. Pe o placă circulară cu raza de 20 cm situată la 1m de masă, iluminarea centrului discului este de nouă ori mai mare decât iluminarea centrului mesei. Să se determine:

a) distanța de la sursă la masă;

b) la ce distanță de masă trebuie adusă o sursă punctuală pentru a crea o iluminare egală cu cea de pe discul de la punctul precedent.

Datele problemei:

$$R = 1,5\text{m} \quad r = 20\text{cm}$$

$$h = 1\text{m} \quad n = 9$$

$$a) x = ?$$

$$b) h' = ? \quad E' = E_1$$

$$a) \quad n = \frac{E_1}{E_2} \quad E_2 = \frac{I}{(h+x)^2} \quad E_1 = \frac{I}{x^2}$$

$$n \cdot \frac{I}{(h+x)^2} = \frac{I}{x^2} \quad \frac{(h+x)^2}{n} = x^2 \quad \frac{h+x}{\pm\sqrt{n}} = \pm x$$

$$h+x = \pm\sqrt{n} \cdot x \quad x \cdot (\pm\sqrt{n} - 1) = h \quad x_{1,2} = \frac{h}{\pm\sqrt{n} - 1}$$

$$x_1 = \frac{1\text{m}}{3-2} = 1\text{m} \quad x_2 = \frac{1\text{m}}{-3-2} = -\frac{1\text{m}}{5} = -0,2\text{m}$$

$$b) E' = \frac{I}{h'^2} = n \cdot \frac{I}{(h+x)^2} \quad h' = \frac{h+x}{\pm\sqrt{n}} = \frac{1+1}{\pm 3} \quad h'_1 = \frac{2}{3} \cdot \text{m} \quad h'_2 = \frac{2}{-3} \cdot \text{m}$$

6. Două surse de lumină cu intensitățile  $I_1 = 100\text{cd}$  și  $I_2$  necunoscut trimit raze perpendiculare pe două suprafețe egale. Când raportul dintre distanțele de la surse la suprafețe devine egal cu 2, ochiul le vede la fel iluminate.



- a) Să se determine intensitatea celei de a doua surse;  
 b) Știind că diferența dintre cele două distanțe este de 40 cm, să se determine iluminarea în centrele celor două discuri.

Datele problemei:

$$I_1 = 100 \text{ cd} \quad \frac{r_1}{r_2} = 2 = n$$

$$E_1 = E_2$$

$$a) I_2 = ?$$

$$b) r_1 - r_2 = 0,4 \text{ m}$$

$$E_1 = ? \quad E_2 = ?$$

$$a) \text{ fie } r_1 > r_2 \quad E_1 = \frac{I_1}{r_1^2} \quad E_2 = \frac{I_2}{r_2^2}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \quad \frac{I_1}{I_2} = n^2 \quad I_2 = \frac{I_1}{n^2} = 25 \text{ cd}$$

$$\text{daca } r_2 > r_1 \quad I_2 = n^2 \cdot I_1 = 400 \text{ cd}$$

$$b) \quad n = \frac{r_1}{r_2} \quad \Delta r = r_1 - r_2 \quad E_1 = \frac{I_1}{r_1^2} = \frac{2500}{16} \cdot lx = 156,25 lx$$

7. O sursă punctiformă cu fluxul egal cu 1200 lm, este închisă într-un glob alb, mat, de rază  $r = 1 \text{ cm}$ . Să se determine strălucirea unei suprafețe din glob cu raza de 1 cm.

Datele problemei:

$$\Phi = 1200 \text{ lm} \quad r = 10 \text{ cm}$$

$$B = ? \quad R = 1 \text{ m}$$

$$B = \frac{I}{S} \quad I = \frac{\Phi}{\Omega} \quad \Omega = 4 \cdot \pi \cdot sr \quad B = \frac{\Phi}{S \cdot \Omega} = 3000 \text{ nt}$$

8. Două felinare identice cu fereastra din sticlă mată, sunt egal depărtate, la distanța de 2,5 m de un zid vertical pe care creează o iluminare de 250 lx pe verticala zidului. Cunoscând strălucirile geamurilor de 7000 nt respectiv de 3000 nt să se determine:

- a) intensitățile celor două izvoare de lumină din felinare;  
 b) iluminările produse de fiecare felinar la o distanță dublă față de distanța inițială pe același zid.



Datele problemei:

$$d = 2,5m \quad E = 250lx$$

$$B_1 = 7000nt \quad B_2 = 3000nt$$

$$a) I_1 = ? \quad I_2 = ?$$

$$b) E_1 = ? \quad E_2 = ? \quad d' = 2 \cdot d$$

$$a) \quad I_1 = \frac{7}{3} \cdot I_2 \quad I_2 \cdot \left( \frac{7}{3} + 1 \right) = d^2 \cdot E \quad I_2 = \frac{d^2 \cdot E}{\frac{10}{3}} = \frac{3}{10} \cdot 6,25 \cdot 250 \cdot cd$$

$$I_2 = 486,75cd \quad I_1 = \frac{7}{3} \cdot I_2 = 1093,75cd$$

$$E = E_1 + E_2 = \frac{I_1 + I_2}{d^2} \quad I_1 + I_2 = d^2 \cdot E \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{7}{3}$$

9. Catodul cilindric al unei diode cu vid are lungimea de 2 cm și diametrul de 2,5 mm. Intensitatea luminii emisă pe o direcție radială este de 10 cd. Să se determine strălucirea suprafeței filamentului.

Datele problemei:

$$l = 2cm \quad d = 2,5mm$$

$$I = 10cd$$

$$B = ?$$

$$B = \frac{I}{S} = \frac{I}{l \cdot d} = \frac{10cd}{2 \cdot 10^{-2} \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} \cdot m^2} = 2 \cdot 10^5 nt$$

10. Un bec cu intensitatea luminoasă de 100 cd, lipit de tavanul unei încăperi, luminează o coală de hârtie albă, mată. Să se determine:

a) fluxul luminos al sursei;

b) radianța colii de hârtie;

c) suprafața colii dacă strălucirea ei este de 500nt.

Datele problemei:

$$I = 100cd$$

$$a) \Phi = ?$$

$$b) R = ?$$

$$c) S = ? \quad B = 500nt$$



$$a) \Phi = I \cdot \Omega \quad \Omega = 2 \cdot \pi \cdot sr \text{ (emisfera)} \quad \Phi = 100 \cdot 2 \cdot \pi \cdot cd \cdot sr = 200 \cdot \pi lm$$

$$b) R = \pi \cdot B = 0,2 \cdot \pi \cdot lx$$

$$c) B = \frac{I}{S} \quad S = \frac{I}{B} = 0,2 \cdot m^2$$

11. O sursă de lumină emite două radiații monocromatice cu lungimile de undă de 600 nm și 700 nm la un flux de 1 lm fiecare. Să se determine fluxurile energetice cunoscând eficacitatea luminoasă de 620 lm/W.

Datele problemei:

$$\lambda_1 = 600nm \quad \lambda_2 = 700nm$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 = 1lm$$

$$\Phi_{e1} = ? \quad \Phi_{e2} = ? \quad k = 620lm/W$$

$$k = \frac{\Phi_1}{\Phi_{e1}} \quad \Phi_{e1} = \frac{\Phi_1}{k \cdot V_1} = \frac{1 \cdot lm}{620 \cdot lm/W} = \frac{0,00161}{V_1} \cdot W$$

$$\text{la fel } \Phi_{e2} = \frac{\Phi_2}{k \cdot V_2} = \frac{1 \cdot lm}{620 \cdot \frac{lm}{m} \cdot V_2} = \frac{0,00161}{V_2} \cdot W$$



## CAPITOLUL VI

### OPTICA ONDULATORIE

#### 6.1. Unde luminoase

Studiul unor fenomene luminoase cum sunt difracția interferența și polarizarea a dus la concluzia că lumina este de natură ondulatorie. Aplicarea aparatului matematic de la teoria undelor mecanice la undele electromagnetice (luminoase) a permis obținerea unor rezultate pe cale teoretică în concordanță cu rezultatele experimentale.

În prezent se consideră lumina și ca undă electromagnetică. Studiul fenomenelor luminoase este privit ca un capitol special de electromagnetism pentru un interval îngust de lungimi de undă, numit domeniu vizibil.

După cum se știe, câmpul electromagnetic este un ansamblu de două câmpuri, electric și magnetic care se generează unul pe altul și sunt perpendiculare atât între ele cât și ambele pe direcția de propagare.

Dintre cei doi vectori  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  numai vectorul  $\vec{E}$  produce senzația luminoasă pe retină, de aceea se mai numește și *vector luminos*. Emisia unei unde electromagnetice se face de către un dipol oscilant, de aceea planul de oscilație al vectorului câmp electric este determinat de direcția dipolului.

La o sursă de lumină, nu avem un singur centru de emisie (un singur dipol) ci o infinitate. Știm că dipolii sunt atomi din sursă care emit sporadic radiație sub formă de *trenuri de undă* în timpul unei tranziții între nivelele energetice, cu vectorul  $\vec{E}$  orientat după toate direcțiile posibile din spațiu, un timp foarte scurt de  $10^{-9} - 10^{-8}$  secunde. Ținând cont de viteza de propagare a radiației luminoase de  $3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$  putem calcula lungimea

trenului de undă astfel:  $l = c \cdot t = 3 \cdot 10^8 \cdot \frac{m}{s} \cdot 10^{-8} s = 3m$  numită și *lungime*



*de coerență*. În figura următoare se arată câteva trenuri de undă cu vectorii luminoși  $\vec{E}$  orientați în toate direcțiile, perpendicular pe direcția de propagare și în succesiune întâmplătoare. *Trenul de undă* este caracterizat în afară de lungimea de coerență și de o frecvență  $\nu$ , aceeași pentru o sursă dată și de lungimea de undă  $\lambda$  între care există relația:  $\lambda = \frac{c}{\nu}$ .

## 6.2. Monocromaticitatea

Unele surse de lumină cum sunt laserii și lămpile spectrale se consideră că emit unde electromagnetice cu o singură frecvență și lungime de coerență infinită (obținută prin *înzădirea* trenurilor de undă) numite *unde monocromatice*. Deși nu există unde perfect monocromatice, sursele considerate mai sus au un grad mai mare de monocromaticitate.

Undele monocromatice cu lungimi de undă diferite din spectrul vizibil produc senzație luminoasă de culoare: - unda cu  $\lambda_r = 750$  nm crează senzația de culoare roșie în timp ce unda cu  $\lambda_v = 550$  nm dă senzația de culoare verde s.a.m.d.

*Lumina albă* este o suprapunere infinită de radiații monocromatice din spectrul vizibil și la o descompunere a sa după lungimile de undă cu ajutorul unei prisme, fenomen numit *dispersie*, se obține un spectru continuu de radiație care se prezintă ca o variație continuă a culorii de la roșu până la violet ca un curcubeu. Totuși ochiul omenesc nu sesizează o infinitate de nuanțe, un ochi antrenat sesizează distinct doar câteva sute.

## 6.3. Efectul Doppler în Optică

Analogia între propagarea luminii și propagarea sunetului, a sugerat existența eterului ca mediu de propagare pentru undele luminoase până la descoperirea de către Hertz a undelor electromagnetice.

Pe baza acestei analogii s-a considerat că și pentru undele luminoase trebuie să existe un *efect Doppler*. Amintim că în Mecanică prin efect Doppler se înțelege variația frecvenței oscilațiilor (notăm cu  $\Delta\nu$ ) recepționate



de un observator aflat în mișcare relativă față de o sursă care emite cu o frecvență constantă (notată cu  $\nu$ ) după cum urmează:

1. *Observator fix, sursă mobilă:*

$$\nu = \nu_0 \cdot \frac{c}{c \pm v_1} \quad \text{sau} \quad \nu = \nu_0 \cdot \frac{1}{1 \pm \frac{v_1}{c}}$$

Semnul + se scrie pentru sursa care se îndepărtează, iar semnul - pentru sursa care se apropie.

2. *Observator mobil, sursă fixă:*

$$\nu = \nu_0 \cdot \frac{c \pm v_2}{c} \quad \text{sau} \quad \nu = \nu_0 \cdot \frac{1 \pm \frac{v_2}{c}}{1} = \nu_0 \cdot \left(1 \pm \frac{v_2}{c}\right)$$

Semnul + se scrie pentru observatorul care se apropie iar semnul - pentru observatorul care se depărtează.

3. *Observator și sursă mobilă:*

a) vitezele lor se află pe direcția ce unește sursa cu observatorul:

$$\nu = \nu_0 \cdot \frac{1 \pm \frac{v_2}{c}}{1 \mp \frac{v_1}{c}}$$

Combinția  $\pm$  se ia pentru observator și sursă care se apropie, iar  $\mp$  pentru observator și sursă care se depărtează.

b) vitezele lor fac unghiurile  $\alpha_1$  și  $\alpha_2$  cu direcția razei vectoriale ce unește sursa de observator ca în figură:

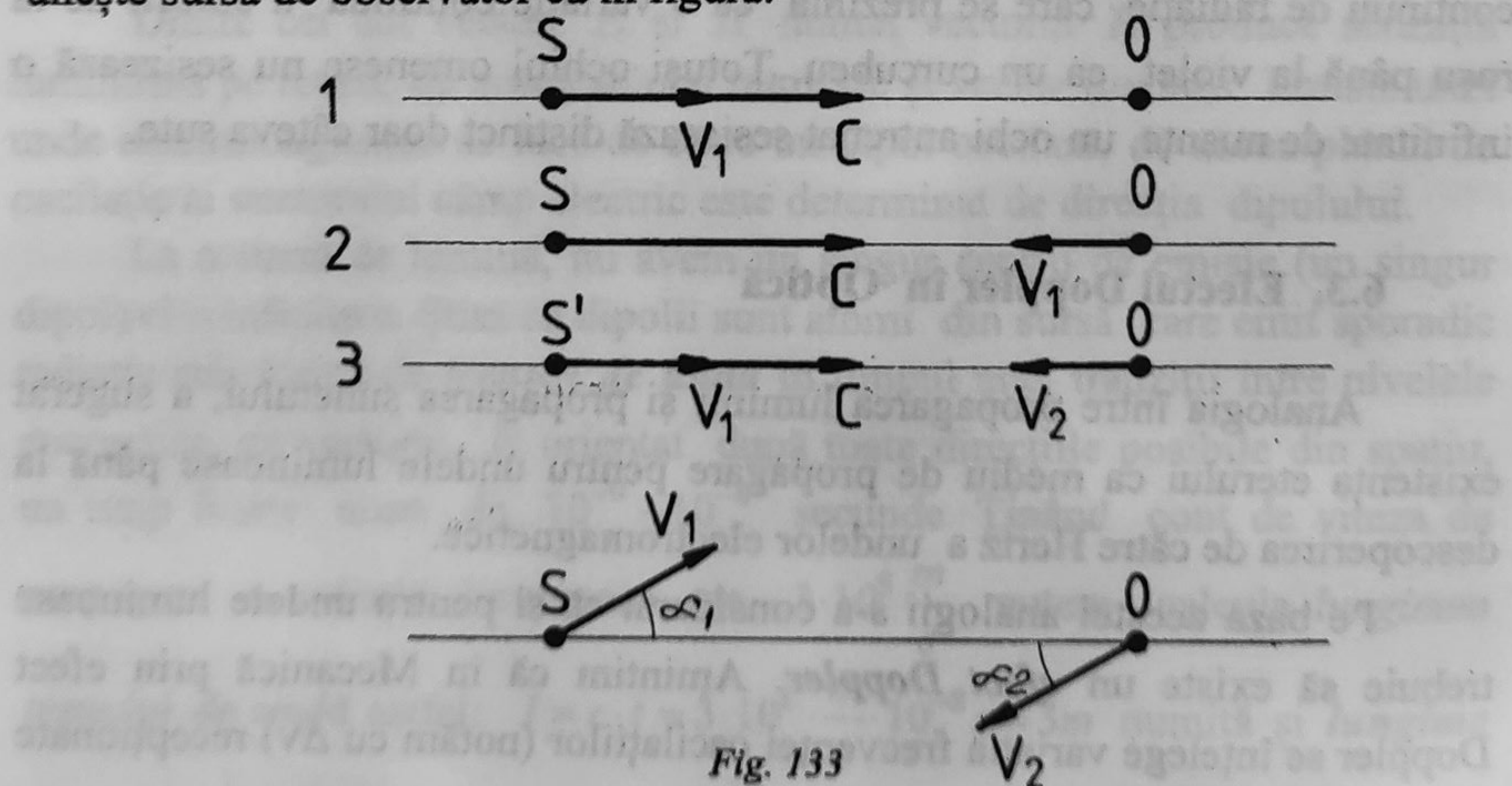


Fig. 133



$$v = v_0 \cdot \frac{1 + \frac{v_2}{c} \cdot \cos \alpha_2}{1 + \frac{v_1}{c} \cdot \cos \alpha_1}$$

Efectuând dezvoltarea după binomul lui Newton a expresiei numitorului pentru  $v \ll c$  obținem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \frac{v_1}{c} \cdot \cos \alpha_1} &= 1 - \left( \frac{v_1}{c} \right) \cdot \cos \alpha_1 + \left( \frac{v_1}{c} \right)^2 \cdot \cos^2 \alpha_1 - \dots \\ v &= v_0 \cdot \left( 1 + \frac{v_2}{c} \cdot \cos \alpha_2 \right) \cdot \left( 1 - \frac{v_1}{c} \cdot \cos \alpha_1 + \left( \frac{v_1}{c} \right)^2 \cdot \cos^2 \alpha_1 \right) \equiv \\ &\equiv v_0 \cdot \left( 1 - \frac{v_1 \cdot \cos \alpha_1 - v_2 \cdot \cos \alpha_2}{c} + \frac{v_1 \cdot \cos \alpha_1 - v_2 \cdot \cos \alpha_2}{c} \cdot \frac{v_1}{c} \cdot \cos \alpha_1 + \dots \right) \end{aligned}$$

Deoarece  $v_1 \cdot \cos \alpha_1$  - reprezintă proiecția pe direcția radială a mișcării sursei, iar  $v_2 \cdot \cos \alpha_2$  - reprezintă componenta radială a mișcării observatorului. Diferența  $v_1 \cdot \cos \alpha_1 - v_2 \cdot \cos \alpha_2$  - reprezintă viteza relativă a observatorului față de sursă de-a lungul razei  $\vec{r}$  (viteza radială) și este egală cu  $v_r \cdot \cos \theta$  formula devine:

$$v = v_0 \cdot \left( 1 - \frac{v_r}{c} \cdot \cos \theta \right) \text{ pentru } v = \frac{c}{\lambda} \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0} \cdot \left( 1 - \frac{v_r}{c} \cdot \cos \theta \right)$$

rezultă  $\lambda > \lambda_0$  deci  $\lambda$  se mărește.

Pentru sunet îndepărtarea sursei de observator se sesizează ca o *deplasare a sunetului* către tonuri joase iar pentru lumină ca o *deplasare spre marginea roșie a domeniului vizibil* denumită "**deplasarea spre roșu**".

**Observația 1.** Dacă mișcarea sursei în raport cu observatorul se face pe o direcție perpendiculară pe direcția razei ce unește observatorul cu sursa  $\alpha = \pi/2$  și  $v = v_0$ , deci nu există după Mecanica clasică *efect Doppler transversal*.

**Observația 2.** În Teoria Relativității s-a găsit o altă formulă pentru efectul Doppler: Pentru viteze mici  $v \ll c$  se obține o expresie care coincide cu formula dată de Mecanica Clasică.

$$v = v_0 \cdot (1 - \beta \cdot \cos \theta) \text{ unde } \beta = v_r / c$$



Pentru viteze mari, când  $v$ , nu se mai poate neglija (acesta este cazul luminii) formula este:

$$v = v_0 \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta} \quad \text{deci} \quad v < v_0 \quad \lambda > \lambda_0$$

lungimea de undă crește, fenomen numit **deplasarea spre roșu**.

Dar formula generală arată că mai există și un efect Doppler transversal. Pentru  $\alpha = \pi/2$   $v = v_0 \cdot \sqrt{1-\beta^2} \cong v_0 \cdot \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right)$ .

Acest efect relativist a fost pus în evidență experimental în 1938 de H. E. Ives și G. R. Stillwell. Rezultă din formula generală pentru deplasările radiale  $\alpha = 0^\circ$  cu viteza relativă  $v$ , că se poate deduce viteza de deplasare a stelelor față de observator sau viteza de deplasare a țintei față de un radiolocator.

Prin studiul liniilor spectrale de absorbție a luminii provenită de la stele și alte corpuri cerești ca nebuloase sau galaxii s-a constatat că acestea se depărtează de noi și că viteza lor crește pe măsură ce sunt mai depărtate, constituind baza experimentală a ipotezei marii explozii inițiale (Big Bang - în engleză).

Și rotația corpurilor cerești poate da efect Doppler căci diferitele sale puncte se mișcă față de observator cu diferite viteze.

#### 6.4. Intensitatea energetică a luminii

Ecuția de undă a vectorului câmp electric este o funcție de două variabile: distanța de la sursă și timpul de la începerea propagării:

$$E(r, t) = E_0 \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right)$$

Aceasta rezultă din ecuațiile lui Maxwell care stau la baza teoriei electricității clasice. Pe cale elementară aceasta a fost dedusă la capitolul de Unde și Oscilații mecanice (vezi manualul de liceu). Faza oscilației vectorului luminos  $\varphi$  este argumentul funcției trigonometrice:

$$\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right)$$

După cum se vede din această formulă, faza oscilației depinde atât de timp cât și de distanța străbătută de unda electromagnetică. Defazajul dintre două unde de aceeași frecvență și emise de aceeași sursă va depinde doar de diferența dintre drumurile străbătute de fiecare.



Din teoria lui Maxwell rezultă de asemenea că unda electromagnetică transportă continuu energie, că este emisă și absorbită în mod continuu. Densitatea volumică de energie primită de ochiul situat într-un anumit punct din spațiu este:

$$w = \frac{W}{V} = \epsilon \cdot E^2 = \epsilon \cdot E_0^2 \cdot \sin^2 \omega t \quad \left( \frac{J}{m} \right)$$

Ochiul omenesc are inerție și nu poate urmări variațiile de  $10^{14}$  ori pe secundă ale mărimii vectorului  $\vec{E}$  așa că senzația luminoasă va fi proporțională cu valoarea medie a acestei energii variabile.

Notăm valoarea medie a intensității câmpului electric prin simbolul  $\langle \vec{E} \rangle$ . Intensitatea luminoasă energetică este proporțională cu pătratul intensității câmpului electric:

$$I_e \approx \vec{E}^2$$

iar intensitatea luminoasă este proporțională cu media pătratului intensității câmpului electric:

$$I \approx \langle \vec{E}^2 \rangle$$

Factorul de proporționalitate conține atât unitățile cât și coeficientul de sensibilitate spectrală. În cele ce urmează nu avem nevoie de acest factor de proporționalitate astfel că vom identifica pe  $I$  cu  $E^2$  unde  $(\vec{E}^2 = E^2)$  până la o constantă:

$$I_e = \frac{\Phi}{\Omega} = \frac{W}{\Omega \cdot t} = \frac{V \cdot \epsilon}{\Omega \cdot t} \cdot E^2 \quad k = \frac{V \cdot \epsilon}{\Omega \cdot t} \quad I_e = k \cdot E^2$$

Dacă  $E_0$  are valoare mică sau zero, ochiul nu are senzație de lumină, dacă valoarea lui  $E_0$  crește, ochiul are o senzație luminoasă cu atât mai puternică cu cât  $E_0$  crește. Dacă două surse de lumină distincte produc în același punct din spațiu, intensitățile luminoase respective, rezultatul este o intensitate rezultantă  $I$  dată de relația:

$$I = I_1 + I_2$$

Dacă sursele nu sunt diferite, adică razele de lumină provin de la același izvor, intensitatea rezultantă într-un punct poate fi diferită de suma lor:

$$I \neq I_1 + I_2$$

datorită fenomenului de interferență. Acest fenomen apare datorită compunerii vectoriale a celor doi vectori luminoși  $\vec{E}_1$  și  $\vec{E}_2$  ce provin de la aceeași sursă și deci sunt coerenti:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad I = \langle \vec{E}^2 \rangle = \langle (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 \rangle$$



Conform definiției produsului scalar:

$$\vec{E}_1^2 = E_1^2 \quad \vec{E}_2^2 = E_2^2$$

$$(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2 \cdot \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$$

Aplicând definiția mediei pe o perioadă, media sumei este egală cu suma mediilor:

$$\langle \vec{E}^2 \rangle = \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle + 2 \cdot \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle$$

$$I = I_1 + I_2 + 2 \cdot \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle$$

Ultimul termen se numește termen de interferență și este totdeauna nul când vectorii sunt defazați cu  $\pi$  unul față de celălalt, sau când vectorii luminoși provin de la surse separate și suprapunerea lor nu persistă în timp astfel încât să producă o senzație observabilă. În acest caz se obține relația de mai jos:

$$I = I_1 + I_2$$

Se poate spune sugestiv că *lumină + lumină = mai multă lumină*. Este faptul care se observă când într-o încăpere se aprind mai multe becuri.

Într-un singur caz termenul  $\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle$ , media produsului scalar al vectorilor luminoși, nu este nul ci poate fi pozitiv sau negativ, sporind astfel suma (crescând intensitatea luminoasă în anumite puncte), respectiv micșorând suma (când diminuează intensitatea rezultantă în alte puncte). Acesta este cazul suprapunerii de unde luminoase coerente care produc interferență.

Deși lumina este emisă de o sursă punctuală în mod divergent, există unele dispozitive pe care le vom prezenta în cele ce urmează, în care razele de lumină emise de sursă ajung să se suprapună într-o anumită regiune unde se observă că: *lumină + lumină = fie mai multă lumină* (este numită interferență constructivă iar rezultatul se numește **maxim de interferență**), *fie întuneric* (interferența este distructivă, iar rezultatul se numește **minim de interferență**).

### 6.5. Interferența luminii

Se numește **interferență a luminii**, fenomenul de suprapunere și compunere a două sau mai multe unde luminoase coerente într-un punct având ca rezultat o undă cu amplitudine mărită sau micșorată.



Undele sunt coerente dacă au aceeași frecvență și păstrează între ele o diferență de fază constantă. Compunerea vectorilor luminoși se poate face și după regula paralelogramului. În funcție de orientarea în spațiu a vectorilor ajunși într-un punct dat și determinată de fazele lor, putem avea un vector rezultant de valoare maximă  $E_M = E_1 + E_2$  atunci când vectorii sunt colineari și de același sens.

Când vectorii sunt colineari și opuși ca sens rezultatul compunerii este un vector de valoare minimă  $E_m = E_1 - E_2$ . Pentru alte valori intermediare putem avea  $E_m < E < E_M$  după cum rezultă din teorema lui Pitagora generalizată:

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2 \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot \cos \alpha$$

Pentru a-i compune vectorial, este necesar ca ambii vectori luminoși să fie prezenți în același timp într-un punct dat iar pentru a observa rezultatul compunerii, timpul de coincidență repetată să fie mai mare de o zecime de secundă (cât este inerția ochiului).

După cum s-a mai spus, trenurile de undă provenite de la două surse separate au emisiuni întâmplătoare și ajung în punctul dat când unul când celalat, poate chiar amândouă, dar emisiunea lor durând cel mult  $10^{-8}$  secunde, în următorul moment s-ar putea ca cele două trenuri de undă să nu se mai suprapună. Variațiile rapide de iluminare nu sunt observate de către ochi decât ca o iluminare uniformă.

Altfel stau lucrurile cu trenurile de undă provenite de la aceeași sursă ce pot fi dedublate în dispozitivele interferențiale căci aceasta este o caracteristică a undelor și se suprapun după parcurgerea unor drumuri diferite, la orice moment de timp oricât de scurte sau lungi ar fi.

Deoarece trenurile de undă, unul după altul, prin suprapunere dau același rezultat, ochiul sesizează maximul sau minimul de interferență în același loc și impresia este constantă în timp.

Luăm în considerare, pentru simplitate, numai unde cu vectorii luminoși situați în același plan de oscilație, prin duplicare în unde separate și care se propagă pe căi diferite, undele ajung în punctul de incidență unde sunt observate cu o diferență de fază:

$$\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot (r_1 - r_2)$$

Diferența dintre drumurile parcurse separat de cele două unde o vom nota cu:  $\delta = |r_1 - r_2|$ .



Se vede din această expresie, că diferența de fază este o mărime constantă pentru o geometrie dată a dispozitivului și pentru o undă monocromatică de lungime de undă  $\lambda$ .

În figura de mai jos se prezintă două surse de lumină coerentă care trimit unde în același punct din plan, unde ajung după parcurgerea a două distanțe diferite:

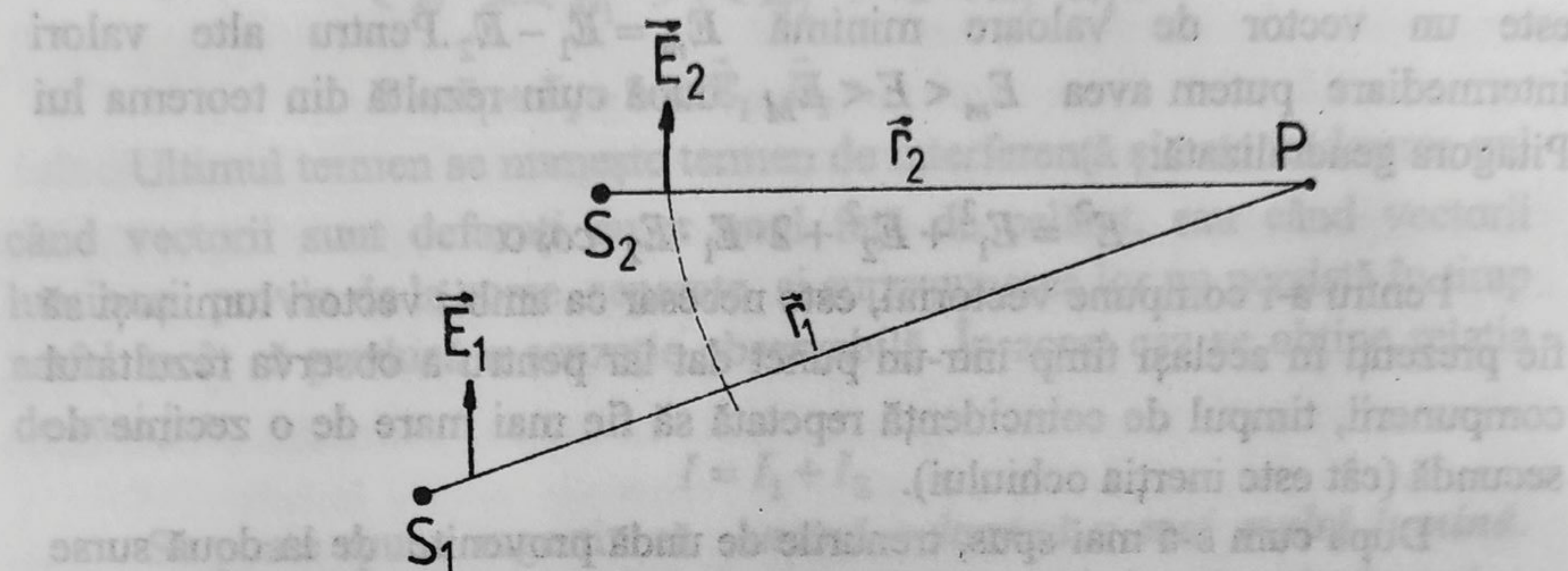


Fig. 134

Fazele undelor în punctul P vor depinde numai de distanțele parcurse de acestea dacă sunt emise cu faza inițială nulă:

$$\varphi_1 = 2 \cdot \pi \cdot \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) \quad \varphi_2 = 2 \cdot \pi \cdot \left( \frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} \right)$$

În general vom ține cont de fazele inițiale ale vectorilor luminoși din momentul emiterii trenului de undă:

$$\varphi = \omega \cdot t + \varphi_0 - 2 \cdot \pi \cdot \frac{r}{\lambda}$$

Notând cu  $\varphi_{01}$  defazajul datorat atât fazei inițiale cât și distanței străbătute de undă, faza totală a undei se scrie:

$$\varphi_1 = \omega \cdot t + \varphi_{01} \quad \text{unde} \quad \varphi_{01} = \varphi_0 - 2 \cdot \pi \cdot \frac{r_1}{\lambda}$$

Dacă în același timp, în același punct se suprapun mai mulți vectori ai câmpului electric, paraleli, cu defazajul  $\varphi_{0k}$  intensitatea rezultantă se scrie astfel:

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_n = \sum_1^n E_k \quad E = \sum_1^n E_{0k} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{0k})$$



În cazul particular al două unde cu aceeași amplitudine care interferează într-un punct P de pe ecran, având ecuațiile de undă:

$$E_1 = E_0 \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) \quad E_2 = E_0 \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left( \frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} \right)$$

unda rezultantă se prezintă sub forma următoare:

$$E = E_1 + E_2 = E_0 \cdot \left[ \sin 2 \cdot \pi \cdot \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) + \sin 2 \cdot \pi \cdot \left( \frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} \right) \right]$$

aplicăm relația trigonometrică:

$$\sin A + \sin B = 2 \cdot \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

$$E = 2 \cdot E_0 \cdot \cos \left( \pi \cdot \frac{\delta}{\lambda} \right) \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2 \cdot \lambda} \right)$$

Amplitudinea unde rezultante este coeficientul funcției sinus:

$$E = 2 \cdot E_0 \cdot \cos \left( \pi \cdot \frac{\delta}{\lambda} \right)$$

Intensitatea luminoasă fiind proporțională cu pătratul amplitudinii unde luminoase, putem scrie:

$$I' = k^2 \cdot E^2 \quad I' = k^2 \cdot I \quad \text{rezultă} \quad I = 4 \cdot E_0^2 \cdot \cos^2 \pi \cdot \frac{\delta}{\lambda}$$

a) **Maxim de interferență** - Intensitatea luminoasă în punctul P (x) este maximă dacă:

$$\cos^2 \pi \cdot \frac{\delta}{\lambda} = 1 \quad \text{sau} \quad \cos \pi \cdot \frac{\delta}{\lambda} = \pm 1$$

ceea ce se întâmplă când  $\pi \cdot \frac{\delta}{\lambda} = 2 \cdot k \cdot \pi$  sau când  $\delta = k \cdot \lambda$ .

**Regula 1.** Se obține maxim de interferență (numit **franță luminoasă**) în acele puncte în care diferența dintre drumurile parcurse de undele coerente, este un număr întreg de lungimi de undă.

În cazul realizării maximului de interferență avem deci:

$$I_M = 4 \cdot E_0^2$$

Produsul scalar din expresia intensității rezultante devine:

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = E_1 \cdot E_2$$

deci valoarea medie

$$\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \langle E_1 \cdot E_2 \rangle > 0$$



este un număr pozitiv și constant. Intensitatea undei rezultante se compune din suma intensităților incidente la care se mai adaugă termenul constant și pozitiv al mediei:

$$I = I_1 + I_2 + 2 \cdot \langle E_1 \cdot E_2 \rangle$$

Deci:  $I > I_1 + I_2$ , adică se produce o iluminare mai mare pe ecran în locurile unde se formează franjele luminoase decât iluminarea obișnuită de la două surse obișnuite, necoerente.

Aparent se încalcă legea conservării energiei: *apare mai multă energie luminoasă decât au trimis sursele*. Nu este însă corect să aplicăm legea conservării energiei doar într-un singur punct, aceasta trebuie aplicată pe toată suprafața pe care se suprapun undele deoarece alături sunt zone întunecate de la care s-a luat surplusul de energie.

b) **Minim de interferență** - Intensitatea luminoasă în punctul  $P(x)$  este

$$\text{minimă dacă } \cos \pi \cdot \frac{\delta}{\lambda} = -1 \text{ ceeace se întâmplă când: } \pi \cdot \frac{\delta}{\lambda} = (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\text{deci când } \delta = (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

În acest caz intensitatea luminoasă rezultantă este nulă:  $I_m = 0$  căci vectorul luminos resultant  $\vec{E} = 0$ .

**Regula 2.** Se obține *minim de interferență* (numit *franță întunecată*) în acele puncte în care diferența dintre drumurile parcurse de undele coerente este un număr impar de semilungimi de undă.

Termenul interferențial este  $\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = E_1 \cdot E_2 \cdot \cos \Delta\varphi = -E_1 \cdot E_2$  deoarece  $\Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2} = (2 \cdot k + 1) \cdot \pi$  deci media este un număr negativ iar intensitatea undei rezultante se exprimă astfel:

$$I = I_1 + I_2 - 2 \cdot \langle E_1 \cdot E_2 \rangle \text{ deci } I < I_1 + I_2$$

Inegalitatea este posibilă pe toată suprafața iluminată unde avem și maximele alăturate de minime. Prin adunarea celor două expresii adevărate pentru puncte alăturate se obține:

$$I = I_1 + I_2 + 2 \cdot \langle E_1 \cdot E_2 \rangle$$

$$I = I_1 + I_2 - 2 \cdot \langle E_1 \cdot E_2 \rangle$$

$$\text{-----}$$

$$2 \cdot I = 2 \cdot (I_1 + I_2) \quad I = I_1 + I_2$$

Deci legea conservării energiei se aplică și în acest caz, dar energia nu mai este la fel repartizată pe toată suprafața sa.



În punctele de maxim de interferență intensitatea luminoasă este mai mare, decât intensitatea luminoasă uniformă creată de două surse diferite necoerente, în timp ce în punctele de minim, intensitatea este mai mică sau chiar zero.

Putem spune pe scurt: *energia luminoasă care dispare prin interferență într-un loc, în minimul de interferență, apare în aceeași cantitate în alt loc, în maximul de interferență.*

## 6.6. Dispozitive interferențiale

Obținerea undelor coerente este posibilă deoarece lumina provenită de la o singură sursă fiind compusă din unde elementare se poate înjumătăți și dirija pe drumuri diferite pentru a se suprapune în anumite locuri. În cele ce urmează se prezintă câteva metode de obținere a undelor coerente precum și analiza interferenței acestora și unele aplicații.

### 6.6.1. Dispozitivul Young

Este constituit dintr-un paravan cu două tăieturi foarte subțiri de forma unor dreptunghiuri, care constituie partea esențială a dispozitivului Young, o sursă de radiații monocromatice (pe cât se poate), încă un paravan cu o singură fantă de asemenea foarte îngustă și un ecran.

Pentru reușita experienței este necesar ca lărgimea fantelor să fie mai mică sau egală cu lungimea de undă a radiației folosite, de ex: folosind radiația roșie cu  $\lambda = 700 \text{ nm}$ , lărgimea fantei să fie sub un micron. În figura de mai jos se arată schematic modul de aranjare al fantelor față de sursă și ecran:

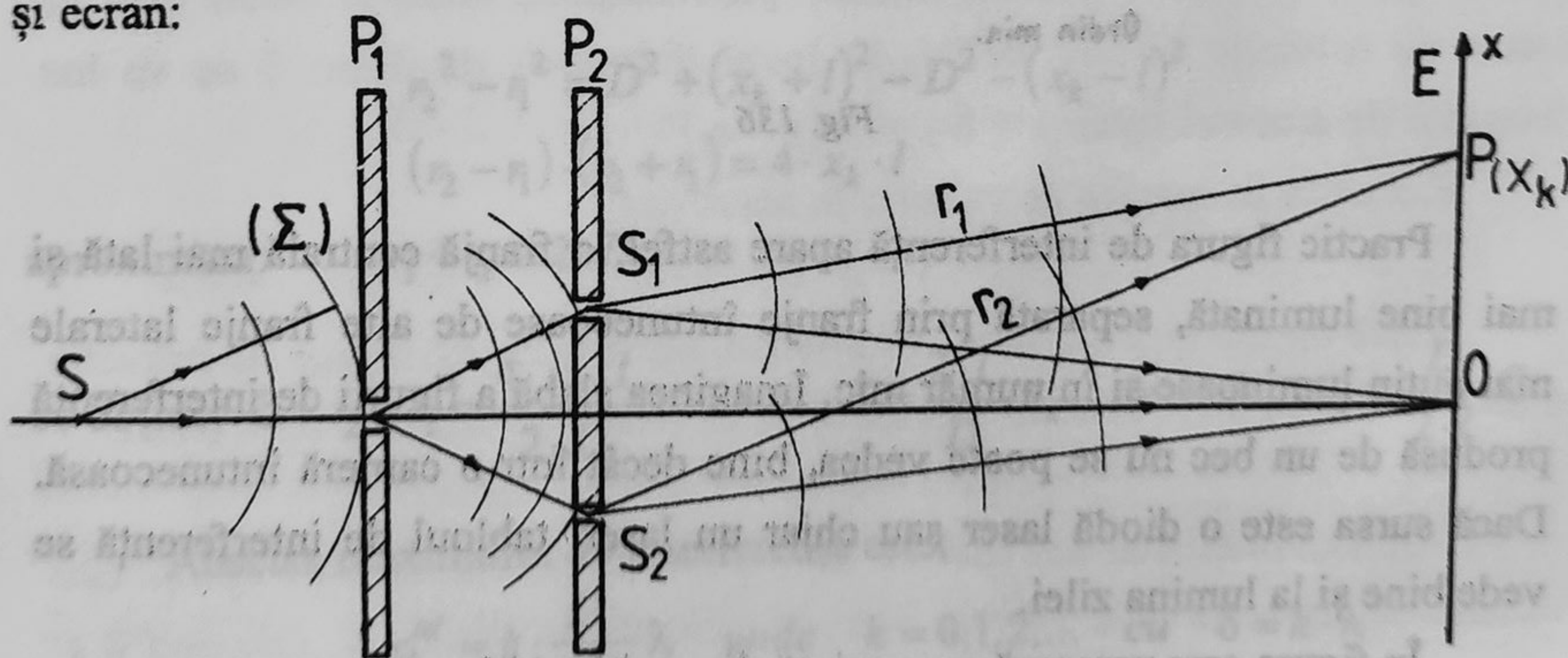


Fig. 135



Sursa de radiații monocromatice  $S$  trimite lumina la paravanul cu o singură fantă  $P$  de la care pornesc unde elementare ca și cum ar porni de la o sursă punctiformă  $S'$  spre paravanul cu două deschideri  $P$ . Lumina ce iese din fantele  $S_1$  și  $S_2$  conform principiului Huygens sunt coerente și în fază, dar pe ecran ajung să se suprapună cu un defazaj care apare din străbaterea unor drumuri diferite  $S_1P$  și  $S_2P$ .

În punctele  $P(x)$  de pe ecran apar benzi luminoase și întunecoase în mod alternativ, numite *franje de interferență*. Fantele  $S_1$  și  $S_2$  fiind dreptunghiuri foarte înguste, franjele luminoase și cele întunecoase apar ca niște linii sau benzi subțiri luminoase dacă sunt produse în lumină monocromatică.

Privind ecranul, se observă o bandă luminoasă centrală în care situăm originea sistemului de axe  $xOy$ , trasate pe ecran, iar deoparte și de alta a acesteia, alte benzi luminoase paralele separate de benzi întunecate de aceeași lățime numite *franje luminoase și întunecoase*, după cum se poate vedea în figura de mai jos:

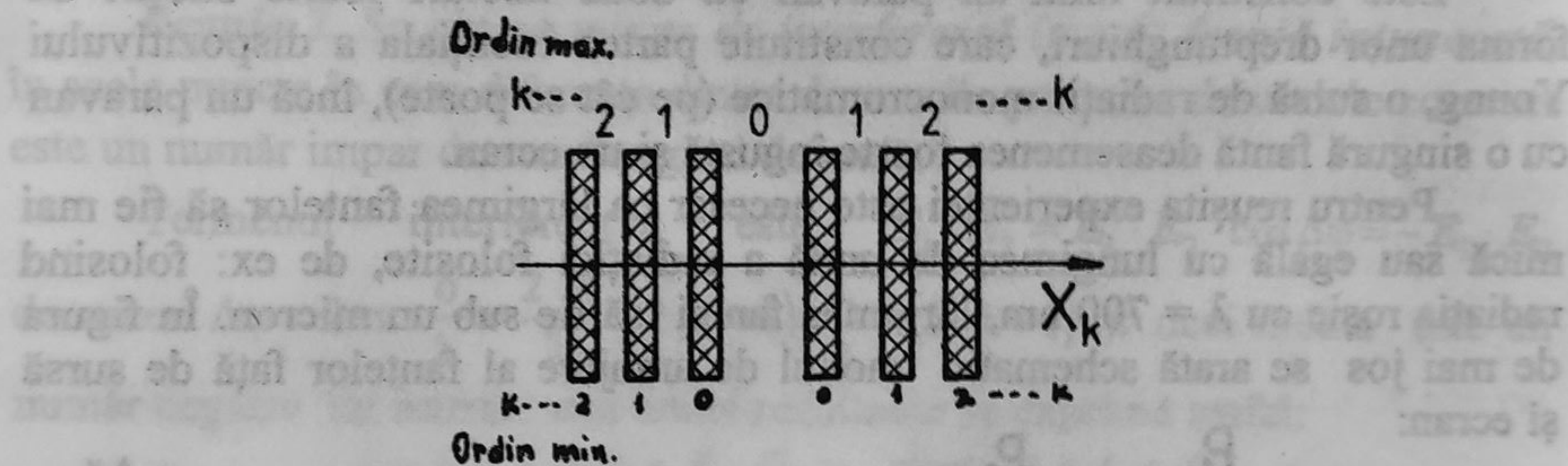


Fig. 136

Practic figura de interferență apare astfel: o franjă centrală mai lată și mai bine luminată, separată prin franje întunecoase de alte franje laterale mai puțin luminoase și în număr mic. Imaginea slabă a figurii de interferență produsă de un bec nu se poate vedea, bine decât într-o cameră întunecoasă. Dacă sursa este o diodă laser sau chiar un laser, tabloul de interferență se vede bine și la lumina zilei.

În figura care urmează se prezintă dispozitivul Young schematic.



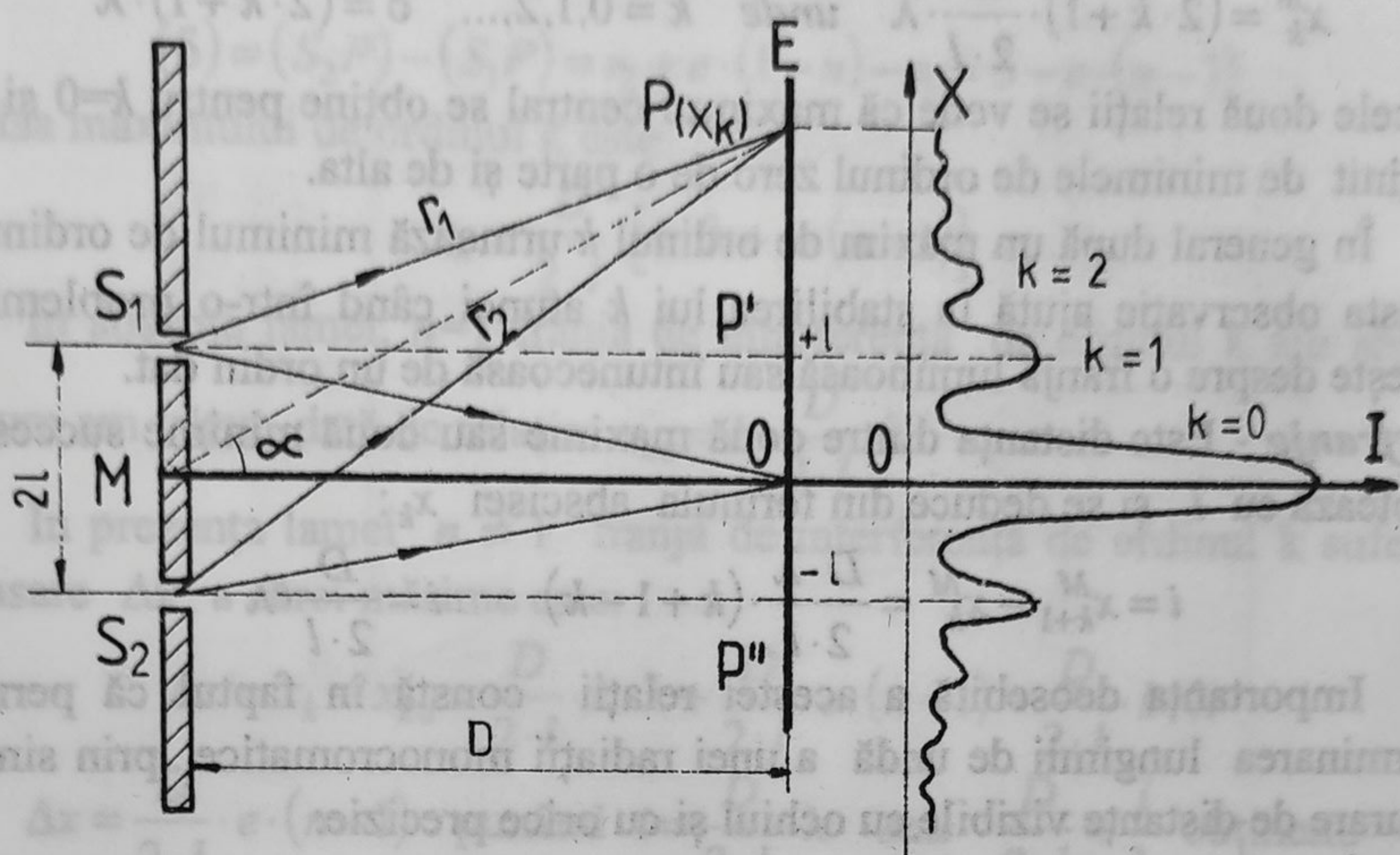


Fig. 137

Se văd sursele coerente  $S_1$  și  $S_2$ , ecranul și o diagramă a intensității luminoase în funcție de distanța  $x$  de la franja centrală. Din geometria sistemului, putem obține mărimea interfranjei exprimată funcție de lungimea de undă:

Din triunghiul  $S_1PP'$   $r_1^2 = D^2 + (x_k - l)^2$

Din triunghiul  $S_2PP''$   $r_2^2 = D^2 + (x_k + l)^2$

$$r_2^2 - r_1^2 = D^2 + (x_k + l)^2 - D^2 - (x_k - l)^2$$

$$(r_2 - r_1) \cdot (r_2 + r_1) = 4 \cdot x_k \cdot l$$

aproximăm:  $r_1 + r_2 \approx 2 \cdot D$

se obține:  $\delta = r_2 - r_1 = \frac{4 \cdot x_k \cdot l}{2 \cdot D}$  sau  $\delta = \frac{2 \cdot l}{D} \cdot x_k$  de unde  $x_k = \frac{D}{2 \cdot l} \cdot \delta$

Abscisa maximului de interferență este:

$$x_k^M = k \cdot \frac{D}{2 \cdot l} \cdot \lambda \text{ unde } k = 0, 1, 2, \dots \text{ cu } \delta = k \cdot \lambda$$



Abscisa minimului de interferență de ordinul  $k$  este:

$$x_k^m = (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{D}{2 \cdot l} \cdot \lambda \quad \text{unde } k = 0, 1, 2, \dots \quad \delta = (2 \cdot k + 1) \cdot \lambda$$

Din cele două relații se vede că maximul central se obține pentru  $k=0$  și este mărginit de minimele de ordinul zero de o parte și de alta.

În general după un maxim de ordinul  $k$  urmează minimul de ordinul  $k$ . Aceasta observație ajută la stabilirea lui  $k$  atunci când într-o problemă se vorbește despre o franjă luminoasă sau întunecoasă de un ordin dat.

**Interfranja** - Este distanța dintre două maxime sau două minime succesive, se notează cu  $i$  și se deduce din formula abscisei  $x_k$ :

$$i = x_{k+1}^M - x_k^M = \frac{D \cdot \lambda}{2 \cdot l} \cdot (k+1 - k) \quad i = \frac{D}{2 \cdot l} \cdot \lambda$$

Importanța deosebită a acestei relații constă în faptul că permite determinarea lungimii de undă a unei radiații monocromatice prin simpla măsurare de distanțe vizibile cu ochiul și cu orice precizie:

$$\lambda = i \cdot \frac{2 \cdot l}{D}$$

**Observația 1** - formulele deduse sunt aplicabile oricărui dispozitiv cu două raze coerente a cărei schemă simplificată se reduce la schema precedentă a dispozitivului lui Young.

**Observația 2** - Efectuând experiența de tip Young cu două feluri de radiații monocromatice cu lungimile de undă  $\lambda_1$  și  $\lambda_2$ , de exemplu o radiație roșie și o radiație albastră se observă că interfranja radiației albastre este mai mică decât interfranja radiației roșii, ceea ce concordă cu formula interfranței:  $i = \lambda$ .

**Observația 3** - Dacă mediul dintre paravanul cu fante și ecran este de indice de refracție diferit de 1, în locul diferenței de drum  $\delta$  se va lua diferența de drumuri optice:  $(\delta) = n \cdot (r_1 - r_2)$

Condiția de maxim se va scrie în acest caz:

$$(\delta) = n \cdot \delta = k \cdot \lambda$$

Dacă numai una din raze va străbate un mediu de indice de refracție  $n$  iar cealaltă va trece prin aer (alt mediu), diferența de drumuri optice este:

$$(\delta) = n \cdot r_2 - n' \cdot r_1 \quad \text{cu } n' = 1$$

Un caz particular des întâlnit în construcția de instrumente optice este următorul: în calea unei raze se pune o lamelă de sticlă de grosime  $e$  și indice de refracție  $n$  perpendicular pe raza de lumină și lipită de fanta  $S_1$ .



Drumurile optice sunt următoarele:

$$(S_1P) = r_1 - e + n \cdot e \quad S_2P = r_2$$

$$(\delta) = (S_2P) - (S_1P) = r_2 + e \cdot (1 - n) - r_1 = \delta - e \cdot (n - 1)$$

Abscisa maximului de ordinul  $k$  este:

$$x_k = \frac{D}{2 \cdot l} \cdot [k \cdot \lambda + e \cdot (n - 1)]$$

În absența lamei,  $n=1$  franja de interferență de ordinul  $k$  are abscisa așa cum am văzut, dată de relația:  $x_{k0} = k \cdot \frac{D}{2 \cdot l} \cdot \lambda$

În prezența lamei  $n \neq 1$  franja de interferență de ordinul  $k$  suferă o deplasare  $\Delta x$  a cărei mărime este:

$$\Delta x = x_k - x_{k0} = \frac{D}{2 \cdot l} \cdot k \cdot \lambda + \frac{D}{2 \cdot l} \cdot e \cdot (n - 1) - \frac{D}{2 \cdot l} \cdot k \cdot \lambda$$

$$\Delta x = \frac{D}{2 \cdot l} \cdot e \cdot (n - 1) \quad \text{punând } i = \frac{D}{2 \cdot l} \cdot \lambda \quad \text{sau} \quad \frac{D}{2 \cdot l} = \frac{i}{\lambda} \quad \text{obținem:}$$

$$\Delta x = \frac{i}{\lambda} \cdot e \cdot (n - 1) \quad \text{cu} \quad \Delta x > 0$$

În funcție de semnul lui  $\Delta x$  se poate deduce că franja luminoasă s-a deplasat în sensul pozitiv al axei sau în sens invers dacă:  $\Delta x < 0$ .

**Observația 4** - În rezolvarea problemelor cu dispozitivul Young se poate obține expresia abscisei maximului de ordinul  $k$  pe o cale mai expeditivă dacă se folosesc condițiile de minim și maxim date de regulile 1 și 2 după cum urmează:

$$\delta = 2 \cdot l \cdot \sin \alpha \quad \text{cu} \quad \sin \alpha = \frac{x_k}{D}$$

$$\delta = 2 \cdot l \cdot \frac{x_k}{D} \quad \text{și} \quad \delta = k \cdot \lambda \quad x_k = \frac{D}{2 \cdot l} \cdot k \cdot \lambda$$

#### 6.6.2. Oglinzile lui Fresnel

O altă modalitate de a obține două surse coerente este de a trimite lumina provenită de la o fantă luminată cu radiație monocromatică pe două oglinzi ale căror suprafețe fac între ele un unghi foarte mic. Imaginile  $S_1$  și  $S_2$  ale sursei  $S$  în cele două oglinzi sunt foarte apropiate după cum se vede în figură.



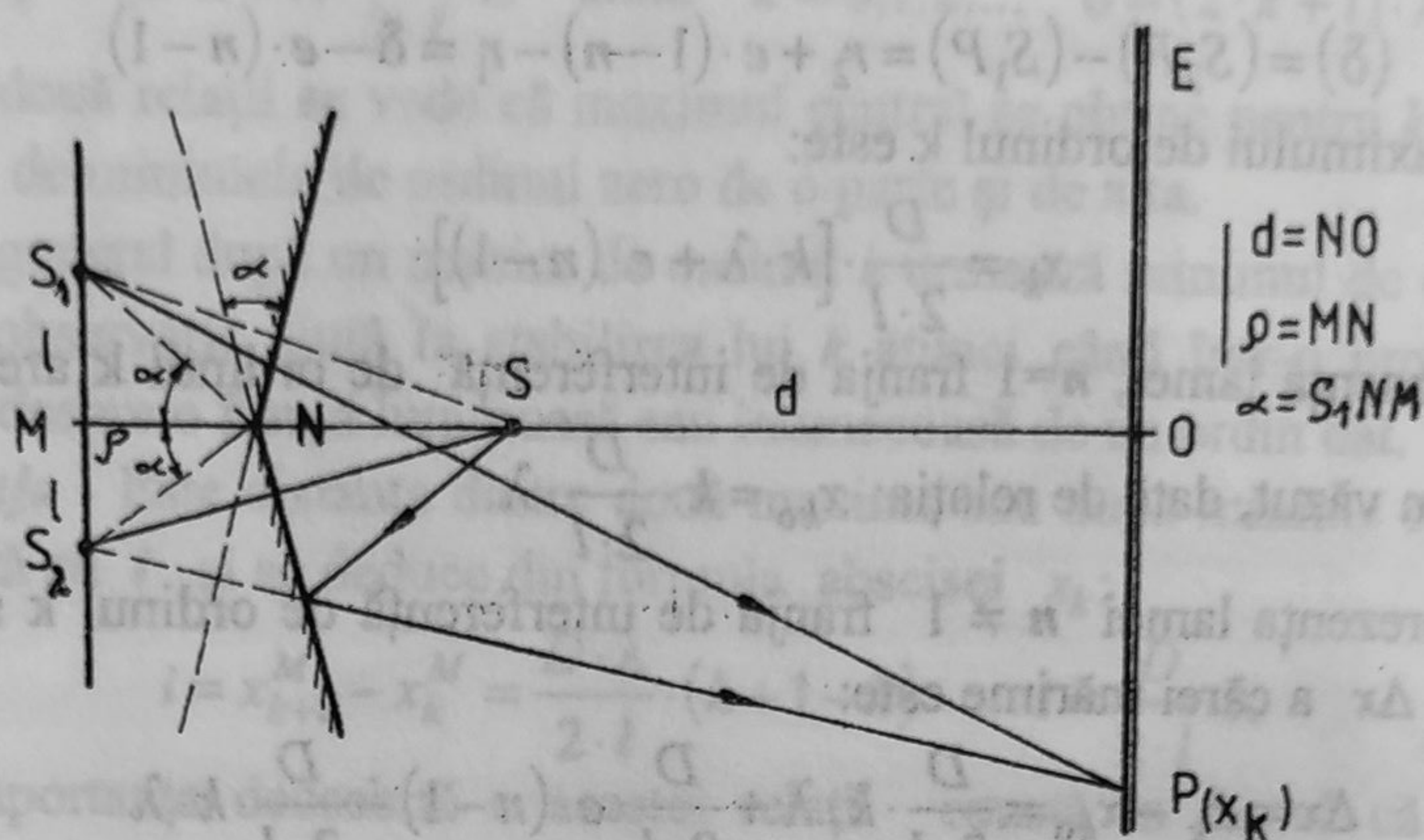


Fig. 138

iar schema simplificată se reduce la figura 137. Ecranul E este situat față de cele două surse coerente la distanța  $D = d + \rho$ .

Din triunghiul  $MNS_1$   $\operatorname{tg} \alpha \equiv \sin \alpha = \frac{l}{\rho}$   $l = \rho \cdot \sin \alpha \equiv \rho \cdot \alpha$ .

Din expresia pentru abscisa franjei luminoase de ordinul  $k$   $x_k = \frac{D}{2 \cdot l} \cdot k \cdot \lambda$  deducem:

$$x_k = \frac{d + \rho}{2 \cdot l} \cdot k \cdot \lambda \quad \text{cu } l = \rho \cdot \alpha$$

Din expresia interfranjei  $i = \frac{D}{2 \cdot l} \cdot \lambda$  deducem:  $i = \frac{d + \rho}{2 \cdot l} \cdot \lambda$

### 6.6.3. Dispozitivul Lloyd

O sursă monocromatică iluminează o fantă mecanică îngustă S de la care pornesc raze divergente către un ecran. Perpendicular pe acest ecran la nivel apropiat de deschiderea fantei se găsește o oglindă plană ce reflectă o rază coerentă pe același ecran pe care ajunge o rază directă, după cum se vede în figură.



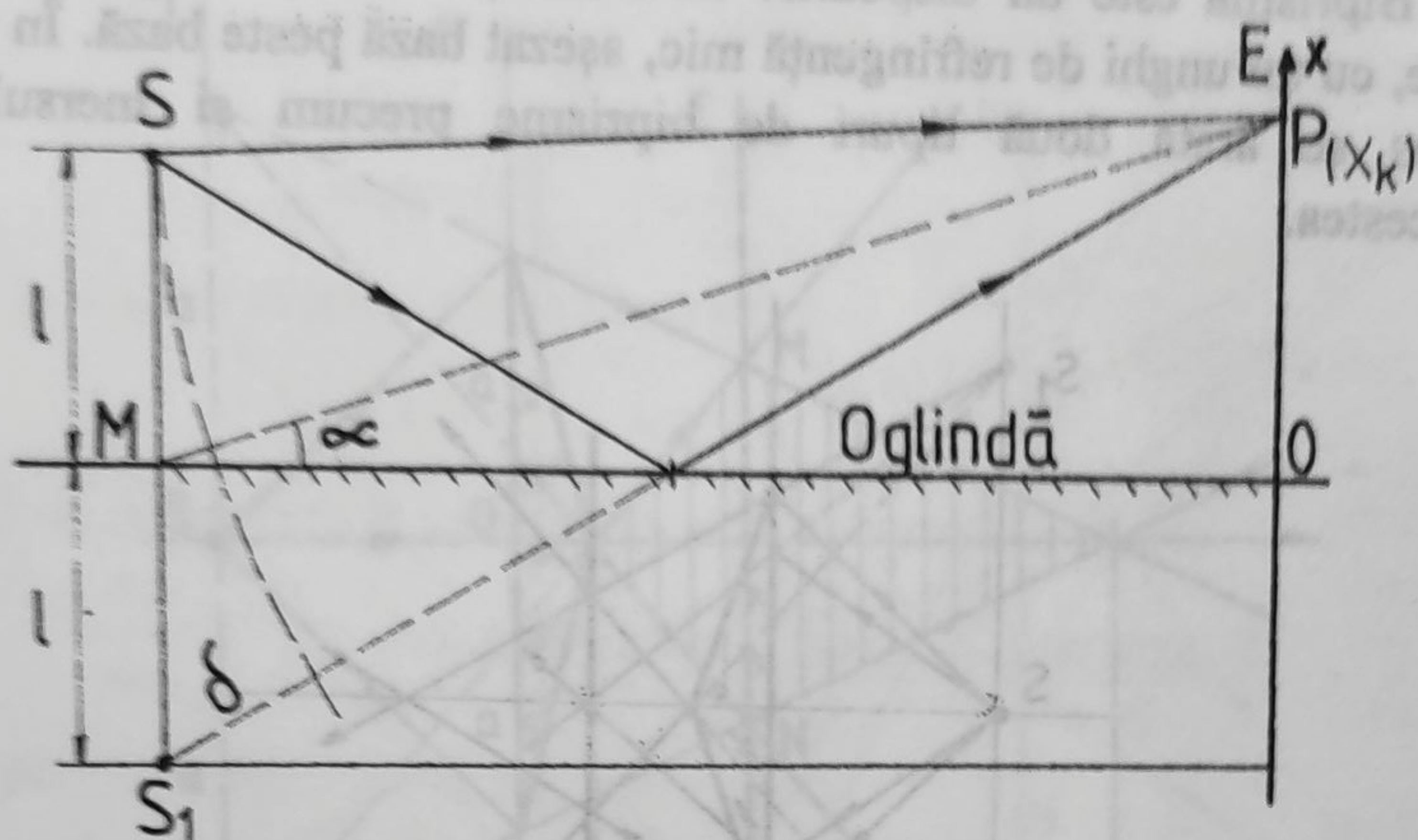


Fig. 139

Sursa  $S'$  de raze coerente este imaginea virtuală a lui  $S$  în oglinda plană, raza directă și raza reflectată parcurg drumuri diferite, deci ajung în  $P$  cu un defazaj  $\Delta\phi$ .

Schema redusă a dispozitivului este asemănătoare cu schema redusă a dispozitivului Young. Se poate scrie:

$$\delta = 2 \cdot l \cdot \sin\alpha \quad \text{cu} \quad \sin\alpha \approx \tan\alpha = \frac{x_k}{D}$$

$$\delta = k \cdot \lambda \quad 2 \cdot l \cdot \frac{x_k}{D} = k \cdot \lambda \quad \text{deci} \quad x_k^M = \frac{D}{2 \cdot l} \cdot k \cdot \lambda$$

**Observație:** Ordinul maxim de interferență ce poate fi observat în toate cazurile se obține din condiția:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{deci} \quad x_k^M = D \cdot \sin 90^\circ \quad \text{sau} \quad k \cdot \lambda = 2 \cdot l$$

$$k_{\max} = k = \frac{2 \cdot l}{\lambda}$$

Deci ordinul maxim depinde invers proporțional cu lungimea de undă.



#### 6.6.4. Biprisma Fresnel

Biprisma este un dispozitiv interferențial format din două prisme identice, cu un unghi de refringență mic, așezat bază peste bază. În figura de mai jos se arată două tipuri de biprisme precum și mersul razelor prin acestea.

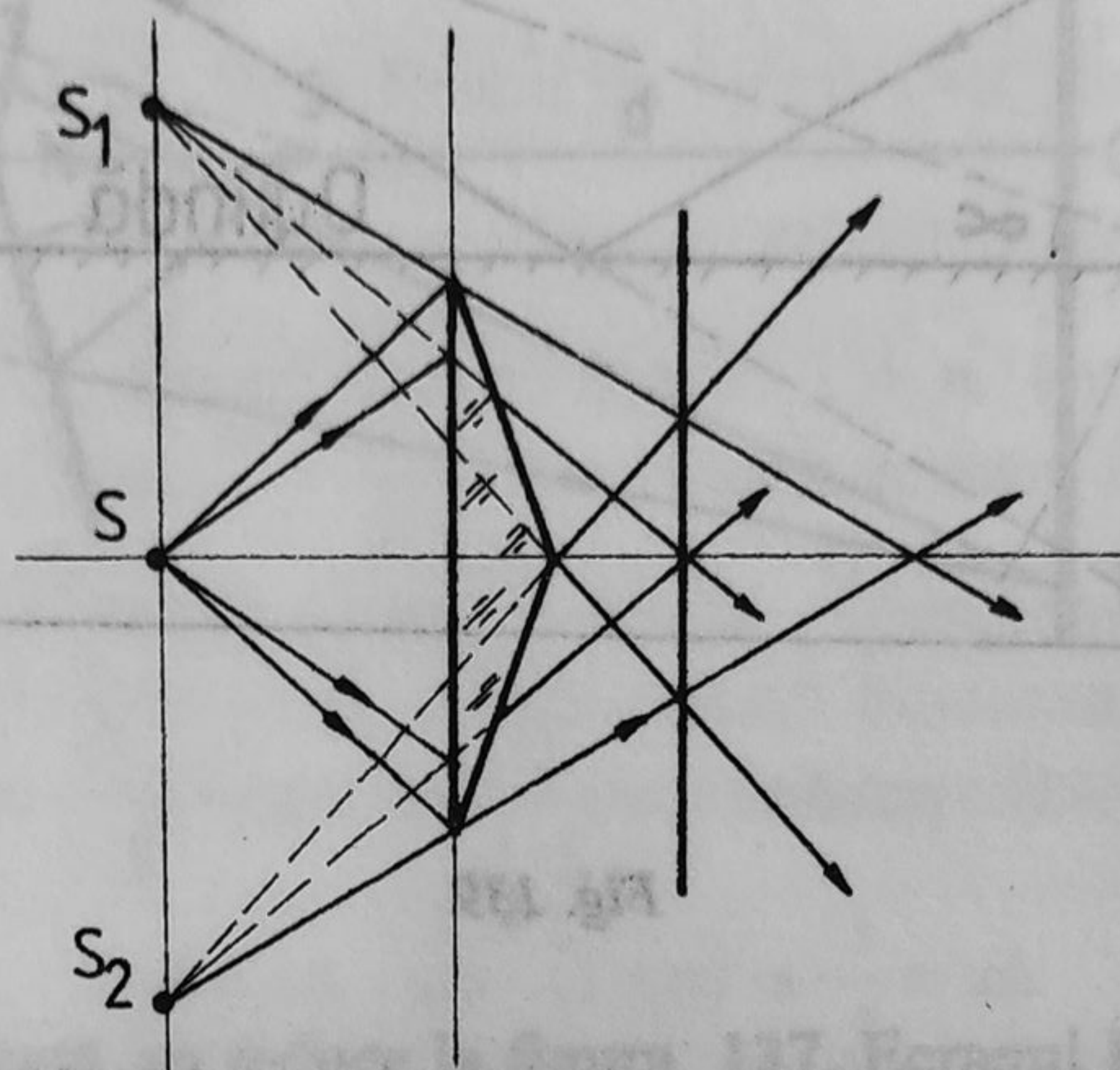


Fig. 140

Așezând biprisma între un ecran și o sursă de lumină monocromatică de lungime de undă  $\lambda$  obținem franje de interferență pe ecran. Interferența apare din suprapunerea razelor de lumină coerente provenite de la sursele virtuale create de cele două prisme după cum se vede din desen.

Razele marginale ale prismelor, se vor refracta creind imaginile virtuale  $S_1$  și  $S_2$  situate în același plan cu S și sunt situate simetric față de sursă.

Razele izvorâte din sursele  $S_1$  și  $S_2$  ce trec prin vârfurile prismelor și razele ce trec prin bazele prismelor, formează o regiune în spațiu unde se suprapun și deci pot interfera (zona hașurată pe desen).

Schema simplificată este asemănătoare cu cea de la dispozitivul Young, deci putem aplica formulele obținute acolo pentru interferență cu notațiile corespunzătoare noii geometrii.



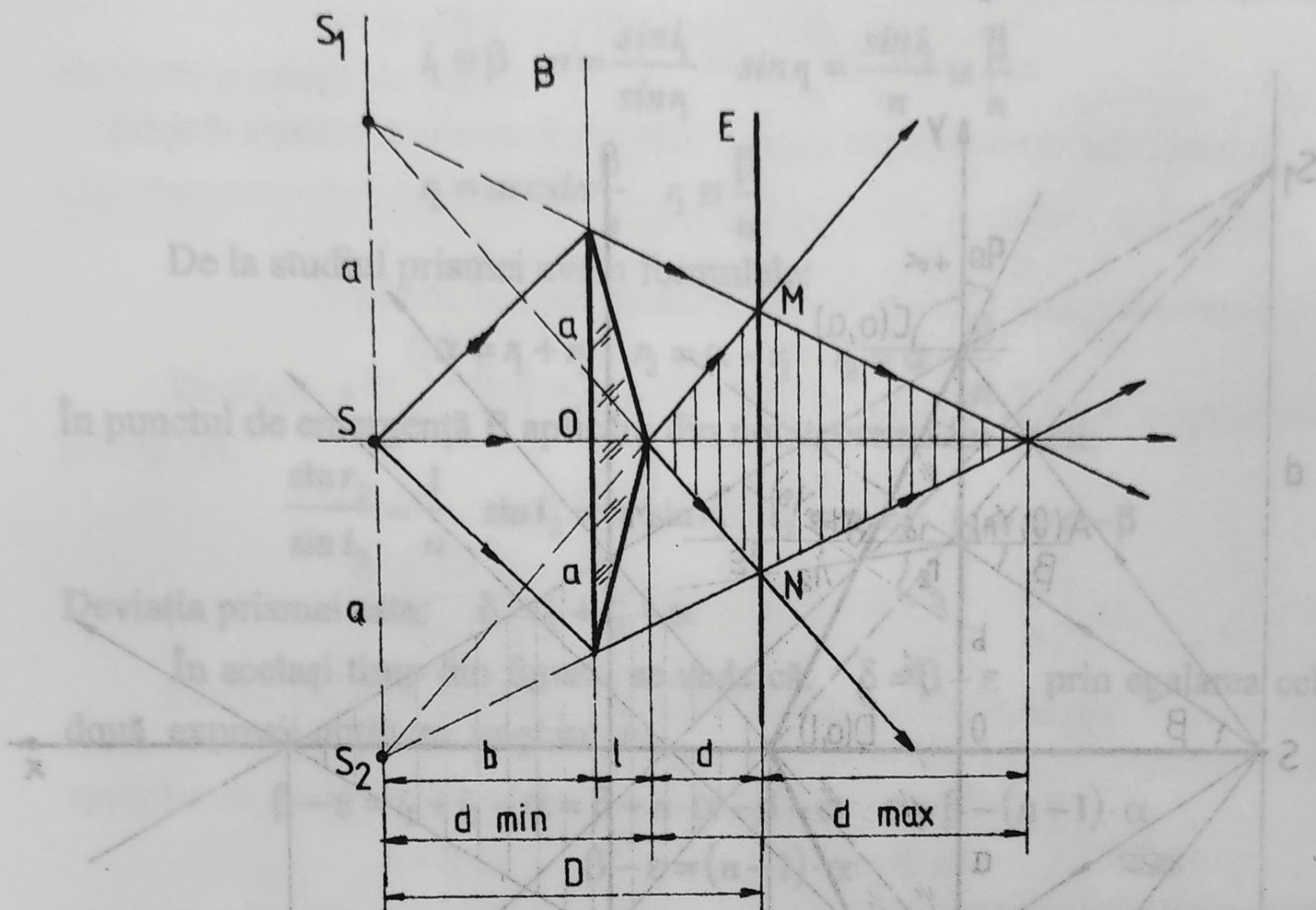


Fig. 141

- $d_{min}$  - distanța minimă de la care începe formarea franjelor;  
 $d_{max}$  - " maximă până la care se obțin franje pe ecran;  
 $d_{opt}$  - " optimă la care se obțin maximum de franje;  
 $D$  - " de la linia surselor virtuale la o poziție dată a ecranului:  
 $D=b+d+l$

Uneori se poate aproxima  $l \approx 0$  căci  $l \ll b$  astfel că distanța  $D$  se mai poate scrie:

$$D = b + d$$

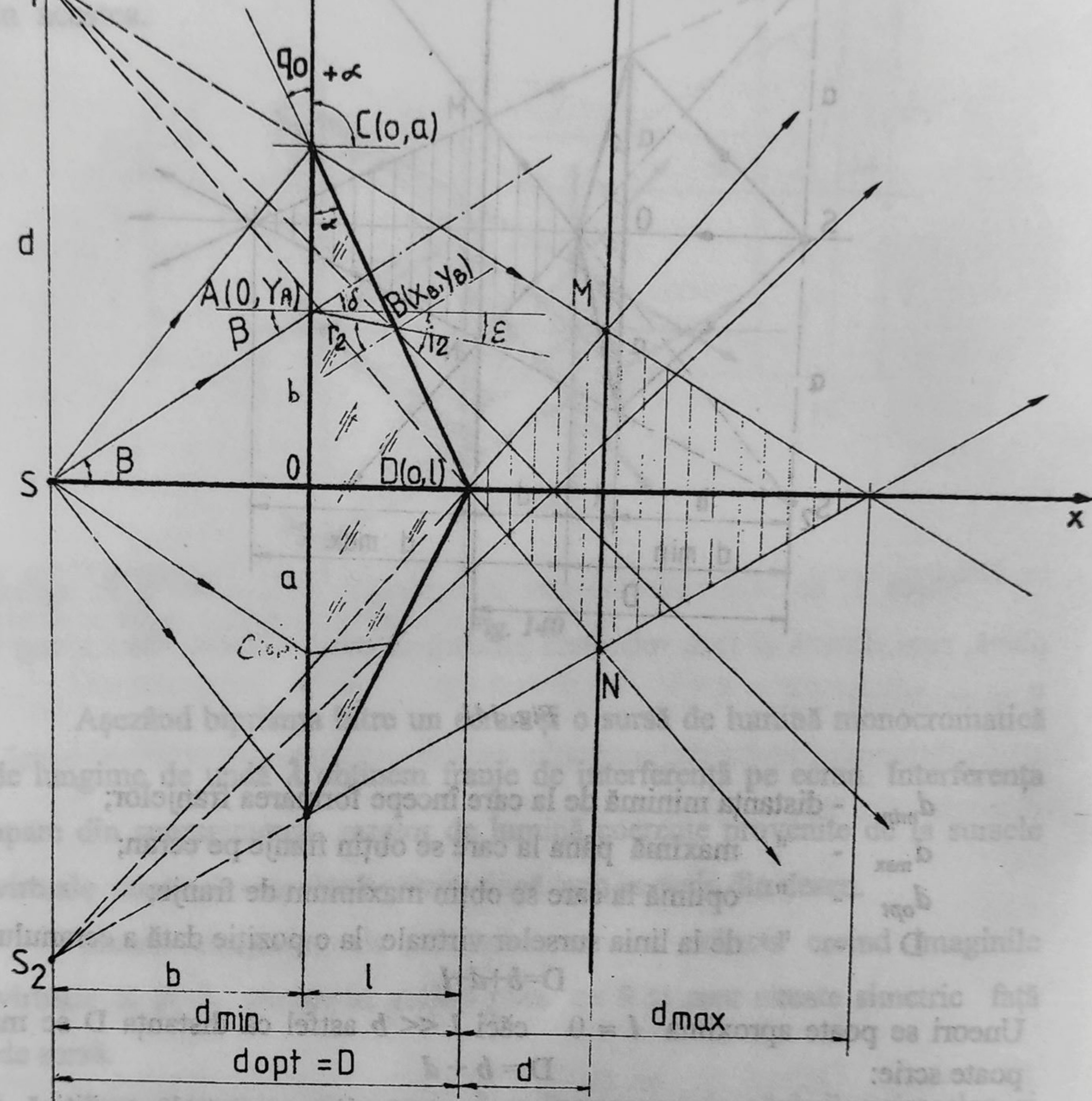
Pentru găsirea distanței  $SS_1 = a$  vom aplica o metodă analitică de determinare a ecuației unei drepte și a fasciculului de drepte ce trece printr-un punct:

$$(D) + \lambda \cdot (D') = 0$$

Aici  $\lambda$  este o constantă ce nu are legătură cu lungimea de undă. Vârful fasciculului se determină punând condiția:

$$(D) = 0 \text{ si } (D') = 0$$





*Fig. 142*

Din trunghiul format se vede:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{b} \quad \beta \cong \operatorname{arctg} \frac{y}{b} \ll 1 \text{ radian}$$

În acest caz toate unghiurile vor fi deasemenea mici încât vom putea face aproximațiile obișnuite:  $\sin \alpha \equiv \alpha$   $\operatorname{tg} \alpha \equiv \alpha$



În punctul de incidență A de coordonate  $(0, y_A)$  unde  $y_A = b$  aplicăm teorema lui Snellius:

$$i_1 \equiv \beta \quad n = \frac{\sin i_1}{\sin r_1} \quad \sin r_1 = \frac{\sin i_1}{n} \equiv \frac{\beta}{n}$$

$$r_1 = \arcsin \frac{\beta}{n} \quad r_1 \equiv \frac{\beta}{n}$$

De la studiul prisme avem formulele:

$$\alpha = r_1 + r_2 \quad r_2 = \alpha - r_1 \quad r_2 = \alpha - \frac{\beta}{n}$$

În punctul de emergență B aplicăm din nou teorema lui Snell:

$$\frac{\sin r_2}{\sin i_2} = \frac{1}{n} \quad \sin i_2 = n \cdot \sin r_2 \quad i_2 \equiv n \cdot r_2 \quad i_2 \equiv n \cdot \alpha - \beta$$

Deviația prisme este:  $\delta = i_1 + i_2 - \alpha$

În același timp din figură se vede că:  $\delta = \beta - \varepsilon$  prin egalarea celor două expresii obținem unghiul  $\varepsilon$ :

$$\beta - \varepsilon = i_1 + i_2 - \alpha = \beta + n \cdot \alpha - \beta - \alpha \quad \varepsilon = \beta - (n-1) \cdot \alpha$$

$$\beta - \varepsilon = (n-1) \cdot \alpha$$

Punctul B de emergență din prismă are coordonatele  $(x_B, y_B)$  ce trebuie determinate deoarece în metoda analitică, cunoașterea coordonatelor unui punct și a unei direcții variabile ne dă ecuația unui fascicol de drepte din care se poate deduce vârful fascicolului care în cazul nostru este imaginea  $S_1$  a sursei S.

Deci coordonatele punctului B se pot obține prin intersecția a două drepte: (CD) cu (AB), adică prin rezolvarea sistemului de ecuații:

$$(CD) = 0 \quad (AB) = 0$$

Dreapta (CD) trece prin punctul C de coordonate  $(0, a)$  și are înclinația de  $(\frac{\pi}{2} + \alpha)$  față de axa Ox, deci putem scrie ecuația unei drepte ce trece printr-un punct și are o înclinație dată:

$$y - a = (x - 0) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \quad y - a = -x \cdot \operatorname{ctg}\alpha$$

$$\text{sau } y - a \equiv -\frac{x}{\alpha}$$



Dreapta ( AB ) trece prin punctul A de coordonate ( 0, b ) și are ca pantă:

$$\operatorname{tg} r_2 = \operatorname{tg} \frac{\beta}{n} \equiv \frac{\beta}{n} \quad \text{deci} \quad y - b \equiv x \cdot \frac{\beta}{n}$$

În particular, coordonatele  $x_B, y_B$  trebuie să satisfacă ecuația dreptei:

$$y_B - b \cdot \beta = x_B \cdot \frac{\beta}{n}$$

Ecuația dreptei ( CD ) este satisfăcută de aceeași condiție:

$$y_B - a = x_B \cdot \frac{1}{\alpha} \quad y_B = a - \frac{x_B}{\alpha} \quad y_B = b \cdot \beta + \frac{\beta}{n} \cdot x_B$$

$$a - \frac{x_B}{\alpha} = b \cdot \beta + \frac{\beta}{n} \cdot x_B$$

$$x_B \cdot \left( \frac{\beta}{n} + \frac{1}{\alpha} \right) = a - b \cdot \beta \quad x_B = \frac{(a - b \cdot \beta) \cdot n \cdot \alpha}{\alpha \cdot \beta + n}$$

$$y_B = a - \frac{1}{\alpha} \cdot x_B = \frac{a \cdot (\alpha \cdot \beta + n) - (a - b \cdot \beta) \cdot n}{\alpha \cdot \beta + n}$$

$$y_B = \frac{a \cdot \alpha \cdot \beta + a \cdot n + b \cdot n \cdot \beta}{\alpha \cdot \beta + n} \quad y_B = \frac{\beta \cdot (a \cdot \alpha + b \cdot n)}{\alpha \cdot \beta + n}$$

Facem următoarele aproximații:

$$\alpha \cdot \beta \ll n$$

se neglijează produsele  $\alpha \cdot \beta$  și  $a \cdot \alpha$  datorită micimii lor și obținem:

$$x_B = \frac{n \cdot \alpha \cdot (a - b \cdot \beta)}{n} = \alpha \cdot (a - b \cdot \beta)$$

$$y_B = \frac{\beta \cdot b \cdot n}{n} = \beta \cdot b$$

Ecuațiile dreptelor emergente din B cu deviația  $\varepsilon$ :

$$y - y_B = \operatorname{tg} \varepsilon \cdot (x - x_B)$$

unde  $\varepsilon$  este variabil și are valoarea:  $\varepsilon = \beta - \alpha \cdot (n - 1)$  cu

$$y_B = \beta \cdot b \quad \text{și} \quad x_B = \alpha \cdot (a - b \cdot \beta) \quad \text{unde} \quad \operatorname{tg} \varepsilon \equiv \varepsilon$$

Pentru  $x \gg x_B$  acest termen se neglijează:

$$y - b \cdot \beta = [\beta - \alpha \cdot (n - 1)] \cdot x$$

care reprezintă ecuația unui fascicol cu vârful în  $S_1$ . Pentru ca să dispară  $\beta \cdot b$  din primul membru, adunăm la ambii membrii termenul:

$$b \cdot [\beta - \alpha \cdot (n - 1)]$$



$$y - \beta \cdot b + b \cdot [\beta - \alpha \cdot (n-1)] = [\beta - \alpha \cdot (n-1)] \cdot (x+b)$$

$$y - b \cdot \alpha \cdot (n-1) - [\beta - \alpha \cdot (n-1)] \cdot (x+b) = 0$$

care este o relație de forma:

$$(D) + \lambda \cdot (D') = 0$$

Coordonatele vârfului acestui fascicol se obțin prin anularea ecuațiilor:

$$y - b \cdot \alpha \cdot (n-1) \quad y_{S_1} = b \cdot \alpha \cdot (n-1)$$

$$x + b = 0 \quad x_{S_1} = -b$$

Deci sursa  $S_1$  se află în același plan cu sursa  $S$  orientat perpendicular pe axa  $Ox$ .

$$a' = y_{S_1} = b \cdot \alpha \cdot (n-1)$$

$$i = \frac{D \cdot \lambda}{2 \cdot a'} \quad i = \lambda \cdot \frac{b+d}{2 \cdot b \cdot \alpha \cdot (n-1)}$$

Pentru a obține o imagine clară a tabloului de interferență se pune între sursă și biprismă o lentilă convergentă  $L$  astfel ca focarul acesteia să fie apropiat de sursa  $S$  după cum se arată în figura de mai jos.

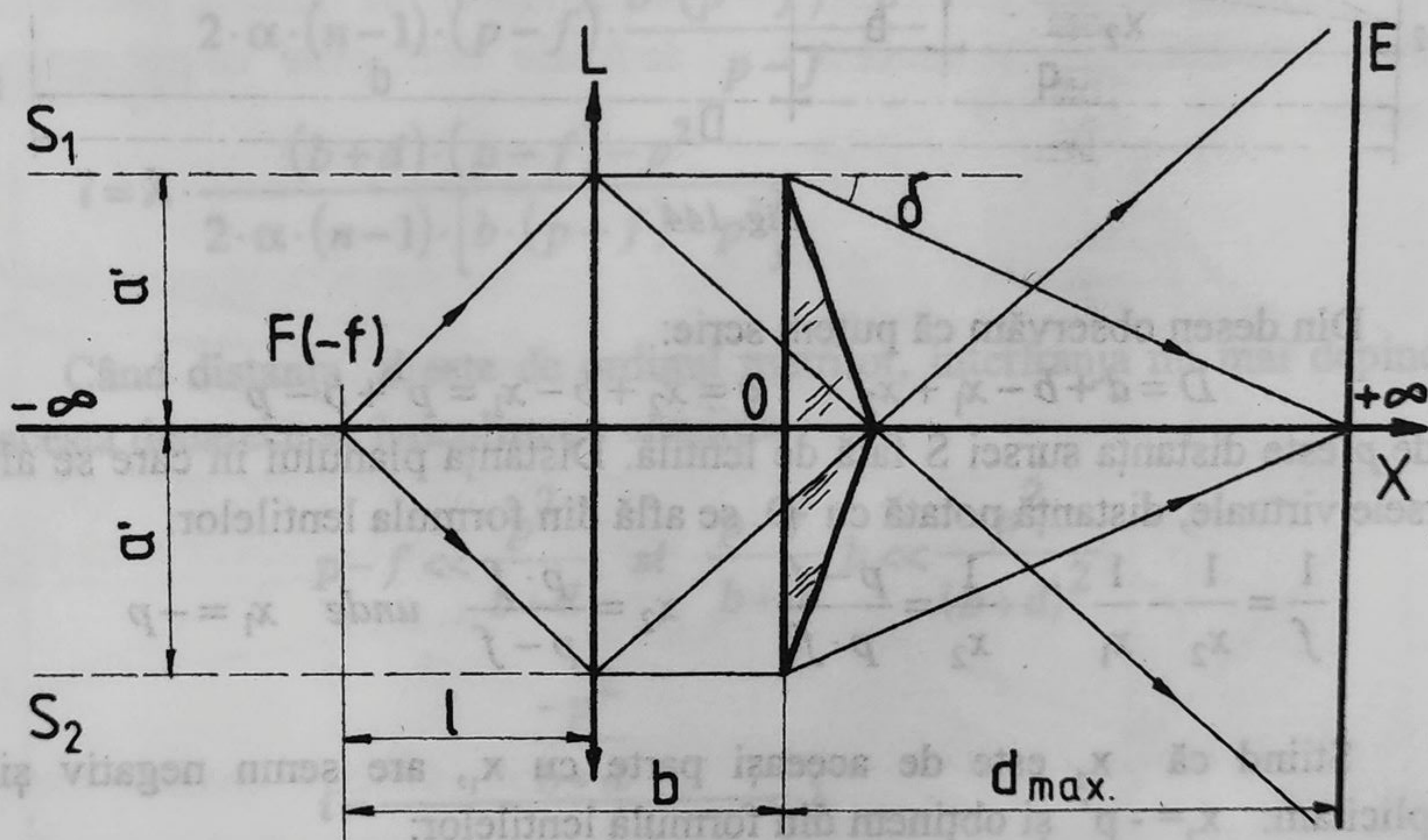


Fig. 143

Dacă sursa se află chiar în focarul lentilei, pe biprismă, razele incidente ajung paralele cu axa optică astfel ca sursele virtuale  $S_1$  și  $S_2$  se vor situa la infinit și avem interferență în lumină paralelă.



În acest caz avem:

$$a = d_{\max} \cdot \operatorname{tg} \delta \quad \text{unde} \quad \delta = \delta_{\min} = 2 \cdot \arcsin \left( n \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\delta \equiv (n-1) \cdot \alpha$$

$$a = d_{\max} \cdot (n-1) \cdot \alpha \quad 2 \cdot a = 2 \cdot d_{\max} \cdot (n-1) \cdot \alpha$$

Zona de interferență se restrânge, obținându-se franje de interferență mai luminoase și deci un tablou de interferență mai bine conturat.

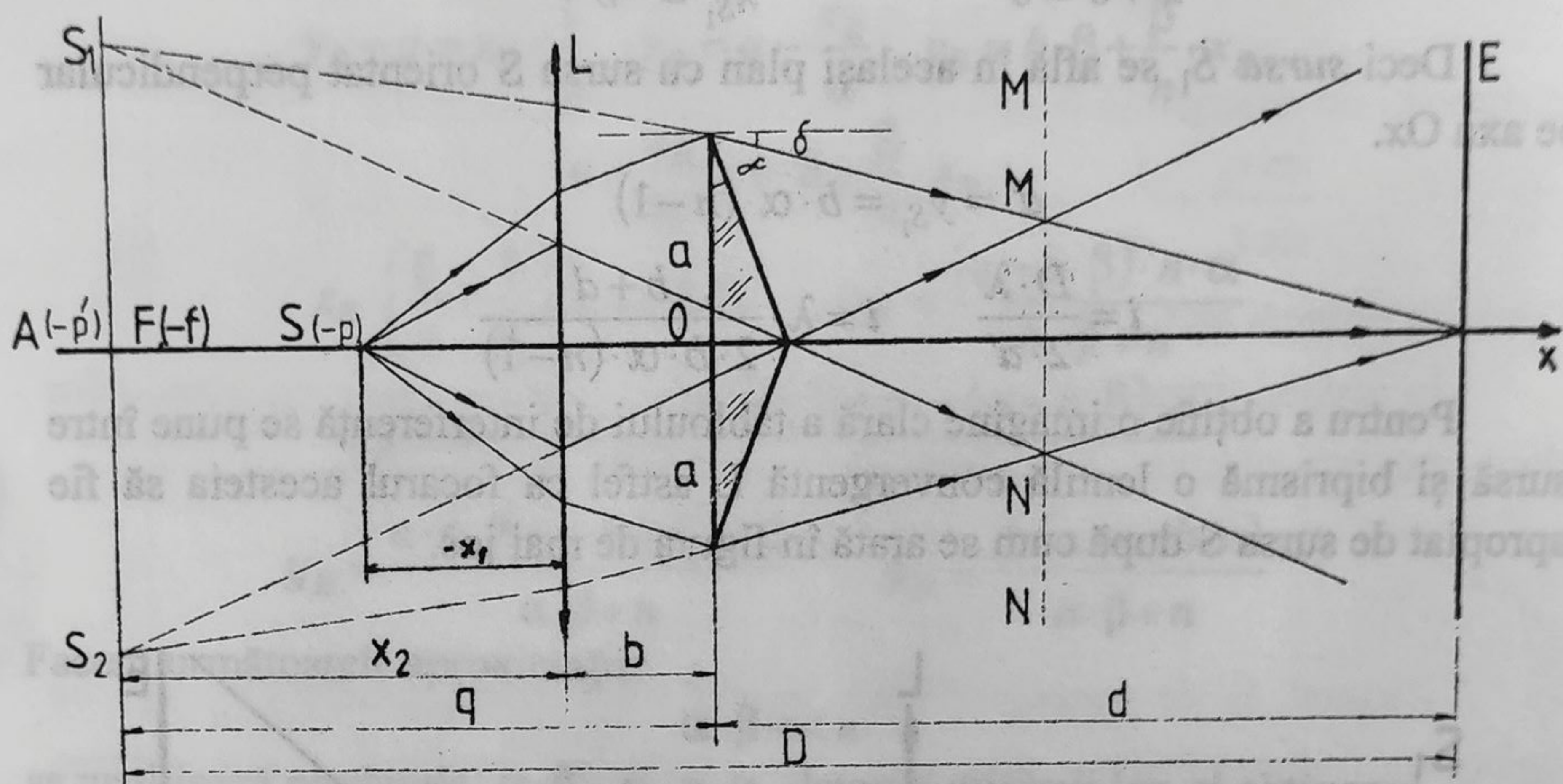


Fig. 144

Din desen observăm că putem scrie:

$$D = d + b - x_1 + x_2 \quad q = x_2 + b - x_1 = p' + b - p$$

unde  $p$  este distanța sursei  $S$  față de lentilă. Distanța planului în care se află sursele virtuale, distanță notată cu  $D$  se află din formula lentilelor:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \quad \frac{1}{x_2} = \frac{p-f}{p \cdot f} \quad x_2 = \frac{p \cdot f}{p-f} \quad \text{unde} \quad x_1 = -p$$

Știind că  $x_2$  este de aceeași parte cu  $x_1$ , are semn negativ și-l explicităm:  $x_2 = -p'$  și obținem din formula lentilelor:

$$-p' = \frac{p \cdot f}{p-f} \quad p' = \frac{p \cdot f}{f-p}$$

Distanța  $D$  apare ca o sumă:

$$D = b + d - p - p' = b + d - p + \frac{p \cdot f}{f-p}$$



$$D = \frac{(b+d) \cdot (f-p) - p \cdot f + p^2 + p \cdot f}{f-p}$$

$$D = \frac{(b+d) \cdot (p-f) - p^2}{p-f}$$

dacă  $b$  este mic putem aproxima:  $b-p \cong 0$  iar expresia pentru  $D$  devine:

$$D = d + p' = d + \frac{p \cdot f}{f-p}$$

Interfranja se poate scrie atunci:

$$i = \frac{D}{2 \cdot \alpha'} \cdot \lambda = \frac{(b+d) \cdot (p-f) - p^2}{2 \cdot \alpha' \cdot (p-f)} \cdot \lambda$$

unde  $2 \cdot \alpha' = 2 \cdot q \cdot \alpha \cdot (n-1)$   $q = \frac{p \cdot f}{f-p} + b - p = \frac{b \cdot (p-f) - p^2}{p-f}$

$$i = \lambda \cdot \frac{(b+d) \cdot (p-f) - p^2}{2 \cdot \alpha \cdot (n-1) \cdot (p-f) \cdot \frac{b \cdot (p-f) - p^2}{p-f}}$$

deci

$$i = \lambda \cdot \frac{(b+d) \cdot (p-f) - p^2}{2 \cdot \alpha \cdot (n-1) \cdot [b \cdot (p-f) - p^2]}$$

Când distanța  $d$  este de ordinul metrilor, interfranja nu mai depinde de acesta deoarece se îndeplinește condiția:

$$p-f \ll \frac{p^2}{b+d} \quad \text{si} \quad \frac{p-f}{b+d} \cdot b \ll \frac{p^2}{(b+d)^2}$$

$$i = \frac{\frac{-p^2}{b+d}}{2 \cdot \alpha \cdot (n-1) \cdot \left( -\frac{p^2}{p+d} \right)} \cdot \lambda$$

$$i = \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot (n-1)} \cdot \lambda$$



Cunoscând unghiul  $i$  se poate obține și unghiul  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{\lambda}{2 \cdot i \cdot (n-1)}$$

Zona de interferență se prezintă ca un romb având diagonala mică egală cu  $a$  iar diagonala mare cu  $d_{\max}$  care se deduce din faptul că reprezintă distanța la care dispar toate franjele de interferență. Numărul maxim de franje de interferență este dat de raportul:  $N = \frac{a}{i}$  după cum se vede din figura de mai sus.

#### 6.6.5. Bilentila Billet

Se taie o lentilă după o suprafață plană ce trece prin axa optică principală, în două părți egale, care apoi se depărtează la o distanță mică în comparație cu raza de curbură, simetric față de axa optică.

Pe axă, la distanță mai mare decât distanța focală, este situată o sursă punctiformă de lumină  $S$  iar la distanța  $D$  de lentila se află un ecran pe care se observă franjele de interferență.

În figura de mai jos se prezintă mersul razelor de lumină, pentru care vom calcula interfranja și numărul total de franje luminoase ce pot apare pe un ecran.

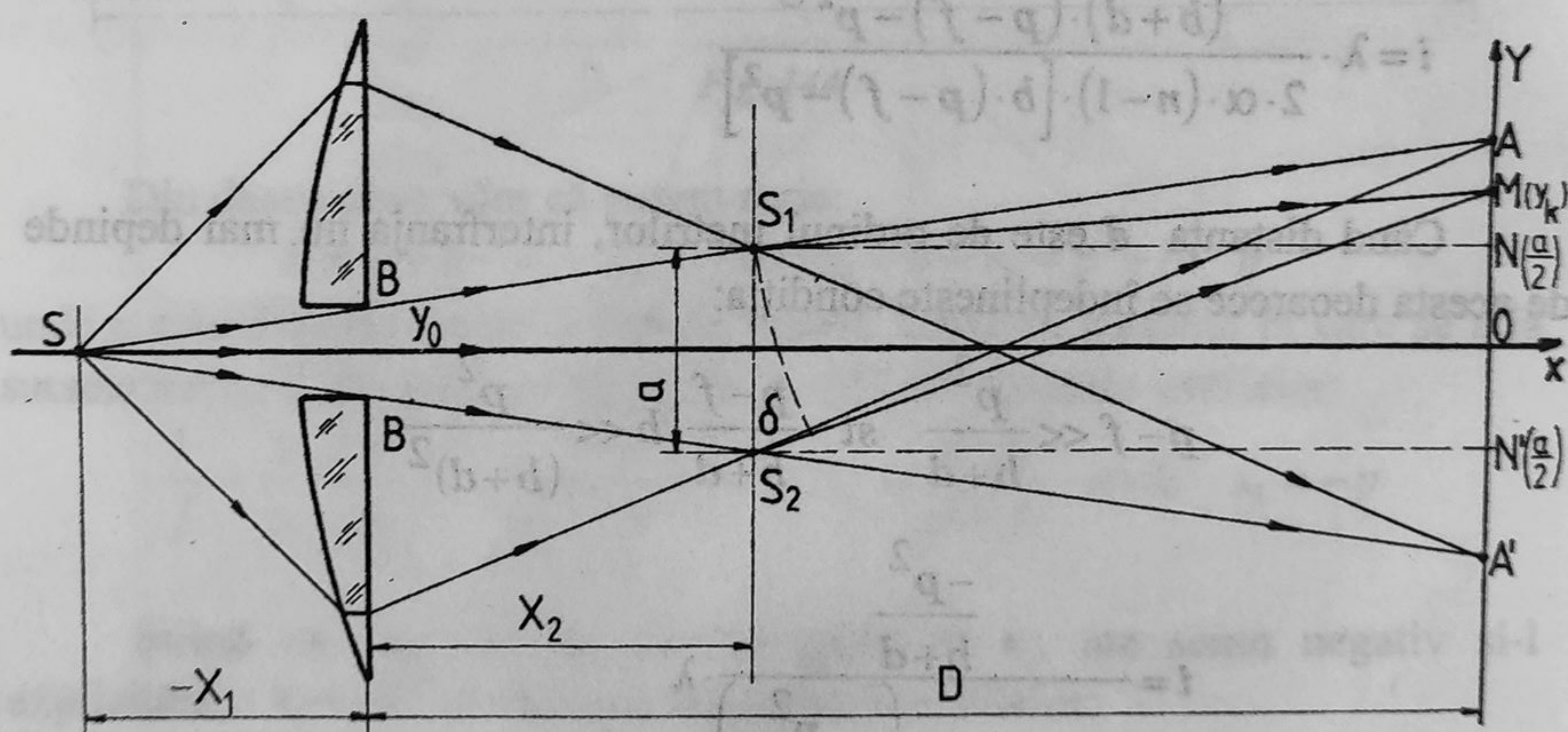


Fig. 145

unde:  $BB' = y_0$  este distanța dintre cele două jumătăți de lentilă;

$ON = ON' = \frac{a}{2}$  reprezintă proiecțiile lui  $S_1$  și  $S_2$  pe ecranul  $E$ ;

$AA'$  reprezintă zona în care se obțin franjele de interferență.



Pentru franja luminoasă de ordin  $k$  pe care o situăm în punctul  $M(y_k)$  de pe ecran, razele de lumină coerente ce provin de la sursele  $S_1$  și  $S_2$  parcurg drumurile  $L_1$  și  $L_2$ . Diferența de drum între acestea este:

$$\delta = L_2 - L_1$$

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul putem obține  $L_1$ :

$$L_1^2 = (D - x_2)^2 + \left(y_k - \frac{a}{2}\right)^2$$

În mod asemănător aplicând aceeași teoremă în triunghiul  $S_2N'M$  se obține:

$$L_2^2 = (D - x_2)^2 + \left(y_k + \frac{a}{2}\right)^2$$

de unde scoatem:

$$L_2^2 - L_1^2 = 2 \cdot a \cdot y_k$$

$$L_2 - L_1 = \delta = \frac{2 \cdot a \cdot y_k}{2 \cdot (D - x_2)} = \frac{a \cdot y_k}{D - x_2} = k \cdot \lambda$$

Pentru maxim avem deci:

$$y_k = \frac{(D - x_2) \cdot k \cdot \lambda}{a}$$

iar interfranja:

$$i = y_k - y_{k-1} = \frac{D - x_2}{a} \cdot \lambda$$

Din triunghiurile asemenea:  $\Delta SBB' \approx \Delta SS_1S_2$  deducem:

$$\frac{y_0}{a} = \frac{x_1}{x_2 \pm x_1} \quad \text{de unde} \quad a = y_0 \cdot \frac{x_2 \mp x_1}{x_1}$$

Lărgimea tabloului de interferență pe ecran este  $b$  și se determină din relațiile de asemănare a triunghiurilor:  $\Delta SBB' \approx \Delta SAA'$

$$\frac{y_0}{b} = \frac{x_1}{D \pm x_1} \quad \text{de unde} \quad b = y_0 \cdot \frac{D \mp x_1}{x_1}$$

Numărul de franje vizibile este:

$$N = \frac{b}{i} = y_0 \cdot \frac{D + x_1}{x_1} \cdot \frac{a}{\lambda \cdot (D - x_2)}$$

$$N = \frac{y_0 \cdot (D + x_1)}{x_1 \cdot \lambda \cdot (D - x_2)} \cdot y_0 \cdot \frac{x_2 + x_1}{x_1}$$



$$N = \frac{y_0^2}{\lambda} \cdot \frac{1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{D}{x_1} + D \cdot \frac{x_2}{x_1}}{D - x_2}$$

Ținem cont de formula lentilelor:

$$\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_0 - n_1}{R_1} + \frac{n_2 - n_0}{R_2} \quad \text{pentru } n_2 = n_1 = 1 \text{ si } R_1 = R_2$$

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{n_0 - 1}{R} \quad \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1} + \frac{n_0 - 1}{R}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = 1 - \frac{x_2}{R} \cdot (n_0 - 1) = 1 - \frac{x_2}{f}$$

$$N = \frac{y_0^2}{\lambda} \cdot \frac{1 + 1 - \frac{x_2}{R} \cdot (n_0 - 1) + \left[ 1 + 1 - \frac{x_2}{R} \cdot (n_0 - 1) \right] \cdot \frac{D}{x_2}}{D - x_2}$$

$$N = \frac{y_0^2}{\lambda} \cdot \frac{\left( 2 - \frac{x_2}{f} \right) + \frac{D}{x_1} \cdot \left( 2 - \frac{x_2}{f} \right)}{D - x_2} = \frac{y_0^2}{\lambda} \cdot \frac{\left( 2 - \frac{x_2}{f} \right) \cdot \left( 1 + \frac{D}{x_1} \right)}{D - x_2}$$

$$N = \frac{y_0^2}{\lambda} \cdot \frac{2 + 2 \cdot \frac{D}{x_1} - \frac{x_2}{f} - \frac{D}{x_1} \cdot \frac{x_2}{f}}{D - x_2}$$

$$N = \frac{y_0^2}{\lambda \cdot f} \cdot \frac{D - x_1}{D - x_2} \cdot \left( 1 + \frac{x_2}{f} \right)$$

#### 6.6.6. Probleme rezolvate

1. O lentilă plan convexă cu diametrul  $2 \cdot r$  cu raza de curbură  $R$  și indice de refracție  $n$  este așezată într-o astfel de poziție, încât în stânga se află aer ( $n_1 = 1$ ) iar în dreapta un mediu transparent cu indicele de refracție ( $n_2 \neq 1$ ), partea convexă este situată în aer.



În aer, la distanța  $d$  de lentilă pe axa optică este situată o sursă punctiformă de lumină monocromatică.

Demonstrați relațiile date mai jos între poziția imaginii aflată la distanța  $f$  de lentilă și poziția sursei, distanța  $d$  a sursei în aproximația fasciculelor de raze paraxiale (gaussiană).

$$\frac{F_1}{d} + \frac{F_2}{f} = 1$$

unde  $F_1$  și  $F_2$  sunt distanțele focale ale lentilei în aer și pentru contactul unei fețe cu mediul având indicele de refracție în mod corespunzător.

2. Lentila este tăiată după o suprafață plană perpendiculară în două părți egale, care apoi se depărtează la o distanță  $\delta \ll r$  (bilentila Billet).

Pe axa de simetrie a acestui sistem la distanța  $d$  de lentilă ( $d > F_1$ ) este situat un izvor punctiform de lumină S. La dreapta sistemului pe ecranul E situat paralel cu lentila la distanța  $l$  se formează N franje de interferență, dacă partea dreaptă a lentilei se află în aer.

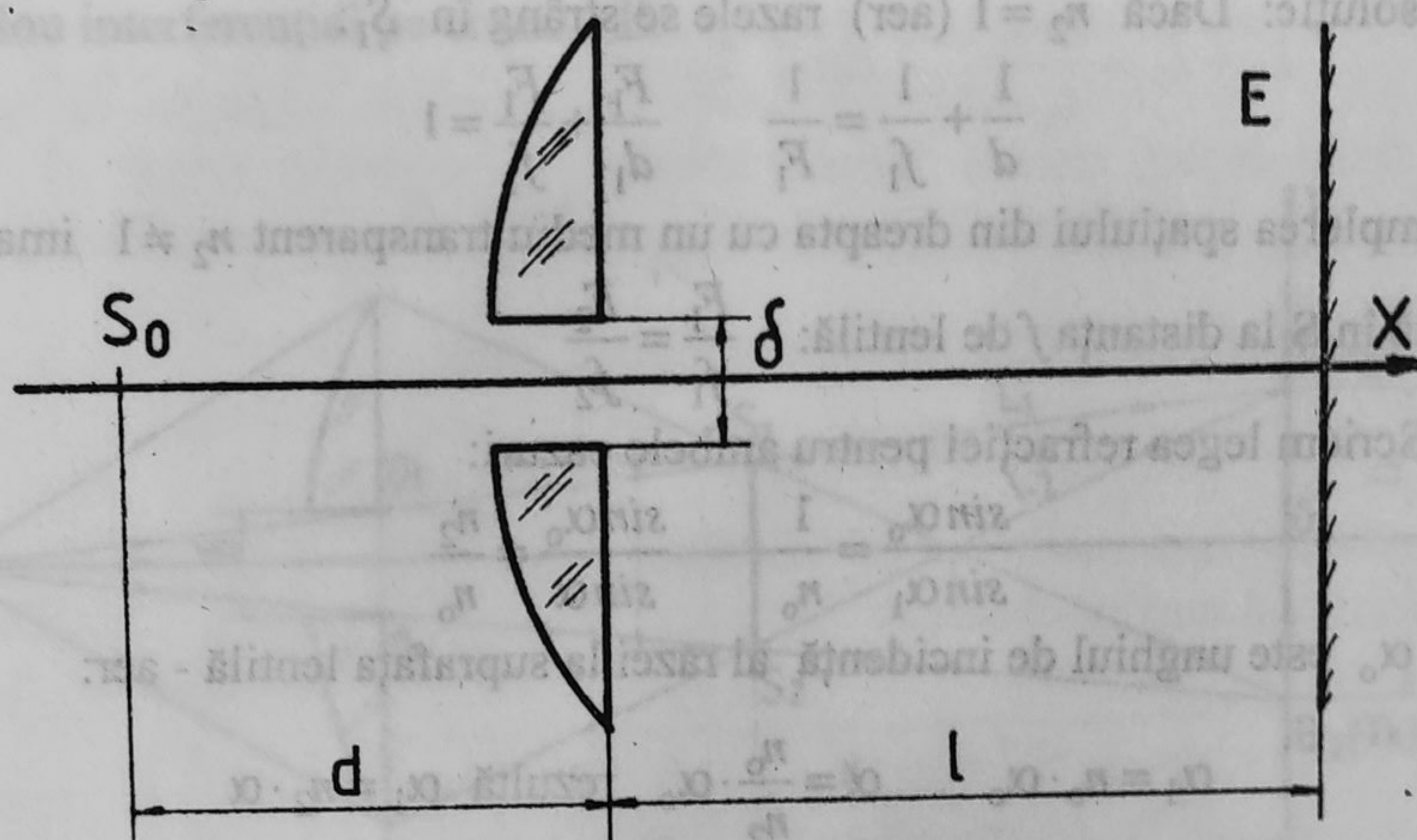


Fig. 146

Determinați numărul de franje de interferență în funcție de lungimea de undă.

Indicație: toți indicii de refracție sunt absoluți.

(Olimpiada Internațională din România - 1972).

Rezolvare:

În figura de mai jos se indică mersul razelor de lumină, precum și elementele date ale problemei.



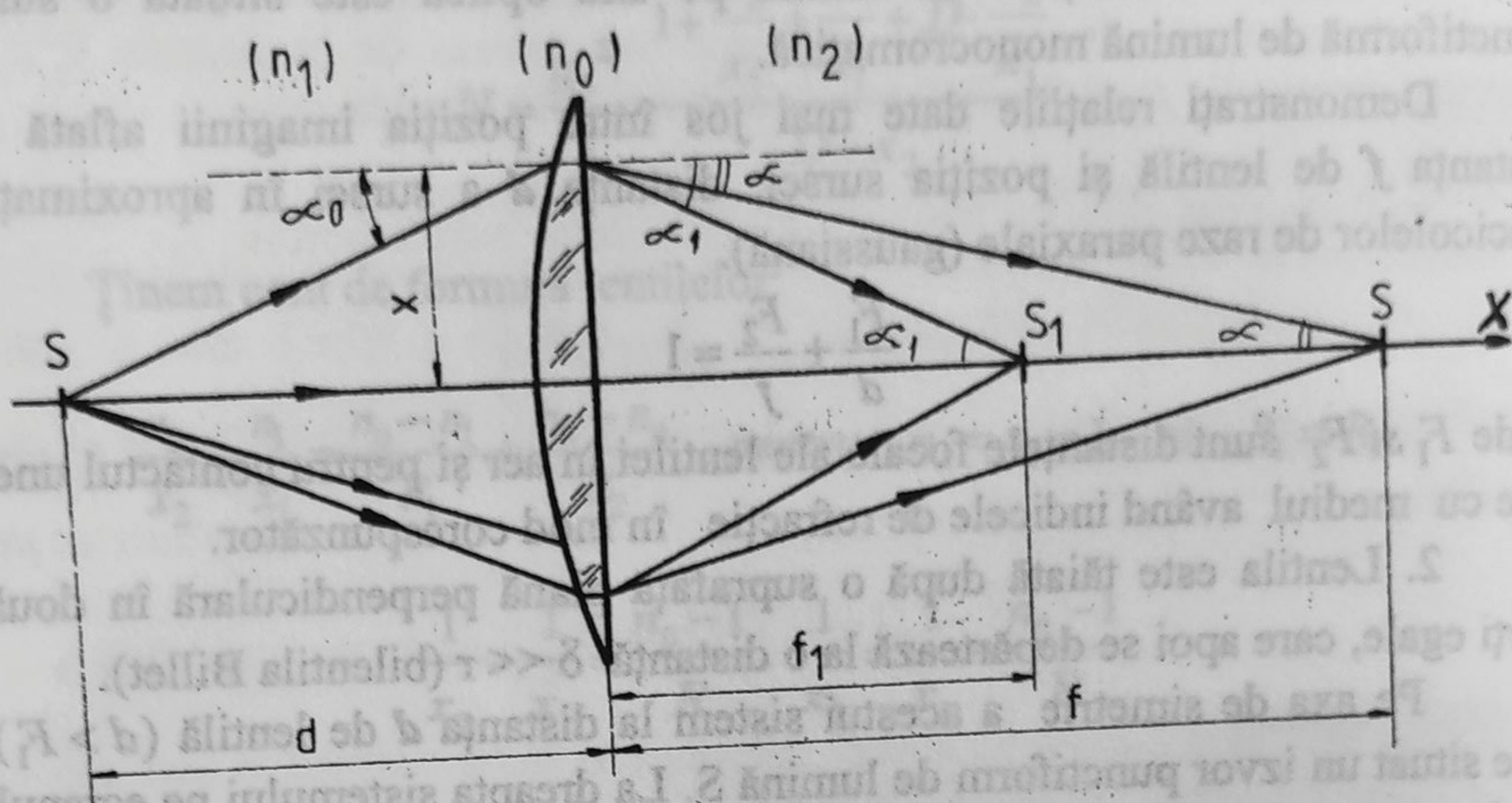


Fig. 147

Prima soluție: Dacă  $n_2 = 1$  (aer) razele se strâng în  $S_1$ :

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_1} \quad \frac{F_1}{d_1} + \frac{F_1}{f_1} = 1$$

Prin umplerea spațiului din dreapta cu un mediu transparent  $n_2 \neq 1$  imaginea se mută în S la distanța  $f$  de lentilă:  $\frac{F_1}{f_1} = \frac{F_2}{f_2}$

Scriem legea refracției pentru ambele cazuri:

$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_1} = \frac{1}{n_0} \quad \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha} = \frac{n_2}{n_0}$$

unde  $\alpha_0$  este unghiul de incidență al razei la suprafața lentilă - aer:

$$\alpha_1 = n_0 \cdot \alpha_0 \quad \alpha = \frac{n_0}{n_2} \cdot \alpha_0 \text{ rezultă } \alpha_1 = n_2 \cdot \alpha$$

deoarece  $\alpha_1 = \frac{x}{f_1}$   $\alpha = \frac{x}{f}$  atunci  $f = n_2 \cdot f_1$

Se consideră mersul razelor paralel cu axa optica, în mod asemănător vom demonstra că:  $F_2 = n_2 \cdot F_1$  prin urmare:

$$\frac{F_1}{f_1} = \frac{n_2}{f} = \frac{F_2}{f} \quad \frac{F_1}{d} + \frac{F_2}{f} = 1$$



A doua soluție: Când cele trei medii sunt diferite:

$$\frac{n_2}{f} - \frac{n_1}{d} = \frac{n_0 - n_1}{R_1} + \frac{n_2 - n_0}{R_2} \quad R_1 = R \quad R_2 \rightarrow \infty$$

Obiectul este situat la infinit:

$$\frac{n_2}{f} - \frac{n_1}{d} = \frac{n_0 - n_1}{R_1}$$

Când imaginea este la infinit

$$d \rightarrow \infty \quad \text{și} \quad f \rightarrow F_2$$

$$\frac{n_2}{F_2} = \frac{n_0 - n_1}{R_1} \quad F_2 = \frac{n_2}{n_0 - n_1} \cdot R_1$$

2. Cele două jumătăți de lentilă formează independent una de alta două imagini ale sursei S, la distanța  $f$  de lentilă. Aceste surse sunt coerente și dau un tablou interferențial pe ecranul E.

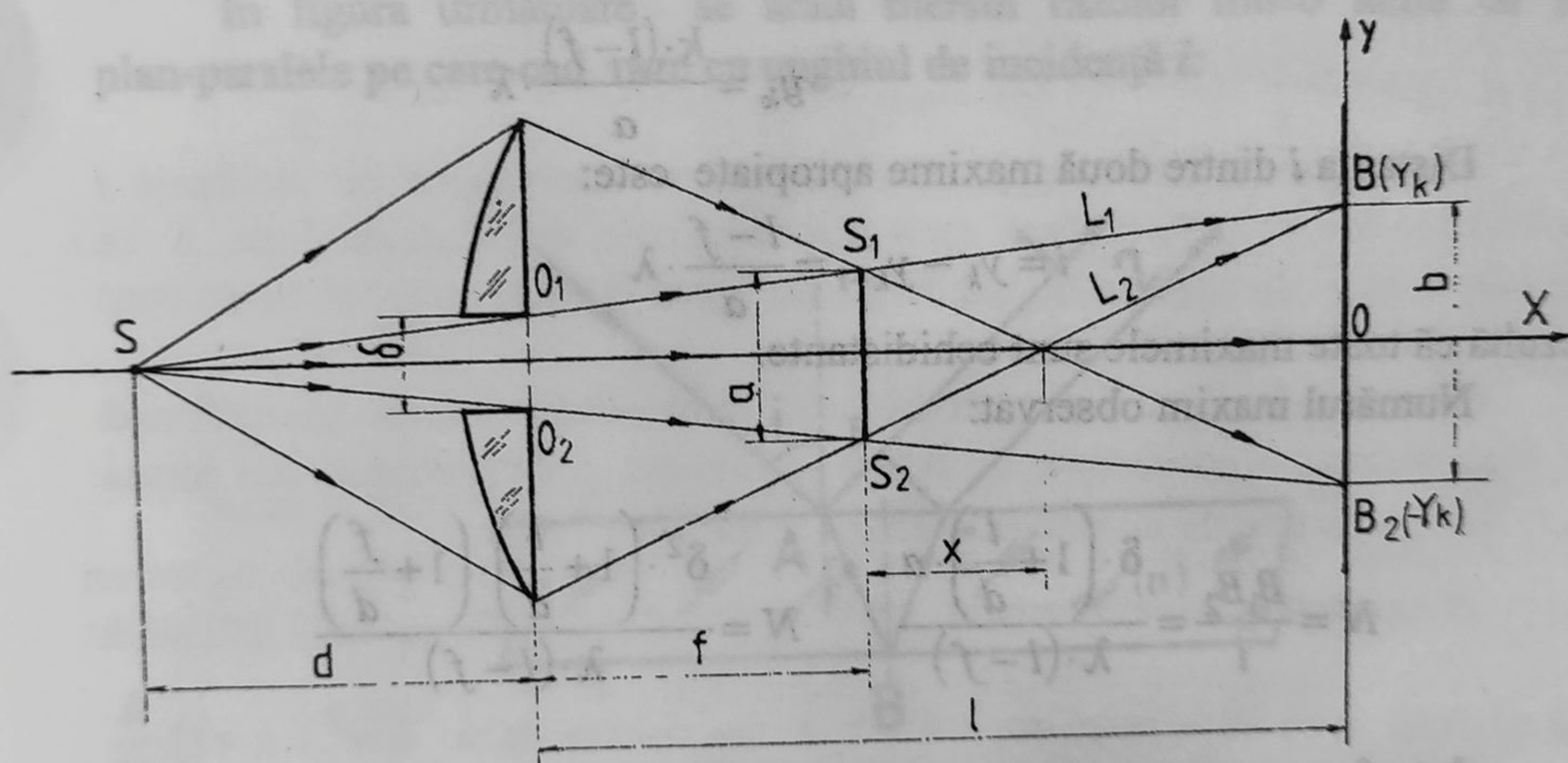


Fig. 148

Distanța  $a = S_1S_2$  se deduce din triunghiul  $\Delta SO_1O_2$  și  $\Delta SS_1S_2$

$$\frac{a}{\delta} = \frac{d+f}{d} \quad a = \delta \cdot \left(1 + \frac{f}{d}\right)$$



Tabloul de interferență apare datorită suprapunerii razelor emise de  $S_1$  și  $S_2$ . Dimensiunea  $b = B_1 B_2$  de pe ecran în care se cuprinde tabloul de interferență se determină din triunghiurile  $\Delta S O_1 O_2$  și  $\Delta S B_1 B_2$  astfel:

$$\frac{b}{\delta} = \frac{l+d}{d} \quad b = \delta \cdot \left(1 + \frac{l}{d}\right)$$

Să găsim  $y_k$ -coordonata maximului de ordin  $k$  ce se formează în punctul  $M$  de pe ecran:

$$S_2 M - S_1 M = k \cdot \lambda \quad S_1 M = L_1 \quad S_2 M = L_2$$

$$L_1^2 = (l-f)^2 + \left(y_k - \frac{a}{2}\right)^2 \quad L_2^2 = (l-f)^2 + \left(y_k + \frac{a}{2}\right)^2$$

$$L_2^2 - L_1^2 = 2 \cdot y_k \cdot a \quad (L_2 + L_1) \cdot (L_2 - L_1) = 2 \cdot y_k \cdot a$$

$$y_k \ll l-f \quad L_2 + L_1 \cong l-f$$

$$L_2 - L_1 = \frac{2 \cdot y_k \cdot a}{L_1 + L_2} \quad \text{când } L_2 - L_1 \cong \frac{y_k \cdot a}{l-f} \quad a = \frac{y_k}{l-f} = k \cdot \lambda$$

$$y_k = \frac{k \cdot (l-f)}{a} \cdot \lambda$$

Distanța  $i$  dintre două maxime apropiate este:

$$i = y_k - y_{k-1} = \frac{l-f}{a} \cdot \lambda$$

rezultă că toate maximele sunt echidistante.

Numărul maxim observat:

$$N = \frac{B_1 B_2}{i} = \frac{\delta \cdot \left(1 + \frac{l}{d}\right) \cdot a}{\lambda \cdot (l-f)} \quad N = \frac{\delta^2 \cdot \left(1 + \frac{l}{d}\right) \cdot \left(1 + \frac{f}{d}\right)}{\lambda \cdot (l-f)}$$

Interferența se va crea numai pentru  $l > f$ , se vede din:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \quad \frac{l}{d} = \frac{F}{d-F}$$

$$N = \frac{\delta^2}{\lambda} \cdot \frac{l+d}{l \cdot (d-F) - F \cdot d} \quad \text{unde } F = \frac{R}{n_0 - 1}$$



### 6.7. Interferența în lame subțiri cu fețe plan-paralele (interferență cu franje de egală înclinare)

Interferența se produce în natură în mod spontan și o putem observa adesea în peliculele subțiri de ulei ce se formează pe suprafața apei, în straturi subțiri de mică, de oxizi aflați pe suprafețele unor corpuri.

Irizația peliculelor de săpun sau ulei, ca și culoarea straturilor subțiri de oxizi se datorează interferenței luminii albe în aceste straturi în urma căreia unele culori se anulează (deoarece pentru aceste lungimi de undă se formează un minim de interferență), iar cele rămase apar întărite datorită redistribuirii energiei în maximele de interferență.

Diferența de drum dintre razele coerente care interferă, apare din faptul că una din raze este reflectată pe prima suprafață (cu salt de fază egal cu  $\pi$ , deci cu apariția unui drum suplimentar de  $\frac{\lambda}{2}$ ) iar a doua rază intră în mediul optic și se reflectă pe a doua suprafață (fără schimbare de semn căci reflexia se face pe un mediu cu indice de refracție mai mic).

În figura următoare se arată mersul razelor într-o lamă cu fețe plan-paralele pe care cad raze cu unghiul de incidență  $i$ :

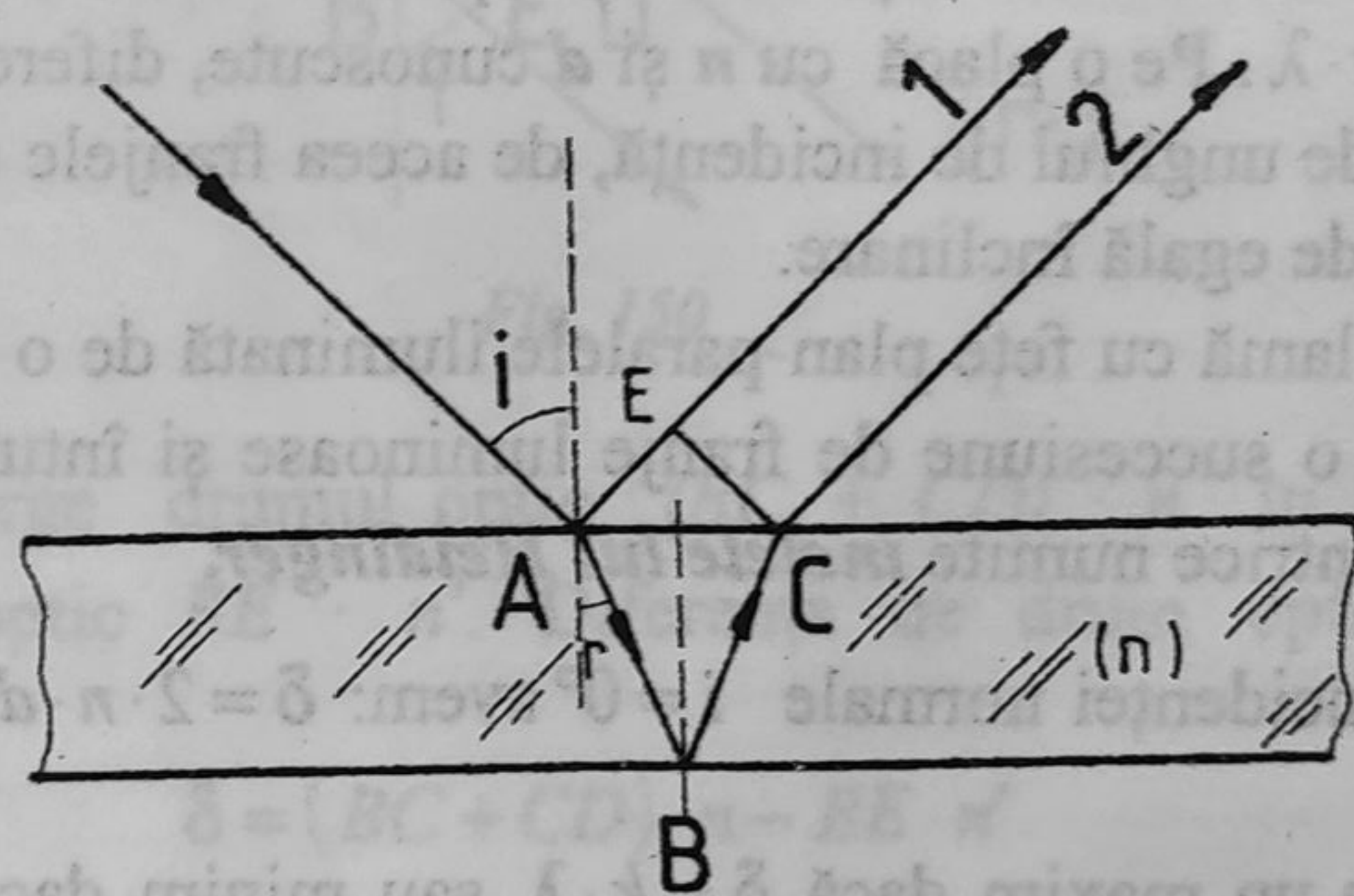


Fig. 149

Raza 1 parcurge drumul  $n \cdot E_A + \frac{\lambda}{2}$  în același timp în care raza 2 parcurge drumul:  $(AB + BC) \cdot n$ .

Diferența de drum este:  $\delta = (AB + BC) \cdot n - \left( n \cdot E_A + \frac{\lambda}{2} \right)$



$$AB \cdot \cos r = d \quad AC = 2 \cdot AD = 2 \cdot d \cdot \operatorname{tgr}$$

unde:  $AE = AC \cdot \cos(90^\circ - i) = AC \cdot \sin i = 2 \cdot d \cdot \operatorname{tgr} \cdot \sin i$

$$\delta = n \cdot \frac{2 \cdot d}{\cos r} - d \cdot \operatorname{tgr} \cdot 2 \cdot n' \cdot \sin i - \frac{\lambda}{2}$$

Din legea lui Snell:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n}{n'} \quad \text{de unde} \quad n' \cdot \sin i = \sin r$$

$$\delta = 2 \cdot n \cdot d \cdot \left( \frac{1}{\cos r} - \frac{\sin^2 r}{\cos r} \right) - \frac{\lambda}{2} \quad \delta = 2 \cdot n \cdot d \cdot \cos r - \frac{\lambda}{2}$$

Razele 1 și 2 ajung la ochi care vede franja de interferență localizată pe suprafața lamei. Dacă punem o lentilă convergentă în calea lor imaginea reală a franjelor se poate prinde pe un ecran.

Expresia lui  $\delta$  se poate exprima în funcție de unghiul de incidență:

$$\sin r = \frac{n'}{n} \cdot \sin i \quad \cos r = \sqrt{1 - \sin^2 r} = \sqrt{1 - \left( \frac{n'}{n} \right)^2 \cdot \sin^2 i}$$

$$\cos r = \frac{1}{n} \cdot \sqrt{n^2 - n'^2 \sin^2 i} \quad \delta = 2 \cdot d \cdot \sqrt{n^2 - n'^2 \sin^2 i} - \frac{\lambda}{2}$$

Maximele de interferență se obțin pentru acel unghi de incidență  $i$  pentru care  $\delta = k \cdot \lambda$ . Pe o placă cu  $n$  și  $d$  cunoscute, diferența de drum  $\delta$  va depinde numai de unghiul de incidență, de aceea franjele astfel obținute sunt numite și franje de egală înclinare.

Privind o lamă cu fețe plan-paralele iluminată de o sursă punctiformă  $S$ , vom observa o succesiune de franje luminoase și întunecoase sub forma unor inele concentrice numite **inelele lui Heidinger**.

În cazul incidenței normale  $i = 0^\circ$  avem:  $\delta = 2 \cdot n \cdot d - \frac{\lambda}{2}$ . Pe verticala

sursei vom avea un maxim dacă  $\delta = k \cdot \lambda$  sau minim dacă  $\delta = (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$

în funcție de grosimea lamei. Dacă aceasta este un multiplu impar de  $\frac{\lambda}{4 \cdot n}$

a radiației folosite avem un maxim pentru  $k \neq 0$  într-adevăr:

$$d = N \cdot \frac{\lambda}{4 \cdot n} \quad \delta = 2 \cdot n \cdot \frac{N}{4 \cdot n} \cdot \lambda - \frac{\lambda}{2} = N \cdot \lambda - \frac{\lambda}{2}$$

$N$  fiind impar putem pune:  $2 \cdot k = N - 1$  și  $\delta = 2 \cdot k \cdot \frac{\lambda}{2}$



În particular dacă  $N=1$ ,  $k=0$  avem un maxim central. Dacă grosimea lamei este un multiplu par de  $\frac{\lambda}{4 \cdot n}$  avem un minim căci:

$$\delta = 2 \cdot n \cdot N' \cdot \frac{\lambda}{4 \cdot n} - \frac{\lambda}{2} = (N-1) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

se poate scrie:  $(2 \cdot k + 1) = N - 1$  deci  $\delta = (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$

În particular pentru  $N=2$ ,  $k=0$  avem primul minim.

**Observație:** Dacă lumina străbate lama, apare o interferență de transmisie datorită faptului că unele raze refractate se reflectă total de două ori pe cele două suprafețe în interiorul mediului optic și la ieșirea din lamă, interferează cu raza refractată transmisă, după cum se vede din figură.

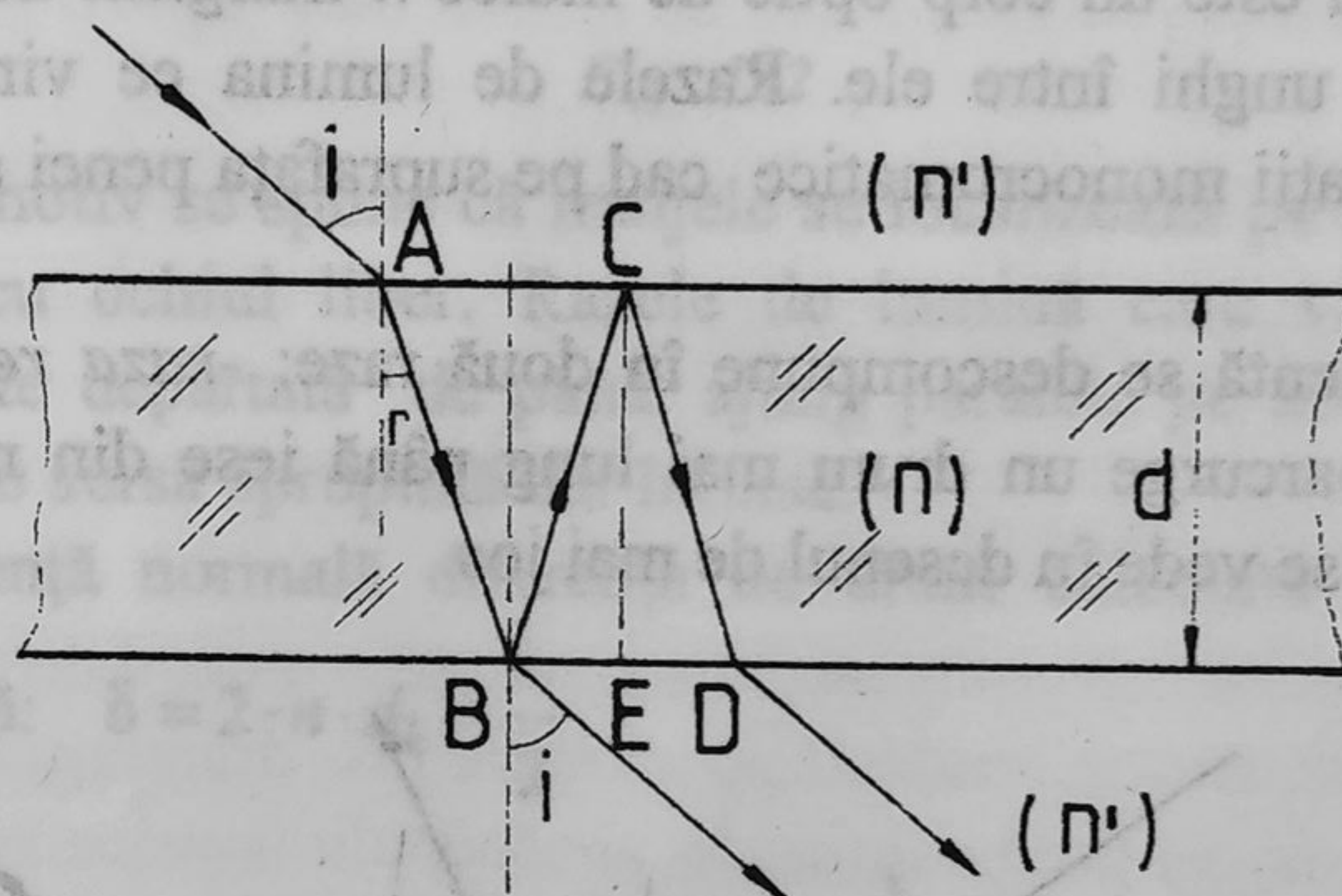


Fig. 150

Raza 2 parcurge drumul optic  $(BC + CD) \cdot n$  în timp ce raza 1 parcurge drumul optic  $BE \cdot n'$ . Diferența de drum optic între razele transmise este:

$$\delta = (BC + CD) \cdot n - BE \cdot n'$$

unde:  $BC \cdot \cos r = d$  și  $BD = 2 \cdot BC' = 2 \cdot BC \cdot \sin r = 2 \cdot \frac{d}{\cos r} \cdot \sin r$

$$n' \cdot BE = n' \cdot BD \cdot \sin i = 2 \cdot d \cdot n' \cdot \sin r = 2 \cdot \frac{\sin i}{\cos r}$$

$$\delta_t = \frac{2 \cdot n \cdot d}{\cos r} - \frac{2 \cdot d \cdot \sin r \cdot n' \cdot \sin i}{\cos r}$$

$$\delta_t = \frac{2 \cdot n \cdot d}{\cos r} \cdot (1 - \sin^2 r) = 2 \cdot n \cdot d \cdot \cos r$$



sau în funcție de unghiul de incidență:

$$\delta_t = 2 \cdot n \cdot d \cdot \sqrt{n^2 - n'^2 \cdot \sin^2 i}$$

Observăm că la transmisie  $\delta_t = 2 \cdot n \cdot d \cdot \cos r$  în timp ce la reflexie:

$$\delta_n = 2 \cdot n \cdot d \cdot \cos r - \frac{\lambda}{2}$$

cele două diferențe de drum diferă printr-un defazaj de  $\pi$  deci maximum de transmisie este defazat cu  $\pi$  față de maximum de reflexie; inelelor de maximum de la reflexie le corespund inele de minim la transmisie.

## 6.8. Franje de egală grosime

### 6.8.1. Pana optică

Pana optică este un corp optic de indice  $n$  mărginit de două suprafețe plane ce fac un unghi între ele. Razele de lumina ce vin de la o sursă punctuală de radiații monocromatice cad pe suprafața penei sub un unghi de incidență  $I$ .

Raza incidentă se descompune în două raze: -*raza reflectată* și *raza refractată* care parcurge un drum mai lung până iese din nou la suprafața penei după cum se vede în desenul de mai jos.

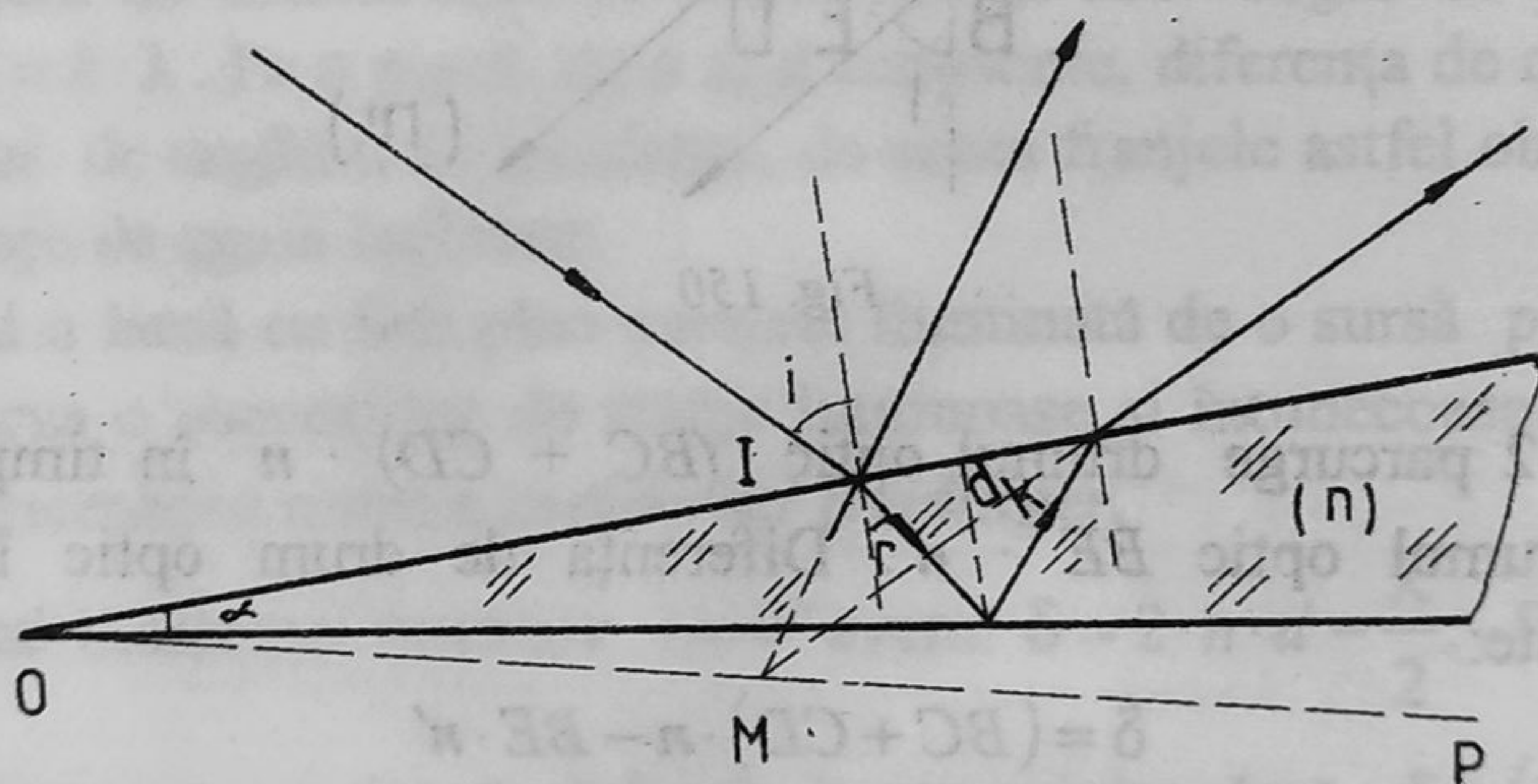


Fig.151

Diferența de drum dintre cele două radiații care interferă depinde numai de grosimea locală  $d$  a lamei în punctul de incidență. Deoarece toate punctele de pe lamă corespunzătoare unei aceleiași grosimi dau aceeași diferență de drum, razele care interferă dau o franjă numită din acest motiv, **franjă de egală grosime** pe care ochiul o vede localizată într-un punct M situat într-un plan OP ce trece prin muchea penei.



În acest plan se obține un șir de franje drepte, paralele între ele și paralele cu muchea prismei.

Dacă razele incidente cad perpendicular pe suprafața penei, franjele de interferență se localizează în interiorul penei, practic chiar pe fața penei după cum se vede în figura de mai jos.

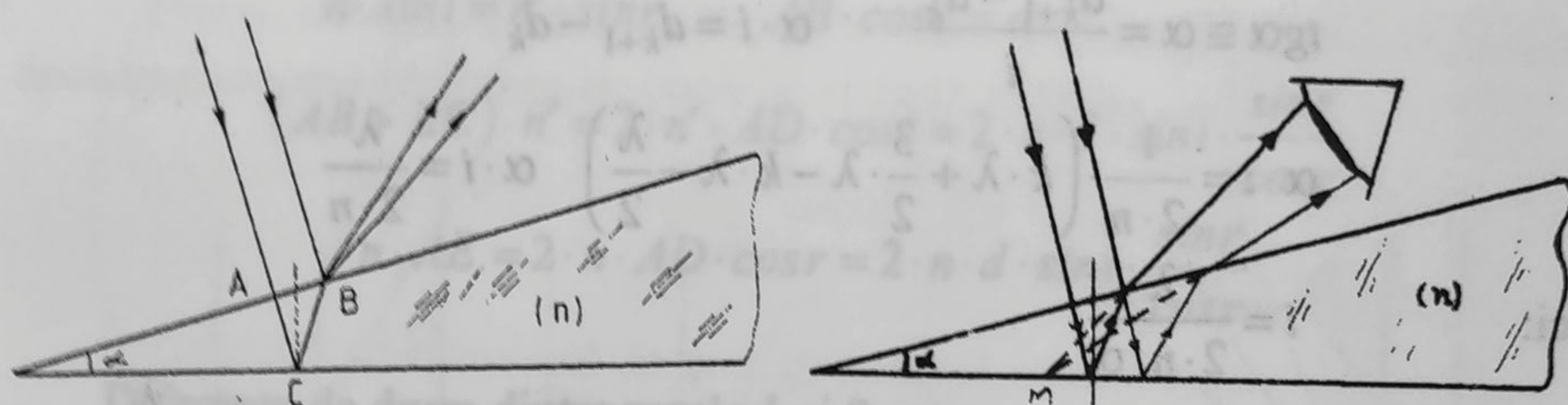


Fig. 152

Din acest motiv se spune că franjele se localizează pe suprafața penei și pot fi văzute cu ochiul liber. Razele de lumină care vin de la o sursă punctuală foarte depărtată de pană, ajung paralele pe aceasta ca și razele provenite de la o sursă apropiată dar întinsă.

În incidență normală diferența de drum calculată ca la paragraful precedent ne dă:  $\delta = 2 \cdot n \cdot d_k - \frac{\lambda}{2}$

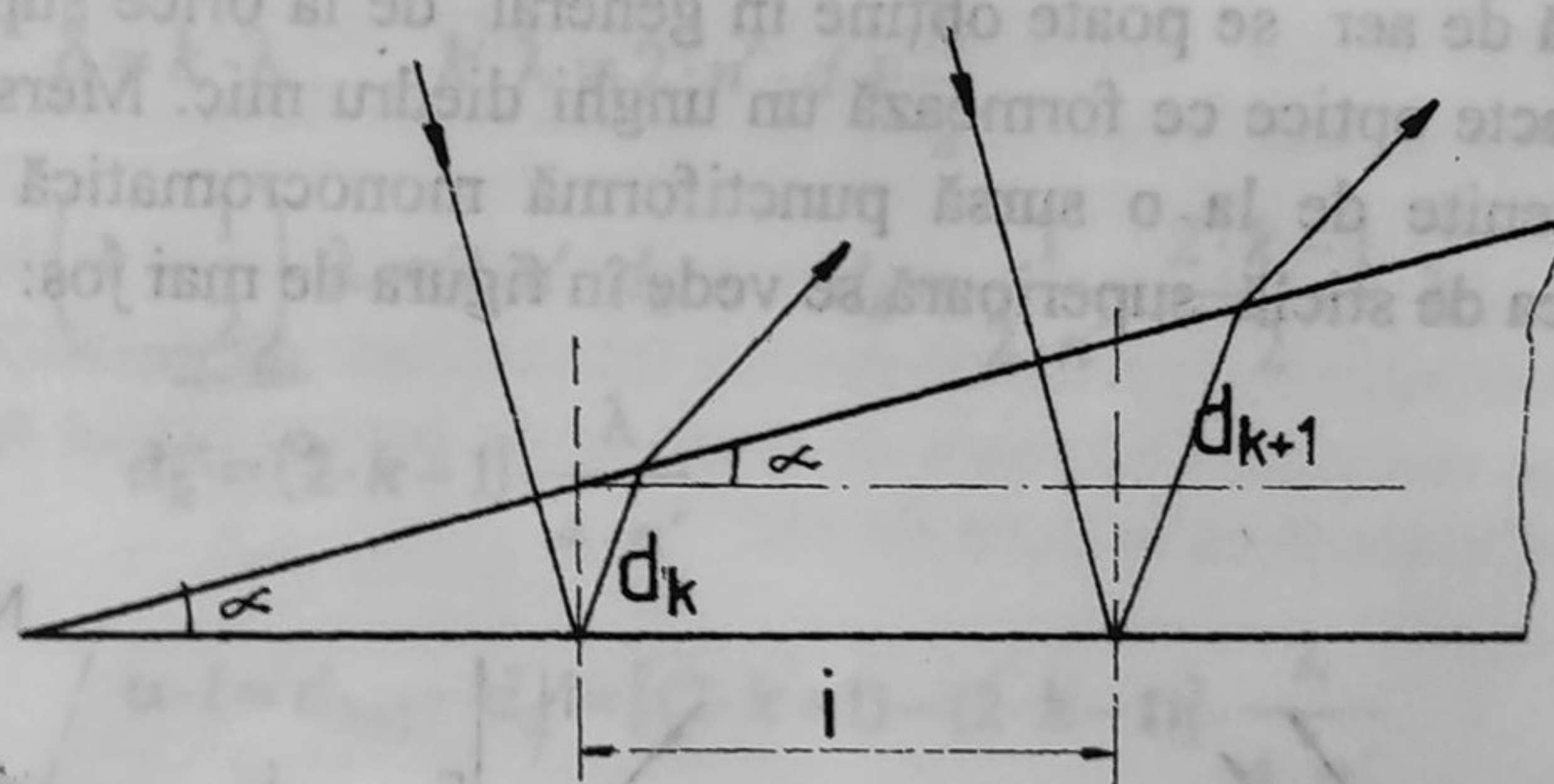


Fig. 153

Interfranja se obține punând condiția de maxim pentru două franje succesive:  $\delta_k = k \cdot \lambda$   $2 \cdot n \cdot d_k - \frac{\lambda}{2} = k \cdot \lambda$  de unde:

$$d_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2 \cdot n} \cdot \lambda \quad 2 \cdot n \cdot d_{k+1} - \frac{\lambda}{2} = (k+1) \cdot \lambda$$



Cunoscând cele două grosimi, deducem interfranja din triunghiul dreptunghic format;

$$d_{k+1} = \left(k + \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{2 \cdot n} \cdot \lambda$$

În triunghiul dreptunghic format:

$$\operatorname{tg} \alpha \cong \alpha = \frac{d_{k+1} - d_k}{i} \quad \alpha \cdot i = d_{k+1} - d_k$$

$$\alpha \cdot i = \frac{1}{2 \cdot n} \cdot \left(k \cdot \lambda + \frac{3}{2} \cdot \lambda - k \cdot \lambda - \frac{\lambda}{2}\right) \quad \alpha \cdot i = \frac{\lambda}{2 \cdot n}$$

deci: 
$$i = \frac{\lambda}{2 \cdot n \cdot \alpha}$$

**Observație:** În muchea prisme, avem un minim căci  $d_k = 0$  și  $\delta = -\frac{\lambda}{2}$ .

Pe lungimea  $l$  a penei avem o succesiune de  $N = \frac{l}{i}$  franje luminoase începând cu un minim situat în muchea penei.

### 6.8.2. Pana de aer

Pana de aer se obține cu ajutorul a două plăci subțiri de sticlă având un capăt în contact iar celălalt sprijinit pe un obiect de diametru mic.

O pană de aer se poate obține în general de la orice suprafețe plane ale unor obiecte optice ce formează un unghi diedru mic. Mersul razelor de lumină provenite de la o sursă punctiformă monocromatică în incidență  $i \neq 0$ , pe placa de sticlă superioară se vede în figura de mai jos:

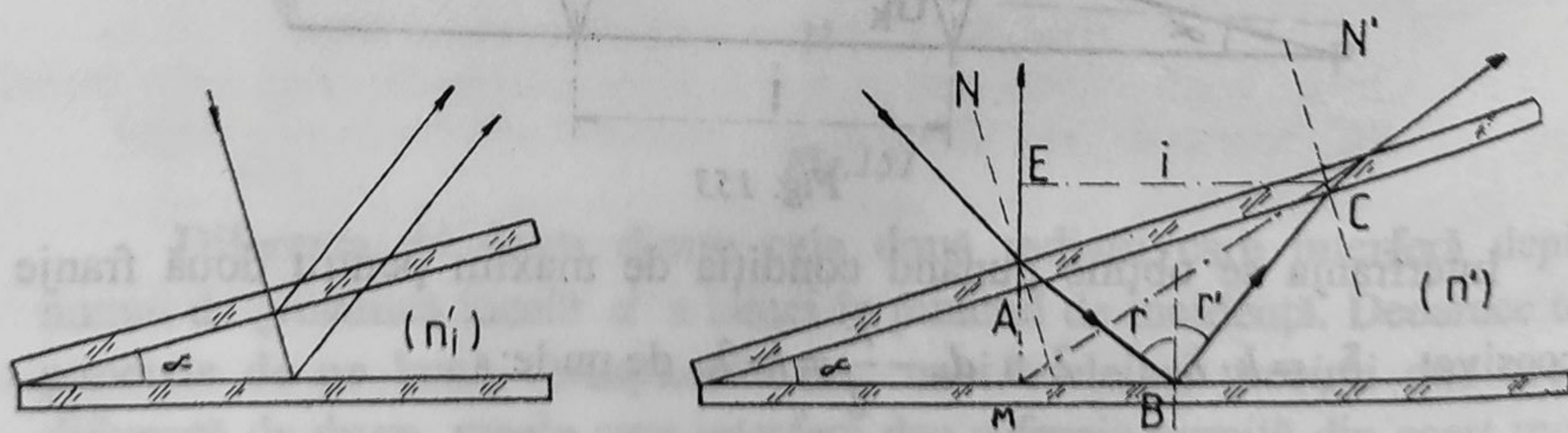


Fig. 154



Calculul diferenței de drum se face în mod asemănător ca la pana optică. Deosebirea constă în adăugarea lui  $\frac{\lambda}{2}$  la reflexie pe placa inferioară. În placa de sticlă de deasupra se neglijează refracția în prima față de intrare, dar se ține cont de refracție la ieșirea razei în mediul optic de indice  $n'$  după cum urmează:

$$n \cdot \sin i = n' \cdot \sin r \quad AB \cdot \cos r = d$$

$$(AB + BC) \cdot n' = 2 \cdot n' \cdot AD \cdot \cos i = 2 \cdot n \cdot d \cdot \sin i \cdot \frac{\sin r}{\cos r}$$

$$n \cdot AE = 2 \cdot n \cdot AD \cdot \cos r = 2 \cdot n \cdot d \cdot \sin i \cdot \frac{\sin r}{\cos r}$$

Diferența de drum dintre razele 1 și 2 este:

$$\delta = \frac{2 \cdot n' \cdot d}{\cos r} - \frac{2 \cdot n' \cdot d \cdot \sin^2 r}{\cos r} + \frac{\lambda}{2} \cong 2 \cdot n' \cdot d \cdot \cos r + \frac{\lambda}{2}$$

pentru incidență normală  $i = 0^\circ$  și  $r = 0^\circ$   $\cos r = 1$  avem:

$$\delta = 2 \cdot n' \cdot d + \frac{\lambda}{2}$$

Condiția pentru maximele de interferență localizate pe suprafața lamei de sticlă de la baza penei:

$$\delta = k \cdot \lambda \quad k \cdot \lambda = 2 \cdot n' \cdot d + \frac{\lambda}{2}$$

$$\left(k - \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda = 2 \cdot n' \cdot d_k \quad d_k = \frac{1}{2 \cdot n'} \cdot \frac{2 \cdot k - 1}{2} \cdot \lambda$$

$$d_k = (2 \cdot k - 1) \cdot \frac{\lambda}{4 \cdot n'}$$

$$\alpha \cdot i = d_{k+1} - d_k = [(2 \cdot k + 1) - (2 \cdot k - 1)] \cdot \frac{\lambda}{4 \cdot n'}$$

$$\alpha \cdot i = \frac{\lambda}{2 \cdot n'} \quad i = \frac{\lambda}{2 \cdot n' \cdot \alpha}$$

**Observație:** În muchea prisme avem tot un minim căci dacă luăm  $d = 0$  numărul de franje este egal cu  $N = \frac{l}{i}$  succesiunea de minime și maxime începând cu un minim în origine.



### 6.8.3. Inelele lui Newton

O lentilă plan - convexă așezată pe o suprafață plană, formează o pană de aer după cum se vede în figura următoare.

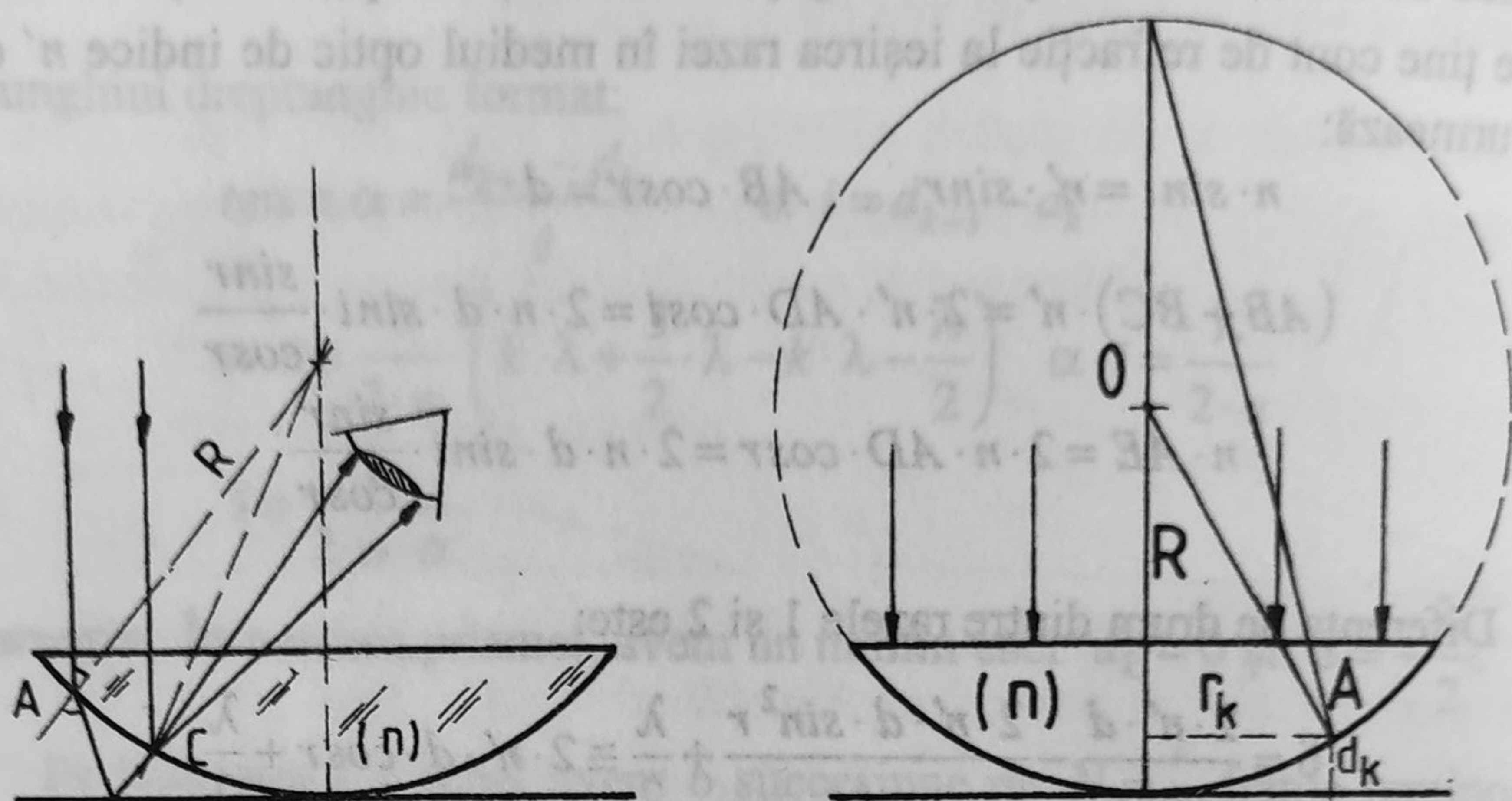


Fig. 155

Lumina monocromatică provenită de la o sursă întinsă (de la care razele sosesc paralel) cade perpendicular pe suprafața plană, intră fără deviație în lentilă, iar când iese în aerul ce înconjoară lentila, se produce o refracție urmată de o reflexie pe suprafața plană și razele intră din nou în lentila unde se suprapune peste raza de lumină incidentă.

Între cele două raze apare o diferență de drum care produce interferența, iar ochiul vede franja de interferență localizată pe suprafața curbată a lentilei.

Figura de interferență este formată dintr-o mulțime de cercuri concentrice luminoase separate de cercuri întunecoase cu grosimi din ce în ce mai mici către margini. Diferența de drum optic pentru razele apropiate care interferă se calculează ca la pana de aer:

$$\delta = 2 \cdot n' \cdot d \cdot \cos r + \frac{\lambda}{2}$$

La o incidență normală  $r = 0^\circ$   $\cos r = 1$   $\delta = 2 \cdot n' \cdot d + \frac{\lambda}{2}$  sau deoarece:

$$n' \cong 1 \quad \delta_k = k \cdot \lambda \quad \text{deci} \quad k \cdot \lambda = 2 \cdot d_k + \frac{\lambda}{2} \quad d_k = \frac{2 \cdot k - 1}{4} \cdot \lambda$$

În figura de mai sus, aplicând teorema înălțimii în triunghiul ABC se obține:

$$r_k^2 = d_k \cdot (2 \cdot R - d_k) \quad \text{sau} \quad r_k^2 \cong 2 \cdot R \cdot d_k$$

deoarece  $d_k$  este neglijabil de mic.



Avem deci:

$$d_k^2 \approx 0 \quad d_k = \frac{r_k^2}{2 \cdot R}$$

iar pentru maximul următor:

$$d_{k+1} = \frac{r_{k+1}^2}{2 \cdot R}$$

Putem determina raza lentilei prin măsurarea razei unui inel luminos, dacă se cunoaște lungimea de undă și ordinul inelului:

$$(2 \cdot k - 1) \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{r_k^2}{2 \cdot R} \quad \text{deci} \quad R = \frac{r_k^2}{(2 \cdot k - 1) \cdot \frac{\lambda}{2}}$$

Ochiul vede minimul la acea grosime  $d_k$  pentru care:

$$\delta = (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \delta = 2 \cdot d_k + \frac{\lambda}{2}$$

din cele doua expresii rezultă:

$$(2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2} = 2 \cdot d_k + \frac{\lambda}{2} \quad \text{deci} \quad d_k = k \cdot \lambda$$

dar

$$d_k = k \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \frac{r_k^2}{2 \cdot R} = k \cdot \frac{\lambda}{2} \quad R = \frac{r_k^2}{k \cdot \lambda}$$

Cunoscând că  $R$  este o mărime dată pentru o lentilă putem scrie:

$$r_k = \sqrt{R \cdot k \cdot \lambda} \quad r_k = A \cdot \sqrt{k}$$

Din această expresie se vede că raza inelului  $k$  este direct proporțională cu  $k$ , adică razele inelelor nu sunt echidistante, distanța dintre franje se micșorează pe măsură ce crește ordinul franjei luminoase, acestea părând că se apropie una de alta, așa cum se și observă experimental.

În figura de mai jos se prezintă tabloul de interferență corespunzător:



Fig. 156



În centrul figuri de interferență obținută prin reflexie inelele au un minim deoarece  $\Delta\varphi = \pi$ . La figura obținută prin trecerea luminii prin cele două piese optice (prin transmisie) în centru apare un maxim datorat variației suplimentare a fazei cu încă un  $\pi$  deci  $\Delta\varphi = 2 \cdot \pi$ .

O aplicație interesantă a inelelor lui Newton, este determinarea lungimii de undă a radiației monocromatice prin măsurarea razelor a două inele (franje luminoase) de ordine oarecare  $k$  și  $k'$  cu  $k' > k$ .

Inelul de ordin  $k$  corespunde unei grosimi a penei de aer:

$$d_k = \frac{r_k^2}{2 \cdot R}$$

Inelul de ordinul  $k'$  corespunde unei grosimi:

$$d_{k'} = \frac{r_{k'}^2}{2 \cdot R}$$

$$d_{k'} - d_k = \frac{1}{2 \cdot R} \cdot (r_{k'}^2 - r_k^2) \quad \text{unde} \quad d_k = \frac{2 \cdot k - 1}{4} \cdot \lambda \quad \text{și} \quad d_{k'} = \frac{2 \cdot k' - 1}{4} \cdot \lambda$$

$$d_{k'} - d_k = \frac{2 \cdot k' - 1 - 2 \cdot k + 1}{4} \cdot \lambda = (k' - k) \cdot \lambda$$

$$(k' - k) \cdot \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2 \cdot R} \cdot (r_{k'}^2 - r_k^2) \quad \lambda = \frac{1}{R} \cdot \frac{r_{k'}^2 - r_k^2}{k' - k}$$

**Observație:** Dacă iluminarea penei, a lentilei plan-convexe și a lamelei subțiri cu fețe plan-paralele, se face în lumina albă și dacă straturile de aer sau lichid sunt foarte subțiri, apar franje de interferență având culorile spectrului luminii albe, deoarece maximum de interferență pentru diferite lungimi de undă se obține la diferite grosimi sau la înclinări diferite.

Maximele diferitelor culori sunt deplasate și ajung să se suprapună către margini unde dispar. De asemenea dacă stratul de aer este prea gros fenomenul de interferență nu se mai observă.

## 6.9. Interferența în lumină albă

Lumina albă fiind un amestec de o infinitate de frecvențe, condiția de maxim de interferență se realizează în dispozitivul de tip Young, pentru unghiuri de împrăștiere diferite a razelor coerente care ajung pe ecran.

Acest fapt face ca maximele de interferență ale diferitelor culori să fie puțin deplasate unul față de altul, franjele aparând colorate.



- culoarea roșie este mai depărtată de franja centrală în timp ce culoarea violet este mai aproape, pentru orice ordin  $k$ ;
- pe măsură ce ordinul  $k$  este mai mare, culorile din franjă sunt mai depărtate, apar grupate distinct;
- maximul roșu de ordin  $k$  se suprapune peste maximul violet de ordinul  $k + 1$ . De asemenea și celelalte maxime încep să se suprapună și pe ecran apare o iluminare continuă în care franjele nu se mai disting.

În figura următoare se prezintă spectrul franjelor de interferență până la ordinul la care încep să se suprapună franjele roșu cu violet.

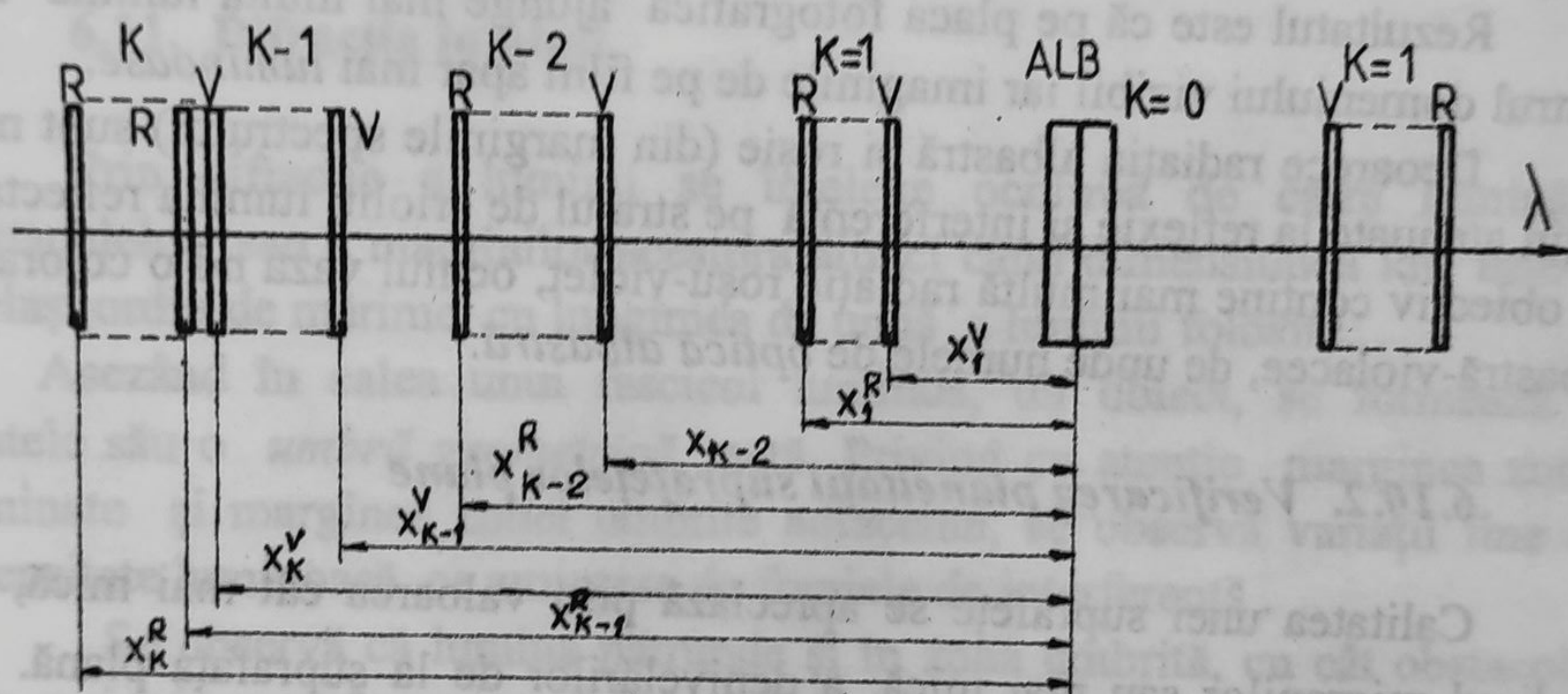


Fig. 157

Deteminarea ordinului de interferență  $k$  la care se suprapun cele două franje colorate considerate, se face punând condiția de suprapunere a abscisei lor:

$$x_{k+1}^V = x_k^R \quad x_k^R = \frac{k \cdot f_2}{l} \cdot \lambda^R \quad x_{k+1}^V = (k+1) \cdot \frac{f_2}{l} \cdot \lambda^V$$

$$k \cdot \frac{f_2}{l} \cdot \lambda^R = (k+1) \cdot \frac{f_2}{l} \cdot \lambda^V \quad k \cdot \lambda^R = (k+1) \cdot \lambda^V$$

$$k = \frac{\lambda^V}{\lambda^R - \lambda^V}$$



## 6.10. Aplicații ale fenomenelor de interferență

### 6.10.1. Optica albastră

Prin depunerea unui strat subțire de substanță transparentă (criolit) cu grosime egală cu  $\frac{\lambda}{2}$  pe suprafața lentilelor aparatelor de fotografiat se elimină fenomenul de reflexie a luminii galben-verde pentru care ochiul are sensibilitate maximă, de către obiectiv.

Se realizează astfel un minim de interferență pentru radiația cu  $\lambda_v = 550 \text{ nm}$  la reflexie, deci radiația care străbate obiectivul este întărită ceea ce este conform cu legea conservării energiei pe care am prezentat-o la începutul capitolului.

Rezultatul este că pe placa fotografică ajunge mai multă lumină din centrul domeniului vizibil iar imaginile de pe film apar mai *luminoase*.

Deoarece radiația albastră și roșie (din marginile spectrului) sunt mai puțin atenuate la reflexie și interferență pe stratul de criolit, lumina reflectată de obiectiv conține mai multă radiație roșu-violet, ochiul văzând o colorație albastră-violacee, de unde numele de *optică albastră*.

### 6.10.2. Verificarea planeității suprafețelor plane

Calitatea unei suprafețe se apreciază prin valoarea cât mai mică, de ordinul micronilor sau mai mică, a denivelărilor de la suprafața plană. La sticlele optic-plane aceste denivelări trebuie să fie mai mici de:

$$\frac{\lambda}{10} \text{ sau chiar } \frac{\lambda}{100}.$$

Se poate verifica gradul de planeitate cu ajutorul interferenței produse în lama de aer formată de o placă subțire de sticlă având fețele perfect plane și paralele cu suprafața studiată.

La iradierea cu lumină monocromatică, apare o succesiune de franje luminoase paralele între ele și paralele cu muchea de intersecție a celor două fețe dacă suprafața studiată este perfect plană. La o denivelare existentă, apar franje de egală grosime sub forma unor linii curbe, figura de interferență amintind de curbele de nivel din topografie după cum se vede în figura de mai jos.



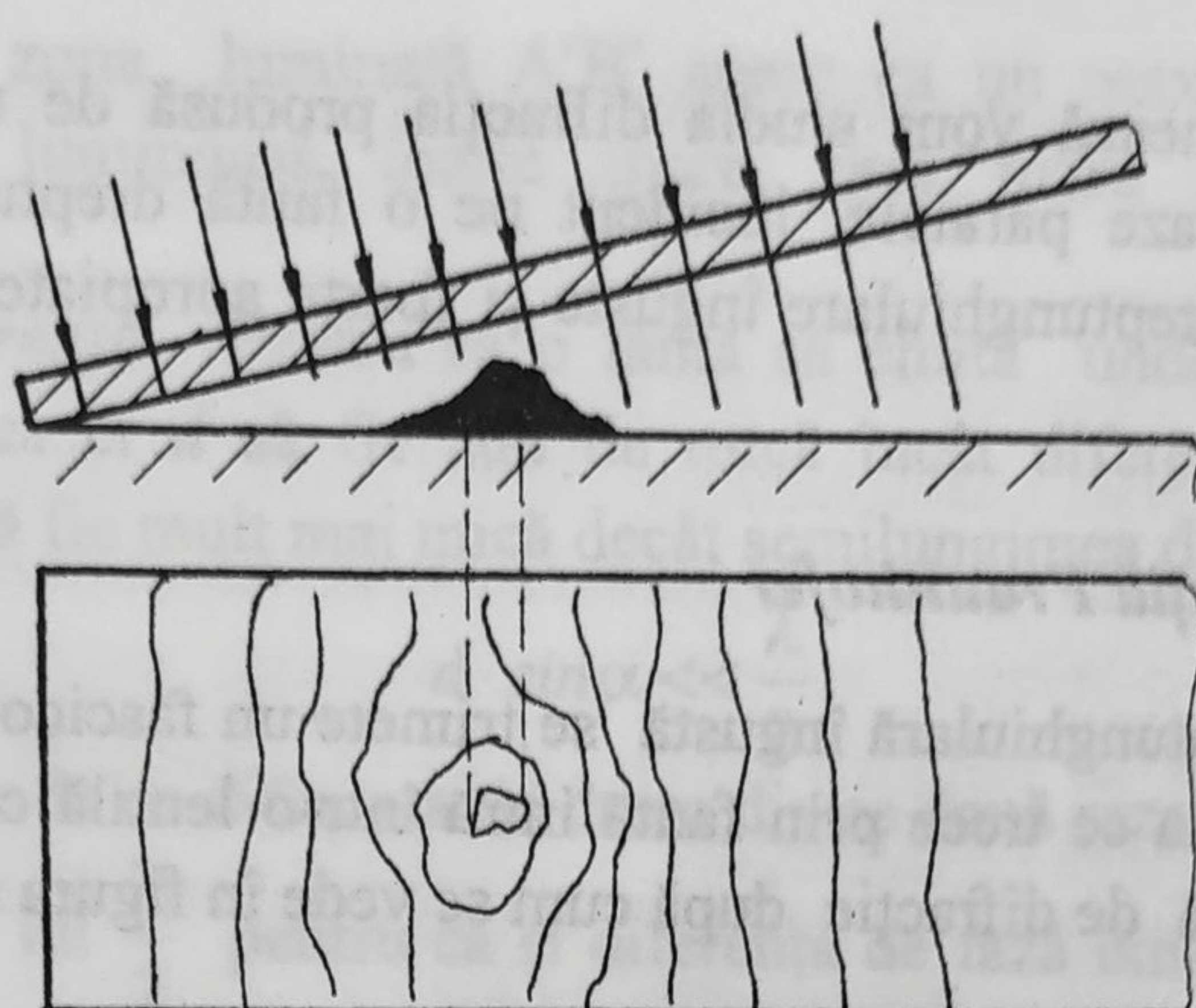


Fig. 158

### 6.11. Difrakția luminii

Prin difracție a luminii se înțelege ocolirea de către lumină a obstacolelor sau a marginilor acestora atunci când dimensiunea lor este de același ordin de mărime cu lungimea de undă a luminii folosite.

Asezând în calea unui fascicol luminos, un obiect, se formează în spatele său o *umbră geometrică* netă. Privind cu atenție marginea zonei luminate și marginea zonei umbrite adiacente, se observă variații fine de intensitate luminoasă ce amintesc de franjele de interferență.

Se observă că lumina pătrunde și în zona umbrită, cu cât obstacolul este mai mic cu atât zona umbrită pierde caracterul net pe porțiuni mai largi și devine difuză.

La trecerea luminii printr-o deschidere circulară, sau dreptunghiulară largă, pe ecranul apropiat se vede o imagine cu contur clar și uniform luminată.

Prin micșorarea deschiderii, imaginea de pe ecran nu mai este bine conturată, se lățește mult penumbra și apar franje de interferență, atunci când deschiderea ajunge de același ordin de mărime cu lungimea de undă a luminii folosite.

Explicația fenomenului de difracție se bazează pe principiul lui Huygens conform căruia:

*Fiecare punct de pe suprafața de undă ce ajunge la deschidere, constituie o sursă de unde elementare coerente care interferă, iar înfășurătoarea tuturor acestor unde elementare constituie noua suprafață de undă.*



În cele ce urmează vom studia difracția produsă de un fascicol de lumină format din raze paralele, incident pe o fantă dreptunghiulară sau pe o rețea de fante dreptunghiulare înguste și foarte apropiate, numită *rețea de difracție*.

### 6.11.1. Difracția Fraunhofer

Pe o fantă dreptunghiulară îngustă se trimete un fascicol de lumină cu raze paralele. Lumina ce trece prin fantă intră într-o lentilă care creează pe ecran o imagine clară de difracție după cum se vede în figura următoare:

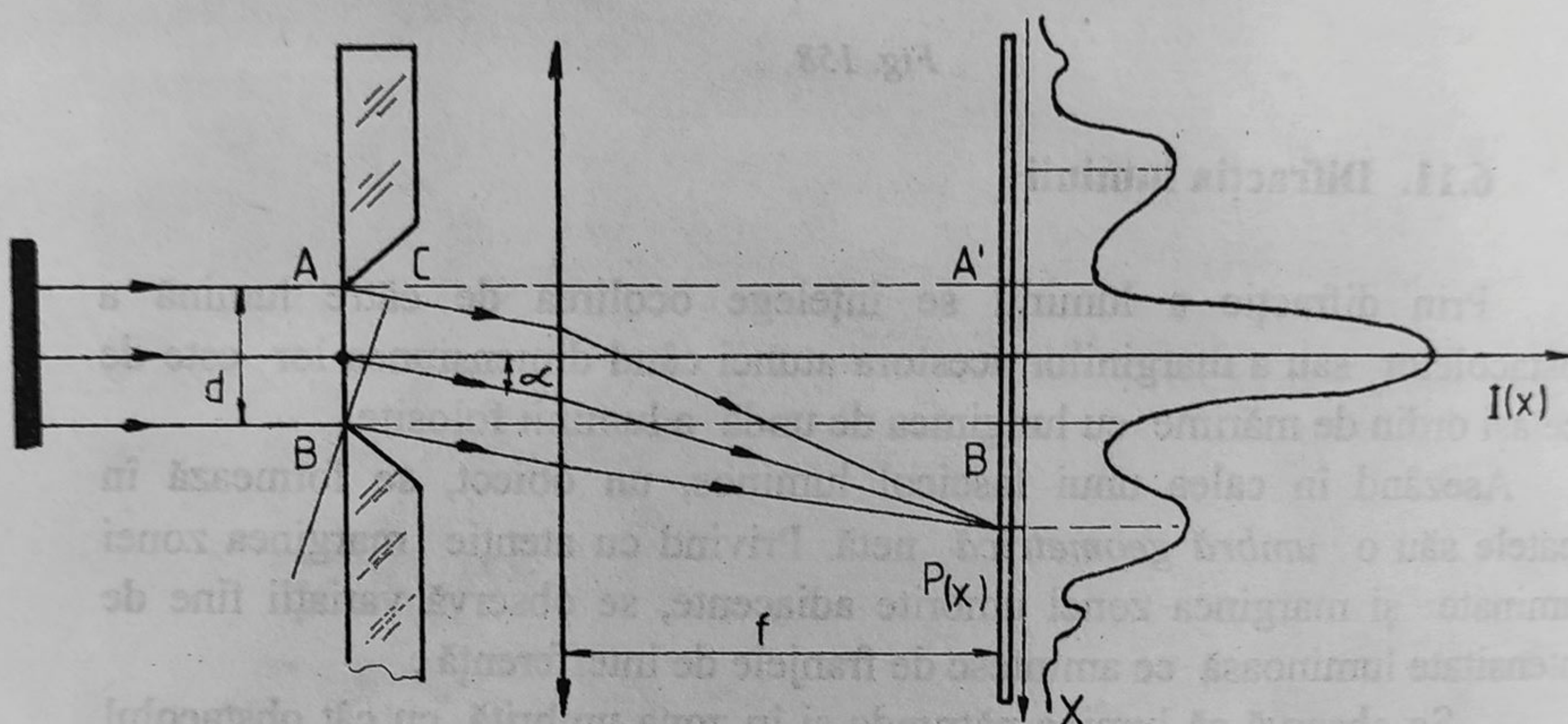


Fig. 159

Fanta poate fi considerată ca o infinitate de surse elementare coerente ce oscilează în fază, de la care pleacă unde circulare în toate direcțiile.

Într-un punct P de pe ecran, de coordonată  $x$ , ajung raze de la toate sursele elementare cu diferența de drum dintre razele extreme:

$$AC = d \cdot \sin \alpha$$

În funcție de mărimea diferenței de drum  $\delta = AC$ , putem avea în punctul P un maxim sau un minim de interferență. În zona umbră putem avea și benzi luminoase separate de benzi întunecate numite *franje de difracție*.

Cu cât deschiderea  $d$  este mai mică cu atât figura de difracție este mai evidentă: imaginea fantei se lățește treptat, iar în zona de umbră geometrică apar maxime și minime de interferență cu intensitate luminoasă descrescătoare.



Numai în zona luminată  $A'B'$  apare ca un maxim de interferență cu intensitatea luminoasă foarte mare, mai mare decât intensitățile franjelor laterale.

**Condiția de coerență** - Pentru ca o fantă să emită unde coerente în fază, trebuie ca lățimea ei  $d$  să fie atât de mică încât diferența de drum între razele extreme să fie mult mai mică decât semilungimea de undă:

$$d \cdot \sin \alpha \ll \frac{\lambda}{2}$$

Se înțelege de ce diferența de drum dintre două raze emise de o fantă să fie inferioară lui  $\frac{\lambda}{2}$  pentru că și diferența de fază dintre cele două unde elementare (datorită înclinării față de axa optică la plecarea din fantă), trebuie să fie aproximativ zero, deci să avem unde în fază.

În acest fel defazajul care va apare se va datora numai diferenței de drumuri străbătute de cele două raze separat.

**Unghi de deschidere** - este unghiul format de razele extreme ce părăsesc fanta și ajung pe ecran. Se exprimă în funcție de unghiul  $\alpha$  dintre o rază extremă cu axa optică, deci este egal cu  $2 \cdot \alpha$ .

În condițiile existenței unor fante înguste, unghiul de deschidere crește apreciabil. Două fante apropiate ca în dispozitivul Young, emit unde coerente și pot interfera numai dacă unghiurile de deschidere sunt mari deci dacă fantele sunt suficient de înguste.

### 6.11.2. Rețeaua de difracție

**Rețeaua de difracție** este o mulțime de fante dreptunghiulare, foarte înguste, paralele, echidistante și foarte apropiate între ele.

În figura de mai jos se arată la scară mărită, dispunerea fantelor mecanice și parametrii caracteristici:

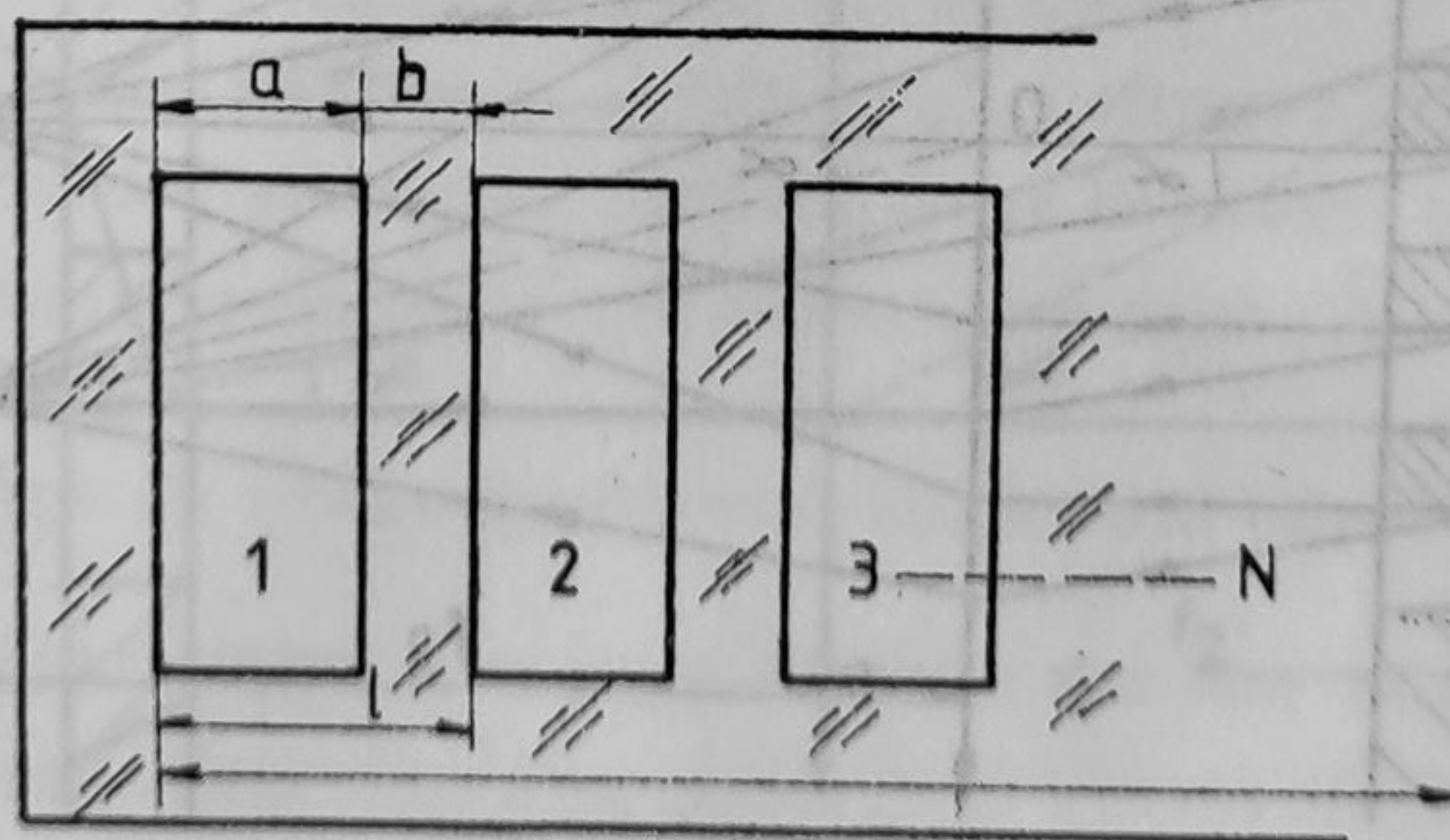


Fig. 160



O asemenea rețea se poate obține prin: fotografierea și apoi micșorarea imaginii sale, prin zgâriere cu un diamant a plăcii de sticlă. Porțiunile tăiate constituie partea opacă (porțiunea *b* pe figură), iar spațiul dintre două zgârieturi constituie fanta transparentă (porțiunea *a* pe figură).

Constanta rețelei este distanța dintre două fante alăturate. Notând cu *l* constanta rețelei și cu *N* numărul total de trăsături de-a lungul lungimii *L*, găsim o relație simplă între constanta rețelei și numărul de trăsături pe unitatea de lungime (notat cu *n*) ce constituie o caracteristică de calitate pentru o rețea de difracție:

$$n = \frac{N}{L} \quad \text{unde} \quad l = \frac{L}{N}$$

O rețea de difracție este cu atât mai bună cu cât *n* este mai mare, deoarece franjele de interferență de ordin superior capătă o intensitate mai mare.

Rețelele bune au 4000 - 5000 de trăsături pe mm și permit obținerea unor spectre cu un număr mare de franje de interferență. Rețelele didactice au între 50 și 1000 trăsături pe mm de aceea nu permit decât obținerea câtorva franje de interferență atât în lumină albă cât și în lumină monocromatică.

Pentru a obține clar pe un ecran E, imaginea franjelor de interferență obținută prin difracția undelor de către o rețea, se pune o lentilă convergentă în spatele rețelei de difracție după cum se arată mai jos:

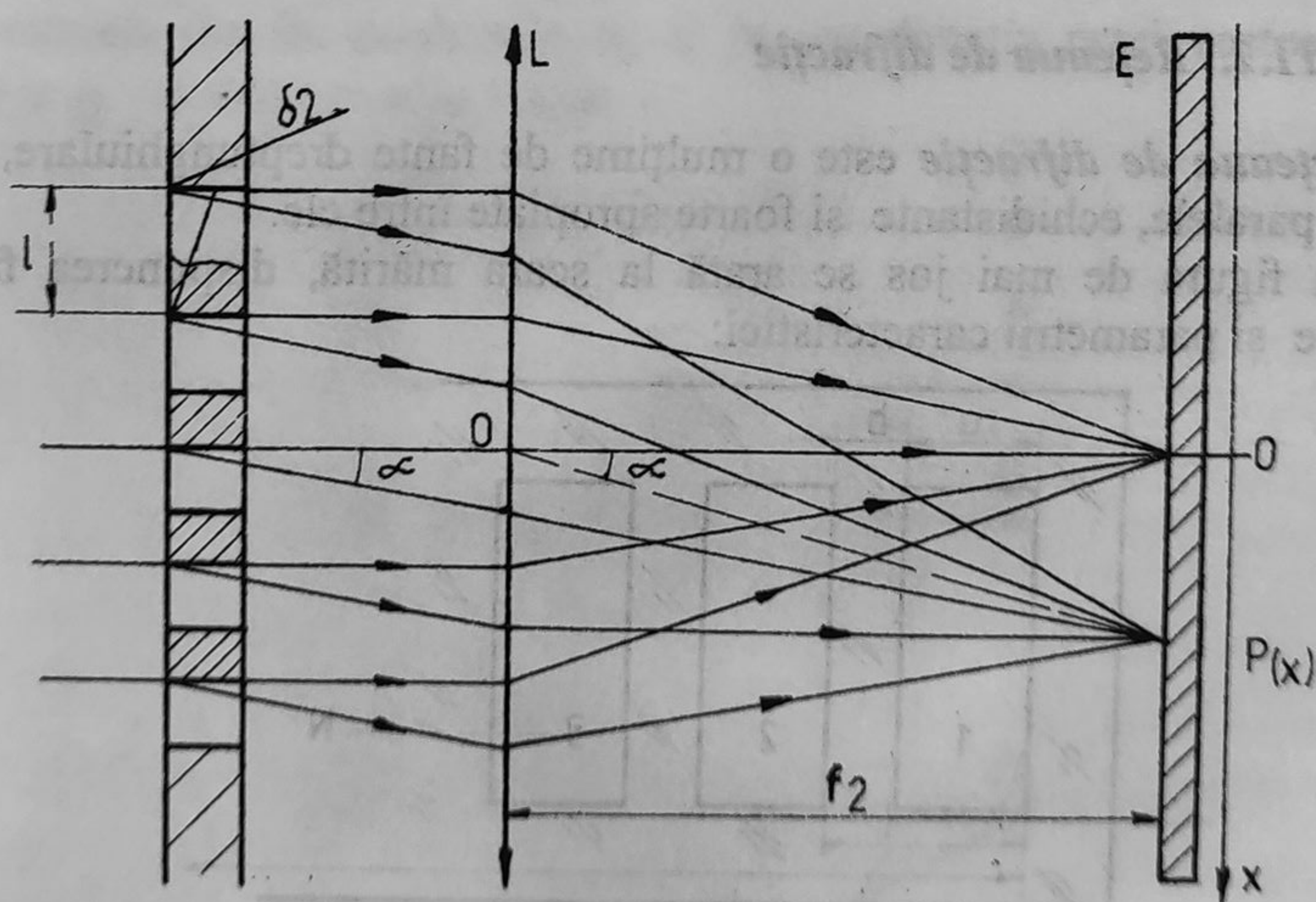


Fig. 161



Dacă fascicolul incident este paralel, între două raze apropiate apare o diferență de drum:  $\delta_L = l \cdot \sin \alpha$

Apar maxime în punctele  $P(x)$  pentru care:

$$\delta_L = k \cdot \lambda \quad \text{deci} \quad k \cdot \lambda = l \cdot \sin \alpha$$

Pentru unghiuri mici și lentilă  $L$  apropiată de ecran la o distanță egală cu distanța focală se poate aproxima  $\alpha' \equiv \alpha$

și atunci:  $\sin \alpha \equiv \operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{f_2} \quad \text{deci} \quad x \equiv f_2 \cdot \sin \alpha$

Condiția de maxim devine:

$$x_k = \frac{k \cdot f_2}{l} \cdot \lambda$$

Prezintă interes determinarea lungimii de undă a unei radiații monocromatice atunci când se pot măsura distanțele  $x$  și  $f$  cu ajutorul relației dedusă mai sus.

$$\lambda = \frac{l}{k \cdot f_2} \cdot x_k \quad \text{sau} \quad \lambda = \frac{x_k}{n \cdot k \cdot f_2}$$

**Observație:** Dacă lumina paralelă incidentă face un unghi de incidență  $i \neq 0$  cu axa optică a sistemului, apar două diferențe de drum  $\delta_1$  și  $\delta_2$  între razele ce se difractă prin două fante apropiate, acestea se adună sau se scad după cum razele difractate ajung de aceeași parte a ecranului cu sursa sau de cealaltă parte.

Pentru a deduce diferența de drum totală dintre două raze, vom lua pentru început cazul când sursa se află de aceeași parte a ecranului ca și franja de interferență, față de axa optică după cum se arată mai jos:

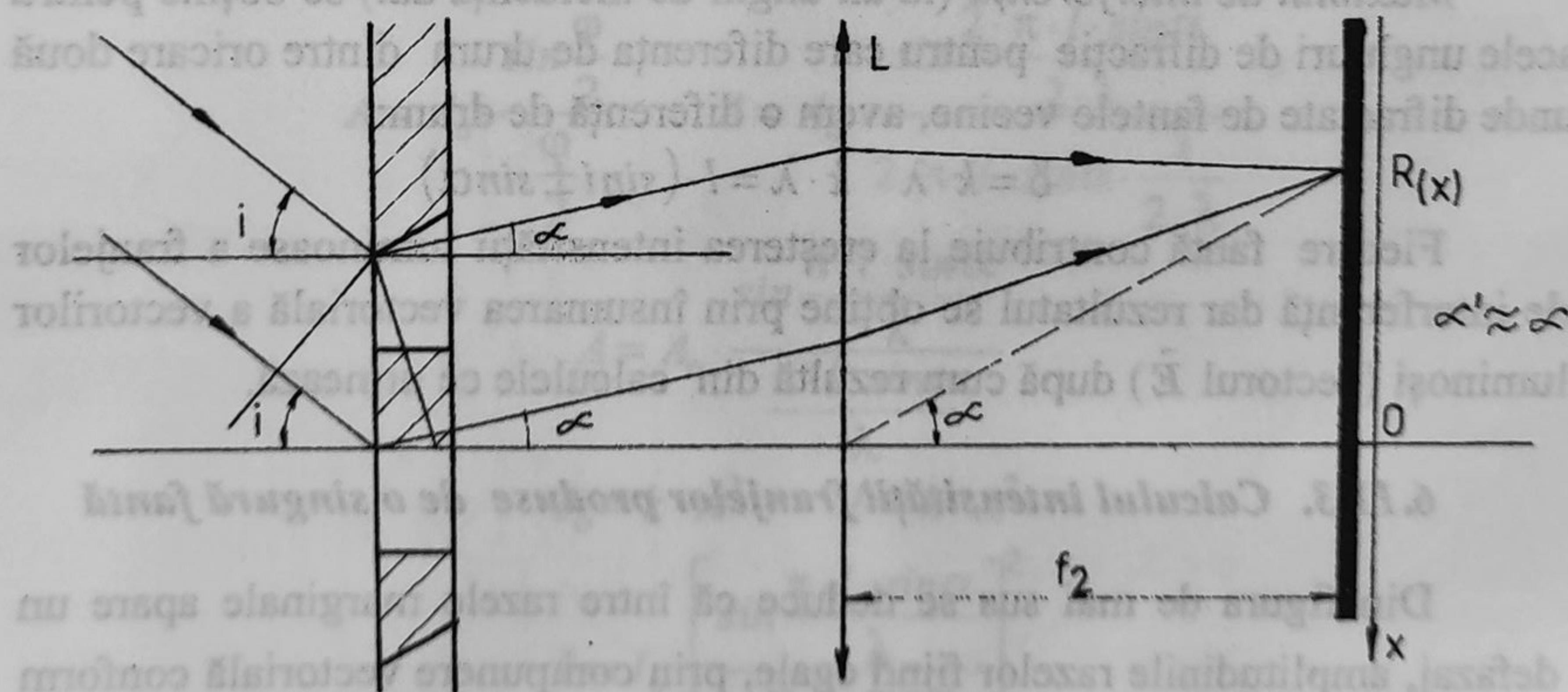


Fig. 162



$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = l \cdot \sin i + l \cdot \sin \alpha \quad \delta = l \cdot (\sin i + \sin \alpha)$$

Dacă am fi considerat punctul P' de pe ecran situat în partea inferioară a ecranului, deci de cealaltă parte față de axa optică, după cum se poate vedea în figura următoare:

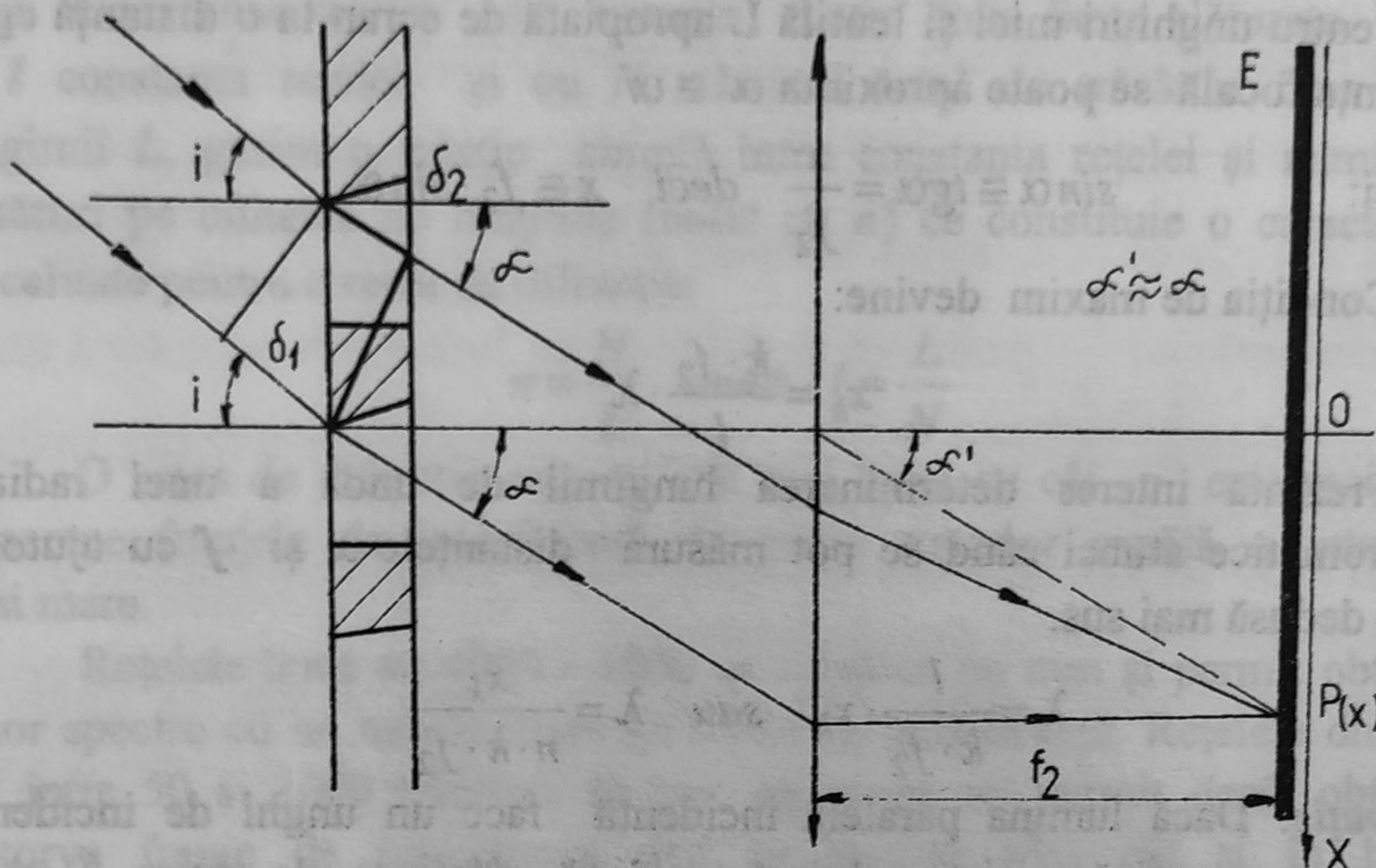


Fig. 163

$$\delta = \delta_1 - \delta_2 = l \cdot \sin i - l \cdot \sin \alpha \quad \delta = l \cdot (\sin i - \sin \alpha)$$

În general vom lua în considerare ambele situații punând semnul dublu în suma diferenței de drumuri:

$$\delta = l \cdot (\sin i \pm \sin \alpha)$$

**Maximul de interferență** (la un unghi de incidență dat) se obține pentru acele unghiuri de difracție pentru care diferența de drum dintre oricare două unde difractate de fantele vecine, avem o diferență de drum:

$$\delta = k \cdot \lambda \quad k \cdot \lambda = l \cdot (\sin i \pm \sin \alpha)$$

Fiecare fantă contribuie la creșterea intensității luminoase a franjelor de interferență dar rezultatul se obține prin însumarea vectorială a vectorilor luminoși (vectorul  $\vec{E}$ ) după cum rezultă din calculele ce urmează.

### 6.11.3. Calculul intensității franjelor produse de o singură fantă

Din figura de mai sus se deduce că între razele marginale apare un defazaj, amplitudinile razelor fiind egale, prin compunere vectorială conform regulii poligonului, se obțin următoarele relații, evidente pe desenul următor.



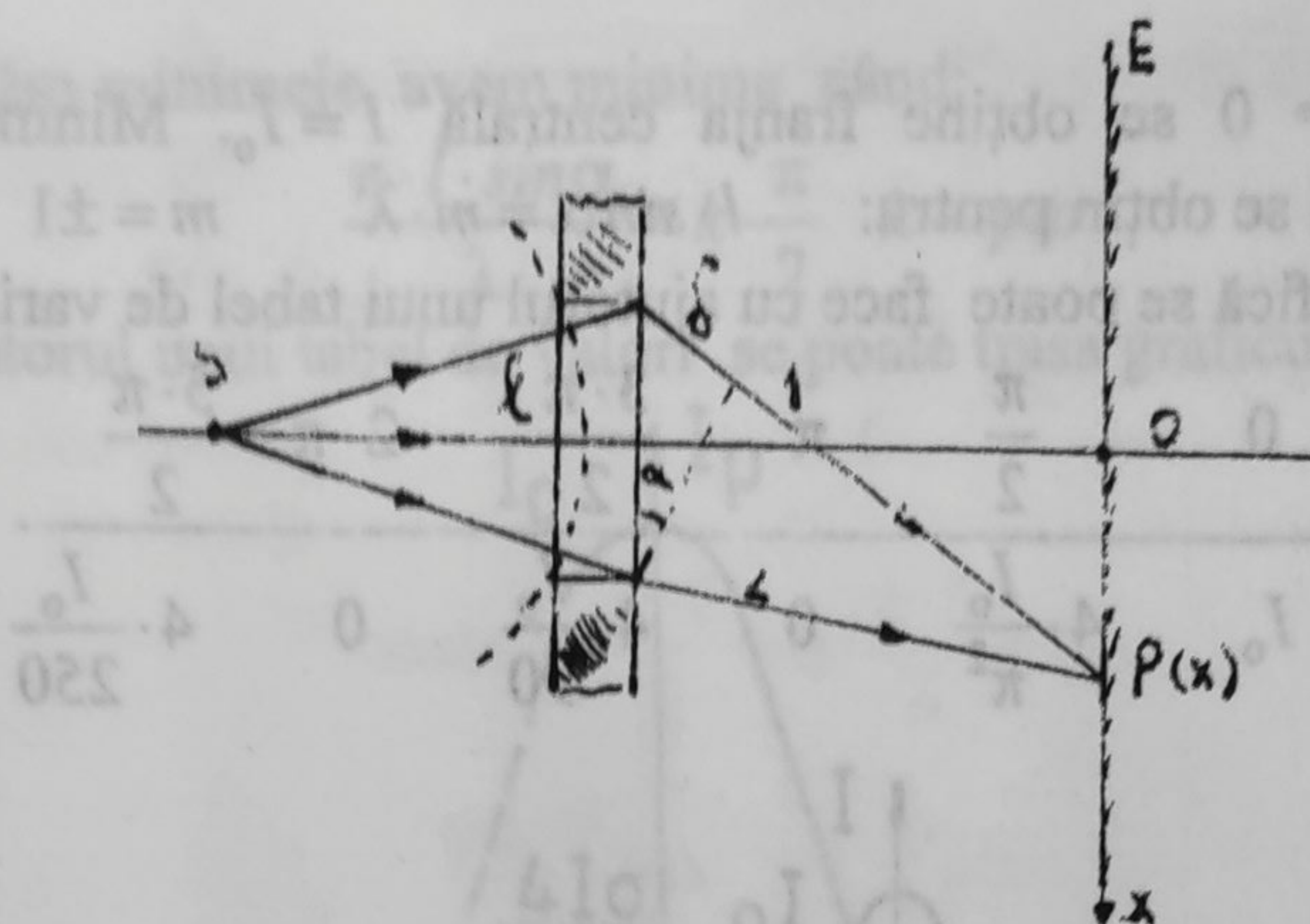


Fig. 164

Dacă  $\delta = l \cdot \sin \alpha$  apare un defazaj între razele marginale 1 și 2 egal cu:

$$\varphi = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \delta = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot l \cdot \sin \alpha$$

Cele două amplitudini sunt egale dar defazate cu  $\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi \cdot \delta}{\lambda}$  și se compun vectorial conform *regulii conturului poligonal*, adică se pot înscrie într-un cerc de rază R.

Se aplică o proprietate geometrică în acest cerc:

$$A_0 = R \cdot \frac{\varphi}{2} \quad R = \frac{A_0}{\frac{\varphi}{2}} \quad \text{dar} \quad A = R \cdot \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{A_0}{\frac{\varphi}{2}} \cdot \sin \frac{\varphi}{2}$$

deci:

$$A = A_0 \cdot \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}} \quad A = A_0 \cdot \frac{\sin \frac{2 \cdot \pi \cdot l \cdot \sin \alpha}{2 \cdot \lambda}}{2 \cdot \pi \cdot l \cdot \sin \alpha \cdot \frac{1}{2 \cdot \lambda}}$$

$$A = A_0 \cdot \frac{\sin \frac{\pi \cdot l \cdot \sin \alpha}{\lambda}}{\frac{\pi \cdot l \cdot \sin \alpha}{\lambda}}$$

$$I_0 = k \cdot A^2 \quad I = k \cdot A^2$$

$$I = I_0 \cdot \left[ \frac{\sin \frac{\pi \cdot l \cdot \sin \alpha}{\lambda}}{\frac{\pi \cdot l \cdot \sin \alpha}{\lambda}} \right]^2$$



Pentru  $\alpha = 0$  se obține franja centrală  $I = I_0$ . Minimele laterale  
 maximului central se obțin pentru:  $l \cdot \sin \alpha = m \cdot \lambda$   $m = \pm 1$

Reprezentarea grafică se poate face cu ajutorul unui tabel de variație:

$\frac{\varphi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3 \cdot \pi}{2}$	$2 \cdot \pi$	$\frac{5 \cdot \pi}{2}$
$I$	$I_0$	$4 \cdot \frac{I_0}{\pi^2}$	0	$4 \cdot \frac{I_0}{90}$	0	$4 \cdot \frac{I_0}{250}$

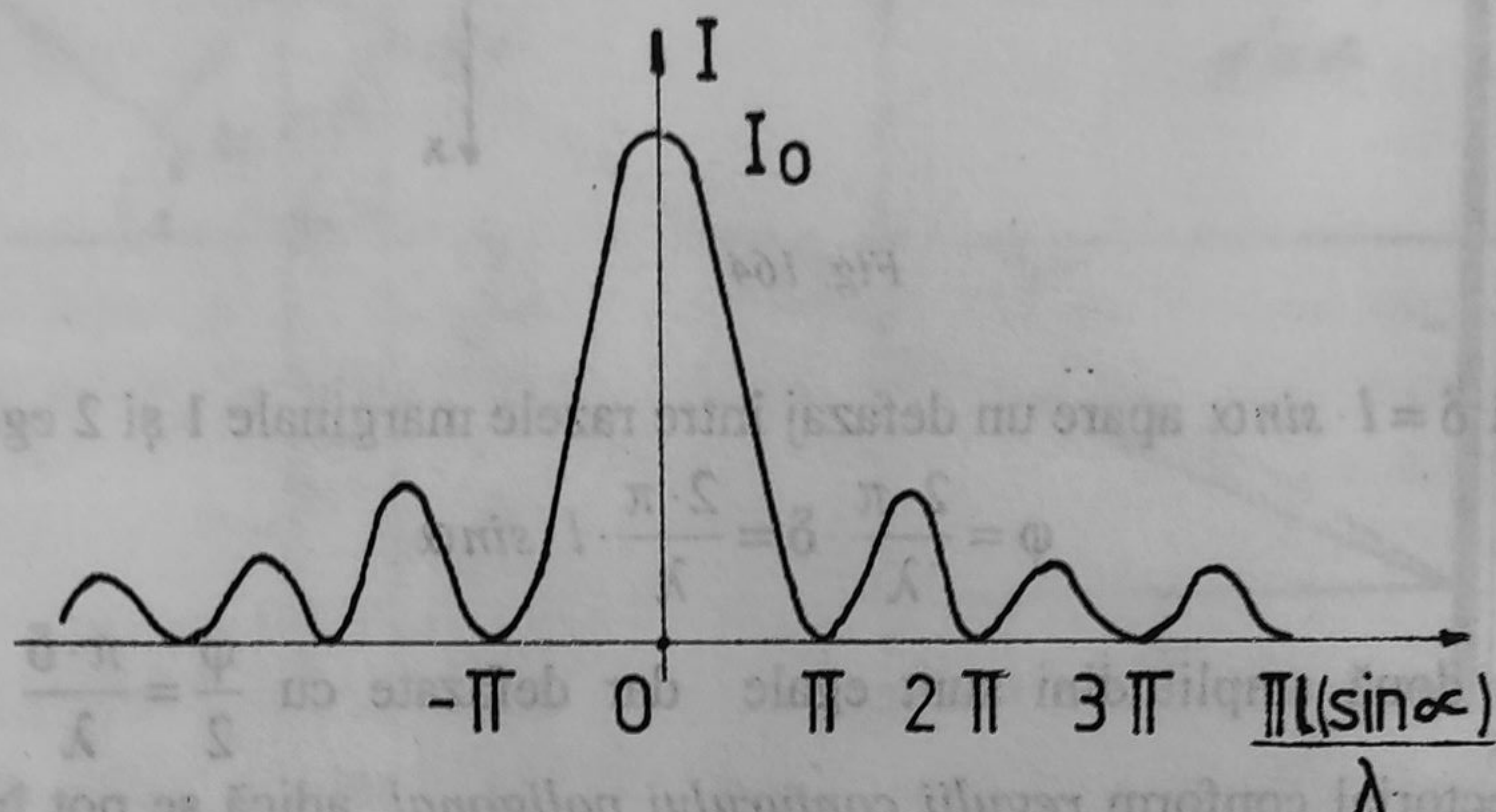


Fig. 165

Putem realiza și o reprezentare grafică în funcție de  $\sin \alpha$  astfel:

$$I = I(\sin \alpha)$$

Calculăm maximele, avem maxime când:

$$\frac{\pi \cdot l \cdot \sin \alpha}{\lambda} = k \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{deci când: } \sin \alpha = \frac{k \cdot \lambda}{2 \cdot l} \quad k - \text{impar}$$

Pentru  $k$  impar:

$$k=1 \quad \sin \alpha = \frac{\lambda}{2 \cdot l} \quad I = I_0 \cdot \left[ \frac{\sin \left( \frac{\pi \cdot l \cdot \lambda}{2 \cdot \lambda \cdot l} \right)}{\frac{\pi \cdot l \cdot \lambda}{2 \cdot \lambda \cdot l}} \right]^2$$

$$k=3 \quad \sin \alpha = \frac{3 \cdot \lambda}{2 \cdot l} \quad I = I_0 \cdot \left[ \frac{\sin \left( \frac{\pi \cdot l \cdot 3 \cdot \lambda}{2 \cdot \lambda \cdot l} \right)}{\frac{\pi \cdot l \cdot 3 \cdot \lambda}{2 \cdot \lambda \cdot l}} \right]^2$$

Pentru  $k > 3$  intensitățile maximelor scad foarte mult.



Calculăm minimele, avem minime când:

$$\frac{\pi \cdot l \cdot \sin \alpha}{\lambda} = k \cdot \frac{\pi}{2} \quad k - \text{par}$$

Cu ajutorul unui tabel de valori se poate trasa graficul următor:

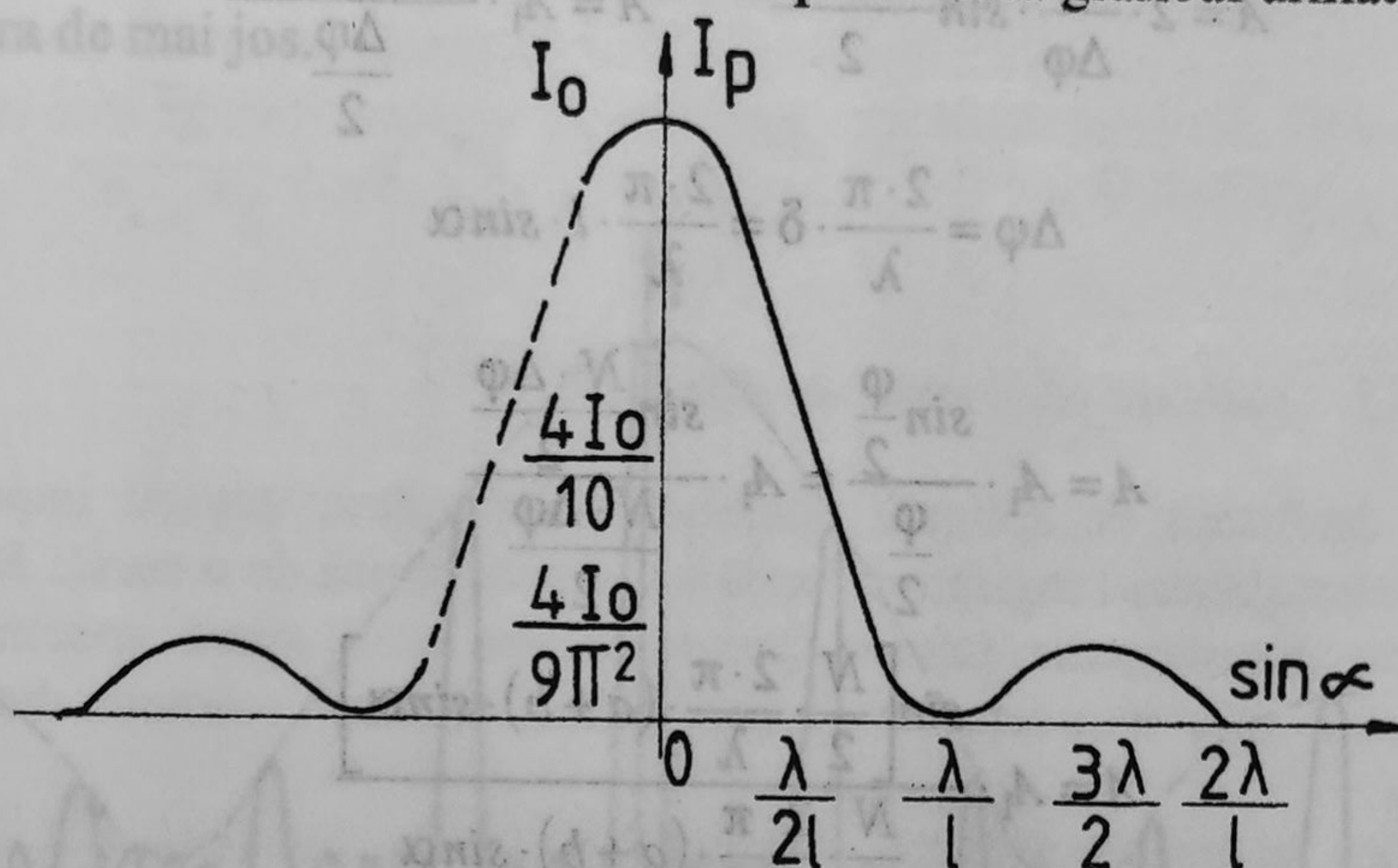


Fig. 166

#### 6.11.4. Calculul intensității franjelor produse de $N$ fante (difracția Fraunhofer)

Fiecare vector luminos din cele  $N$  fante este defazat față de cel precedent cu  $\frac{\varphi}{2}$ . Prin compunere după regula conturului poligonal desenat în figura de mai jos, se obține vectorul rezultat  $\vec{A}$  care subîntinde la centrul cercului în care se înscrie poligonul, un unghi total  $N\varphi$ :

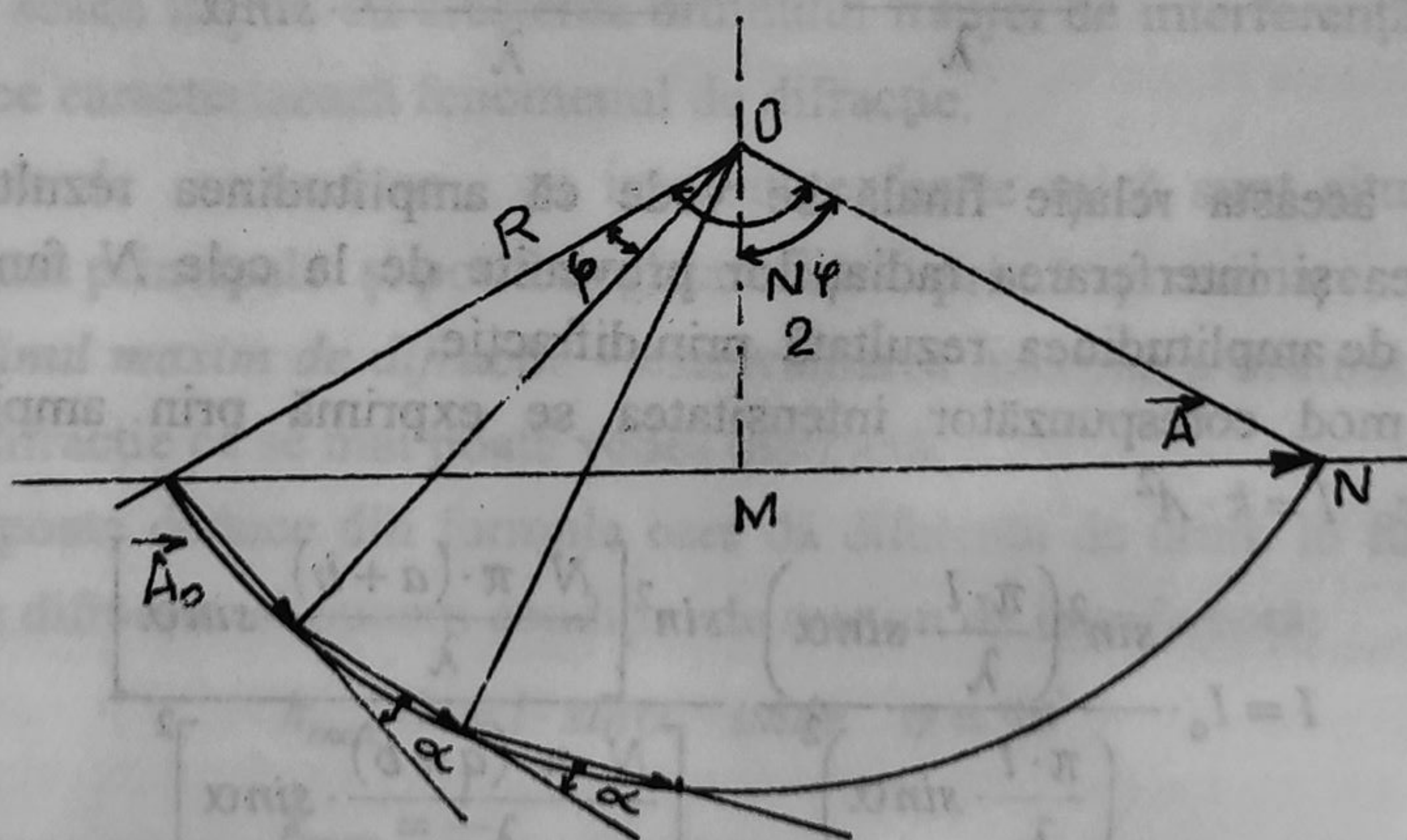


Fig. 167



$$A = 2 \cdot R \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \quad A_1 = R \cdot \Delta\varphi \quad R = \frac{A_1}{\Delta\varphi}$$

$$A = 2 \cdot \frac{A_1}{\Delta\varphi} \cdot \sin \frac{N \cdot \Delta\varphi}{2} \quad A = A_1 \cdot \frac{\sin \frac{N \cdot \Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \delta = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot l \cdot \sin \alpha$$

$$A = A_1 \cdot \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}} = A_1 \cdot \frac{\sin \frac{N \cdot \Delta\varphi}{2}}{\frac{N \cdot \Delta\varphi}{2}}$$

$$A = A_1 \cdot \frac{\sin \left[ \frac{N}{2} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot (a+b) \cdot \sin \alpha \right]}{\frac{N}{2} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot (a+b) \cdot \sin \alpha}$$

$$A = A_1 \cdot \frac{\sin \left[ \frac{N \cdot \pi \cdot (a+b)}{\lambda} \cdot \sin \alpha \right]}{\frac{N \cdot \pi \cdot (a+b)}{\lambda} \cdot \sin \alpha}$$

$$A = A_0 \cdot \frac{\sin \left( \frac{\pi \cdot l \cdot \sin \alpha}{\lambda} \right)}{\frac{\pi \cdot l \cdot \sin \alpha}{\lambda}} \cdot \frac{\sin \left[ \frac{N \cdot \pi \cdot (a+b)}{\lambda} \cdot \sin \alpha \right]}{\frac{N \cdot \pi \cdot (a+b)}{\lambda} \cdot \sin \alpha}$$

Din aceasta relație finală se vede că amplitudinea rezultată prin compunerea și interferarea radiațiilor provenite de la cele  $N$  fante este modulată de amplitudinea rezultată prin difracție.

În mod corespunzător intensitatea se exprimă prin amplitudinea resultantă:  $I = k \cdot A^2$

$$I = I_0 \cdot \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi \cdot l \cdot \sin \alpha}{\lambda} \right)}{\left( \frac{\pi \cdot l \cdot \sin \alpha}{\lambda} \right)^2} \cdot \frac{\sin^2 \left[ \frac{N \cdot \pi \cdot (a+b)}{\lambda} \cdot \sin \alpha \right]}{\left[ \frac{N \cdot \pi \cdot (a+b)}{\lambda} \cdot \sin \alpha \right]^2}$$



Tot cu ajutorul unui tabel de valori putem reprezenta grafic dependența intensității de termenul:

$$\frac{N \cdot \pi \cdot (a+b)}{\lambda} \cdot \sin \alpha$$

ca în figura de mai jos.

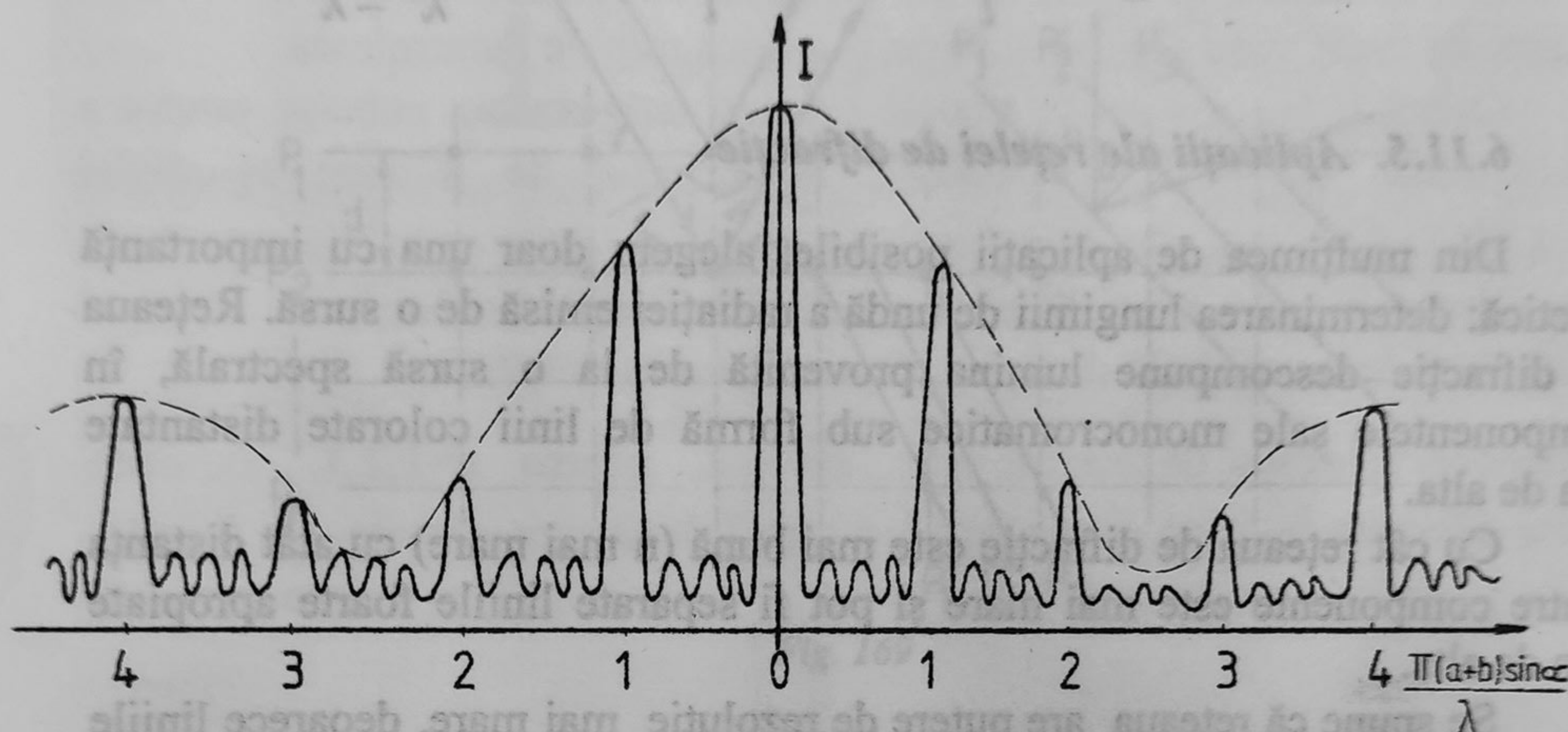


Fig. 168

**Observație:** Funcția reprezentată grafic, dă intensitatea luminoasă pentru maximele principale și maximele secundare.

*Maximele principale* - luminoase, sunt foarte înguste, de intensitate mare care scade treptat cu creșterea ordinului franjei de interferență după o anvelopă ce caracterizează fenomenul de difracție.

*Maximele secundare* - cu intensitate foarte mică sunt situate între două maxime principale și pot fi neglijate într-o primă aproximare.

*Ordinul maxim de difracție* - este valoarea maximă a ordinului acelei franje de difracție ce se mai poate vedea distinctă.

Se poate deduce din formula care dă diferența de drum în funcție de unghiul de difracție și punem condiția de maxim de interferență:

$$k_{\max} \cdot \lambda = l \cdot \sin \alpha \quad \text{unde} \quad \alpha = 90^\circ$$

Se obține:

$$k_{\max} = \frac{l}{\lambda}$$



Într-un mod asemănător se determină și ordinul maxim de difracție pentru lumina albă punând condiția de suprapunere a absciselor culorii roșie de ordin  $k$  cu culoarea violet de ordin  $k+1$  ca în relațiile următoare:

$$x_{k+1}^V = x_k^R \text{ unde: } x_{k+1}^V = (k+1) \cdot \frac{f_2}{l} \cdot \lambda^V \text{ și } x_k^R = k \cdot \frac{f_2}{l} \cdot \lambda^R$$

$$\text{egalând: } (k_M + 1) \cdot \frac{f_2}{l} \cdot \lambda^V = k_M \cdot \frac{f_2}{l} \cdot \lambda^R \quad k_M = \frac{\lambda^V}{\lambda^R - \lambda^V}$$

### 6.11.5. Aplicații ale rețelei de difracție

Din mulțimea de aplicații posibile, alegem doar una cu importanță practică: determinarea lungimii de undă a radiației emise de o sursă. Rețeaua de difracție descompune lumina provenită de la o sursă spectrală, în componentele sale monocromatice sub formă de linii colorate distanțate una de alta.

Cu cât rețeaua de difracție este mai bună (n mai mare) cu atât distanța dintre componente este mai mare și pot fi separate liniile foarte apropiate una de alta.

Se spune că rețeaua are putere de rezoluție mai mare, deoarece liniile apropiate au și lungimi de undă apropiate cum este cazul radiației emise de o lampă spectrală cu natriu. Singurele linii emise sunt atât de apropiate încât nu pot fi văzute separat decât dacă utilizăm o bună rețea de difracție.

Pentru o radiație monocromatică dată se poate calcula lungimea de undă într-un mod simplu prin efectuarea unor măsurători de distanțe:

- distanța  $x_k$  a franjei de ordinul  $k$  de maximul central;
- distanța focală, care adesea este dată de fabricant;
- constanta rețelei  $n$ , valori ce se introduc în formulele de mai sus.

### 6.11.6. Difracția pe rețele polidimensionale

O rețea cristalină prezintă plane de simetrie internă formate din ioni rețelei, aranjați într-o formă geometrică regulată. Corpul format dintr-o singură rețea este un monocristal, dacă este format dintr-o mulțime de microcristale orientate haotic are structura policristalină.

Considerând o secțiune transversală într-o rețea cristalină putem pune în evidență planurile  $P_1, P_2, \dots$  după cum se arată în figura 169.

Vom lua în considerație difracția produsă de un fascicol de raze X (Rontgen) din raze paralele ce se reflectă pe două plane adiacente unde



spațiile dintre doi ioni ai rețelei cristaline constituie deschiderile unei rețele de difracție:

$$\delta_1 = d \cdot \sin i \quad \delta_2 = d \cdot \sin \alpha$$

unde  $d$  este distanța dintre două plane și este identică cu constanta rețelei.

Razele X au lungimea de undă de același ordin de mărime cu distanța dintre doi ioni ai unui material cu structură cristalină, sau policristalină.

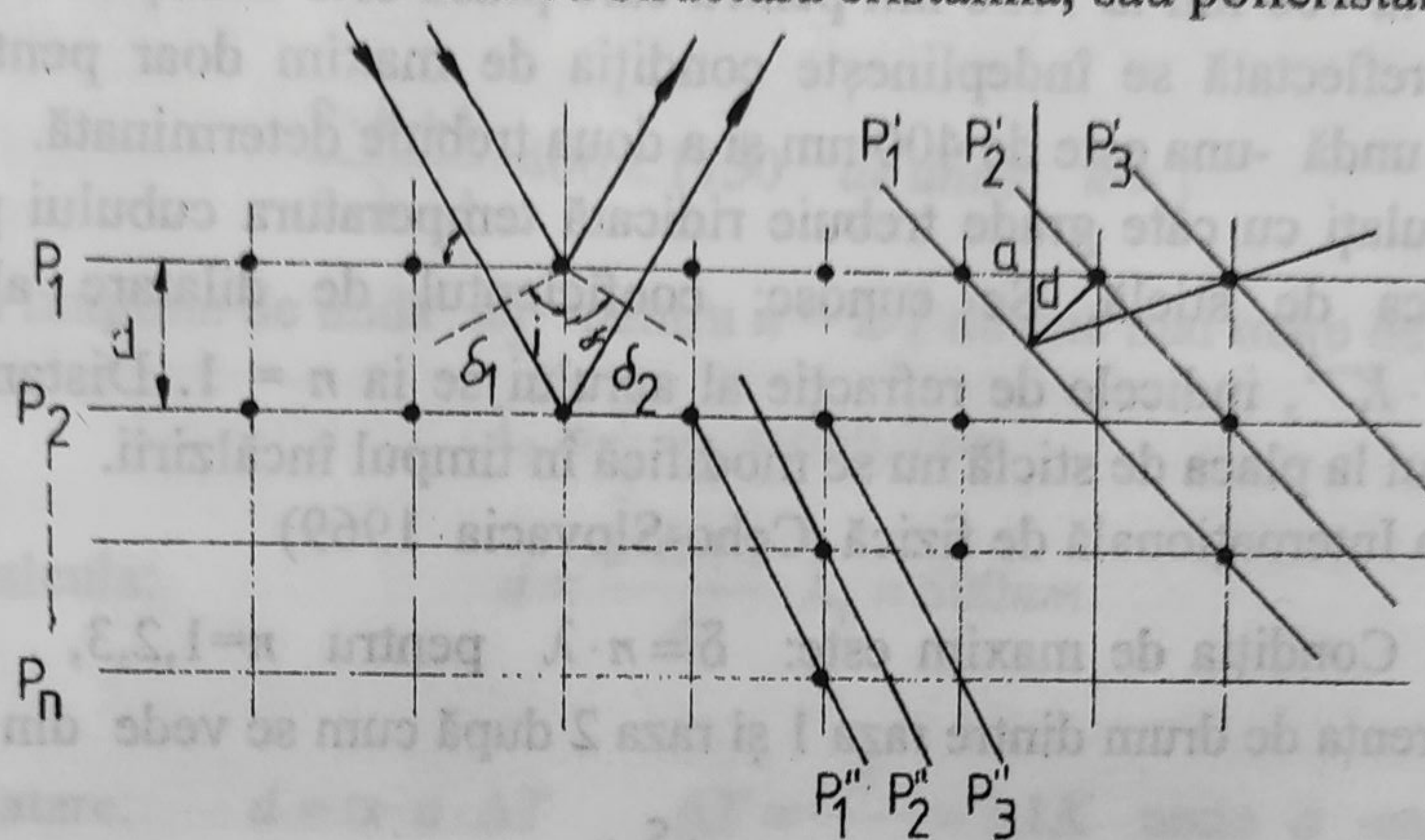


Fig. 169

Condiția de obținere a maximelor se impune aici unghiului de difracție:

$$d \cdot (\sin i + \sin \alpha) = k \cdot \lambda \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Maximul central se obține pentru  $k=0$  adică pentru  $i = \alpha$

$$\delta = 2 \cdot d \cdot \sin \alpha$$

Condiția de maxim de mai sus se mai numește și formula lui **Bragg**. Relația este adevărată numai dacă lungimea de undă a radiației utilizate satisface condiției:

$$\sin \alpha \leq 1 \quad \text{de unde} \quad \frac{k \cdot \lambda}{2 \cdot d} \leq 1 \quad k \cdot \lambda \leq 2 \cdot d$$

deci dacă:

$$\lambda \leq \frac{2 \cdot d}{R}$$

În particular pentru  $k = 1$  trebuie să avem  $\lambda = 2 \cdot d$  pentru primul maxim de difracție. Acest mod este potrivit pentru orice radiație și microparticulă având lungimea de undă apropiată de distanța dintre două plane de difracție.

Prin aceste experiențe s-a verificat ipoteza lui **Louis de Broglie** referitoare la lungimea de undă asociată microparticulelor prin difracția unui fascicol de electroni pe un monocristal de nichel.



### 6.11.7. Problemă rezolvată

1. Pe un cub de sticlă șlefuit a cărui muchie este de doi cm este așezată o placă de sticlă deasemenea șlefuită, astfel ca în spațiul dintre aceasta și cub apare un strat subțire de aer.

Dacă de sus se iluminează placa sub unghi drept cu radiații cu lungimi de undă de la 400 nm la 1150 nm pentru care placa este transparentă, atunci în lumina reflectată se îndeplinește condiția de maxim doar pentru două lungimi de undă -una este de 400 nm și a doua trebuie determinată.

Calculați cu câte grade trebuie ridicată temperatura cubului pentru a atinge placa de sticlă. Se cunosc: coeficientul de dilatare al sticlei  $\alpha = 8 \cdot 10^{-6} \cdot K^{-1}$ , indicele de refracție al aerului se ia  $n = 1$ . Distanța de la baza cubului la placa de sticlă nu se modifică în timpul încălzirii. (Olimpiada Internațională de fizică Ceho-Slovacia 1969)

**Rezolvare:** Condiția de maxim este:  $\delta = n \cdot \lambda$  pentru  $n=1,2,3, \dots$  unde  $\delta$  este diferența de drum dintre raza 1 și raza 2 după cum se vede din figură.

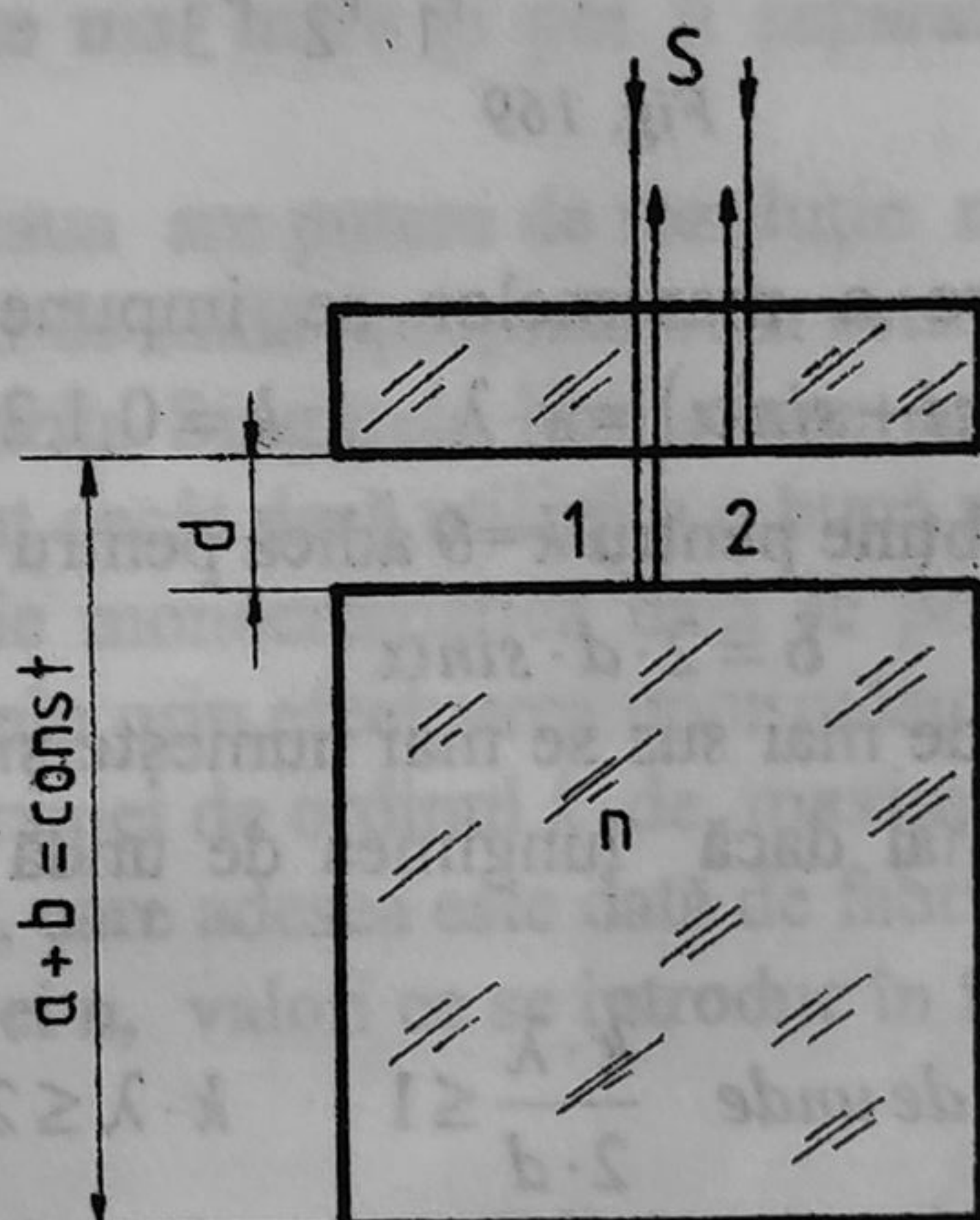


Fig. 170

Raza 1 se reflectă pe cub, parcurge distanța  $2 \cdot d$  plus o semilungime de undă de la reflexia pe un mediu mai dens, raza 2 se reflectă pe fața interioară a plăcii fără schimbare de fază.

$$\delta = 2 \cdot d + \frac{\lambda}{2} = n \cdot \lambda \quad 2 \cdot d = \frac{2 \cdot n - 1}{2} \cdot \lambda$$

Condiția este îndeplinită pentru o lungime de undă  $\lambda_1$  situată între 400 nm și 1150 nm:  $\lambda^V < \lambda_1 < \lambda^R$  pentru ordinul  $n = k+1$  unde  $k$  necunoscut.



Se formează sistemul:

$$2 \cdot d = \frac{2 \cdot k + 1}{2} \cdot \lambda_0 \quad 2 \cdot d = \frac{2 \cdot k - 1}{2} \cdot \lambda_1$$

$$\lambda_1 = \frac{2 \cdot k + 1}{2 \cdot k - 1} \cdot \lambda_0 \quad \text{cu condiția } \lambda_1 < 1150 \text{ nm}$$

$$\frac{2 \cdot k + 1}{2 \cdot k - 1} \cdot 400 < 1150 \quad \text{de unde } k > 1$$

O a treia lungime de undă  $\lambda_2$  pentru  $n = k - 1$  devine mai mare de 1150 nm.

$$\lambda_1 = \frac{5}{3} \cdot \lambda_0 = 666,7 \text{ nm}$$

Putem calcula:

$$d = \frac{2 \cdot k + 1}{4} \cdot \lambda_0 = 500 \text{ nm}$$

Prin dilatare:

$$d = \alpha \cdot a \cdot \Delta T \quad \Delta T = \frac{d}{\alpha \cdot a} = 3,1 \text{ K unde } a \text{ este muchea}$$

cubului.

## 6.12. Polarizarea luminii

Știm din capitolul precedent că undele electromagnetice sunt emise de către atomi prin fenomenul de dezexcitare și de asemenea că lungimea unui **tren de undă** este de ordinul a câtorva metri.

Acest tren de undă prezintă două plane importante pentru polarizare:

- planul de oscilație al vectorului luminos  $\vec{E}$ ;
- planul de oscilație al vectorului regenerator  $\vec{H}$ ;

plane ce se intersectează de-a lungul direcției de propagare sub un unghi diedru de  $90^\circ$ .

**Planul de polarizare** este un plan perpendicular pe planul format de direcția de propagare și direcția de oscilație a vectorului câmp electric  $\vec{E}$  numit plan de oscilație.

În acest plan de polarizare, vectorul câmp electric al unei raze de lumină naturală, este orientat după toate direcțiile din spațiu deoarece atomii emit în mod haotic, deci cu egală probabilitate **trenurile** de unde electromagnetice.



*Lumina total polarizată* este lumina formată din unde ce au un singur plan de oscilație pentru vectorul câmp electric  $\vec{E}$ .

*Lumina parțial polarizată* este lumina ce conține, cu mai mare probabilitate, un plan de oscilație pentru  $\vec{E}$  paralel cu o direcție dată și cu mai mică probabilitate alte plane de oscilație ce intersectează planul de polarizare de-a lungul unor direcții diferite.

Deoarece numărul vectorilor luminoși îndreptați după alte direcții este mai mic, aceasta situație se reprezintă convențional prin linii mai puține și mai scurte în mod proporțional cu numărul de plane de oscilație orientate după aceste direcții.

Polarizarea undelor luminoase se poate face prin *reflexie*, *refracție* pe medii dielectrice izotrope și prin birefringență în mediile *anizotrope*. În cele ce urmează se prezintă polarizarea prin reflexie și birefringență.

### 6.12.1. Polarizarea undelor prin reflexie

Fie o rază de lumină naturală, nepolarizată, ce cade sub un unghi de incidență  $i$  pe suprafața reflectantă a unei substanțe dielectrice, omogene și izotrope.

După reflexie se obține o rază parțial polarizată fapt ce se explică prin aceea că oscilațiile vectorului  $\vec{E}$  care în planul de polarizare sunt paralele cu planul de reflexie, sunt reflectate în totalitate fără pierderi.

Oscilațiile vectorului  $\vec{E}$  care ajung perpendicular pe suprafața reflectantă sunt absorbite într-o măsură mai mare sau mai mică, în funcție de unghiul de incidență.

În figura de mai jos se prezintă raza incidentă naturală cu vectorii  $\vec{E}$  desenați doar pe două direcții perpendiculare, dar se subînțelege că sunt orientați în toate direcțiile.

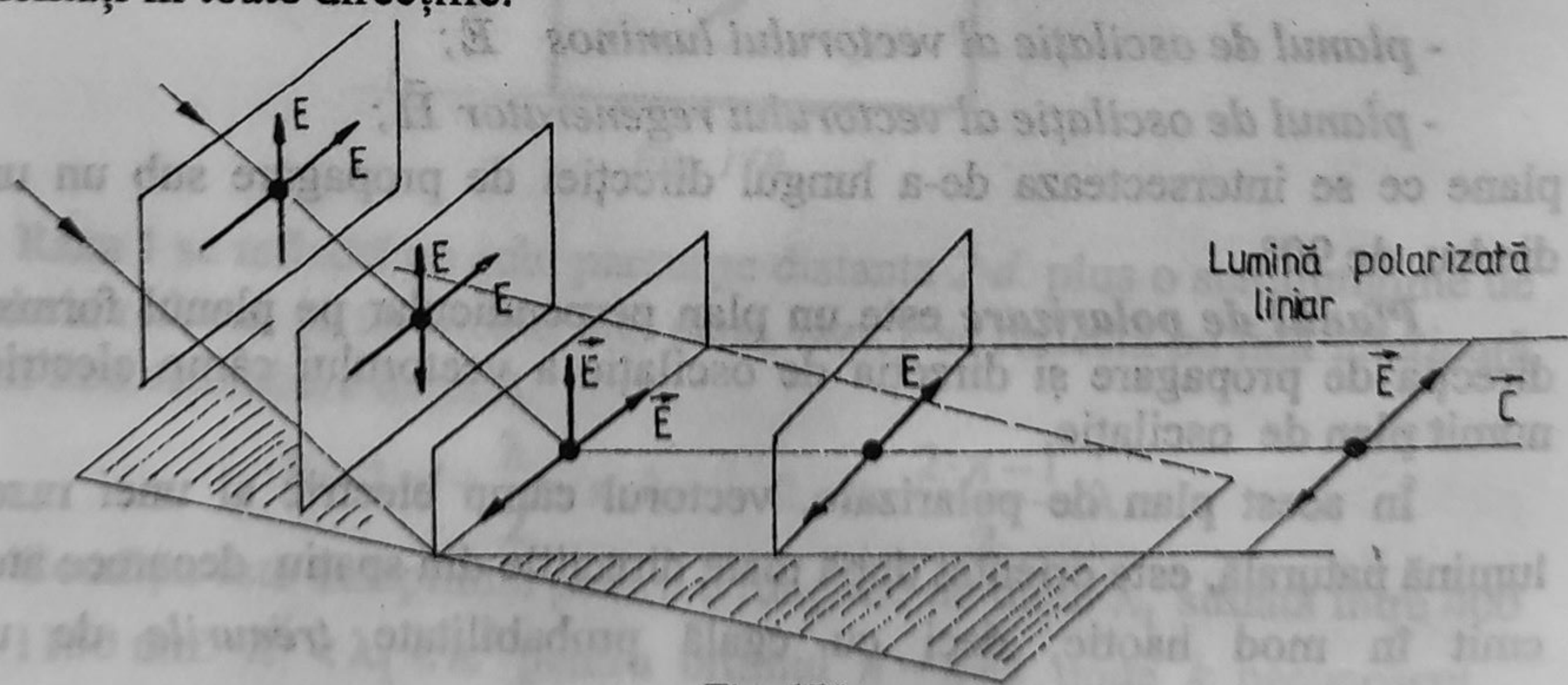


Fig. 171



După reflexie vom avea în mod predominant vectori cu direcția de oscilație paraleli cu planul reflectant.

Polarizarea totală a undei reflectante se obține doar într-un singur caz: când între unda reflectată și unda refractată de mediul dielectric se formează un unghi de  $\frac{\pi}{2}$ . Pentru un mediu dielectric cu indicele de refracție relativ dat, există un singur unghi de incidență ce asigură prin reflexie polarizarea totală, numit *unghi brewsterian*, după numele lui Brewster care a explicat acest fenomen:

$$n = \frac{\sin i_B}{\sin r} = \frac{\sin i_B}{\sin(90^\circ - i_B)} = \operatorname{tg} i_B \quad \text{deci} \quad \operatorname{tg} i_B = n \quad i_B = \operatorname{arctg} n$$

Pentru sticla cu  $n = 1,5$  se obține  $i = 56^\circ$ , pentru alte unghiuri de incidență  $i \neq i_B$  se obțin unde reflectate parțial polarizate.

Două oglinzi dielectrice la care incidența razelor de lumină se face sub unghiul *brewster*, constituie un dispozitiv de analiză (*polarizor-analizor*), deoarece produce lumină total polarizată cu care se analizează comportarea diferitelor soluții transparente ale unor substanțe care rotesc planul de polarizare. Prima oglindă, produce raze polarizate liniar (total) și se numește *polarizor* iar a doua oglindă analizează poziția planului de oscilație după trecerea prin soluție, al undei și este numită *analizor*. În figură se arată dispunerea lor în spațiu.

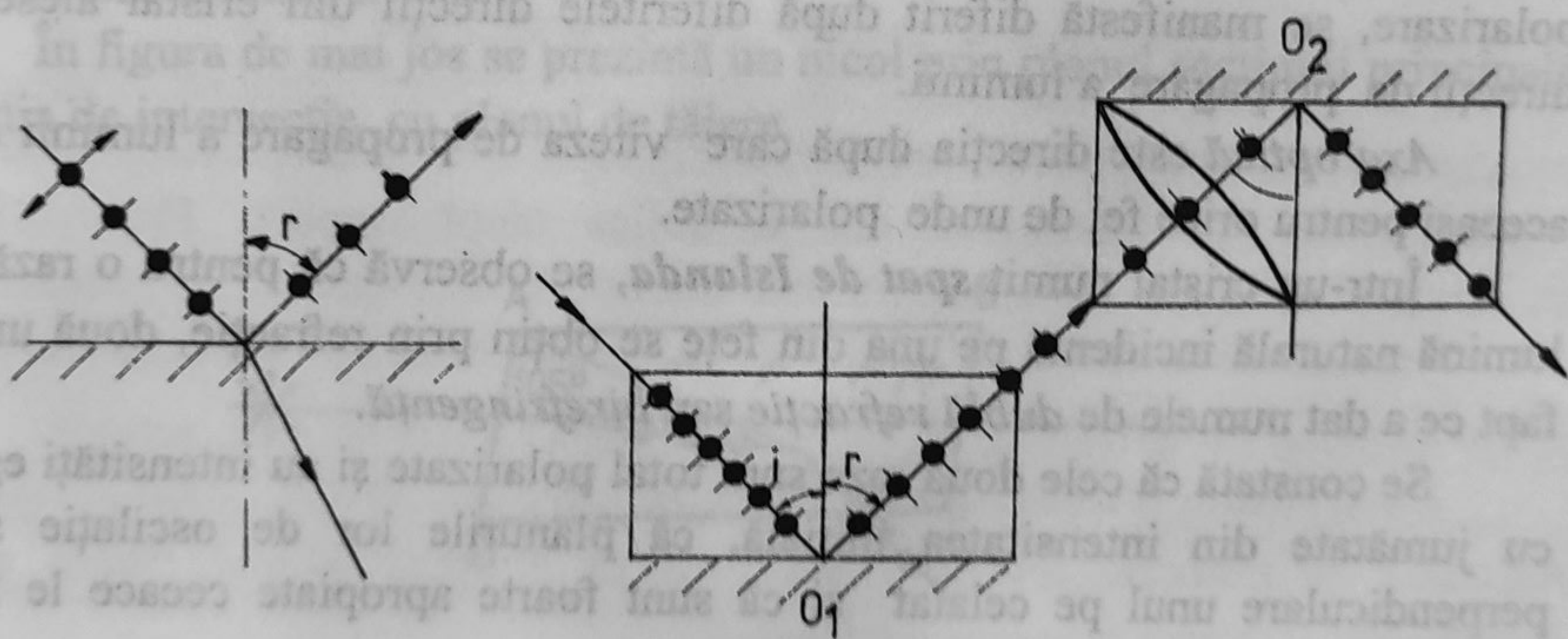


Fig. 172

Prin rotirea celei de a doua oglinzi (analizorul) cu un unghi  $\alpha$  în jurul razei polarizate se obține o intensitate luminoasă nulă la  $90^\circ$ .



Acest fenomen se numește *extincție* și constă în aceea că după a doua reflexie, raza reflectată dispăre complet deși pe oglindă cade lumină.

*Extincția* se explică prin faptul că la rotirea oglinzii O în jurul razei reflectate O'O, planul oglinzii nu mai este paralel cu planul oglinzii O ci ajunge să fie perpendicular.

Aceasta determină ajungerea vectorului  $\vec{E}$  perpendicular pe suprafața reflectantă astfel rotită și este absorbită. În aceasta poziție a oglinzii O, între planul de trecere al polarizorului (prima oglindă) și planul de trecere al analizorului (a doua oglindă) există un unghi de  $90^\circ$ . Extincția arată că raza reflectată de prima oglindă a fost total polarizată.

Dacă planul de trecere al analizorului este paralel cu planul de trecere al polarizorului, lumina trece neabsorbită.

Dacă în drumul razei polarizate total se introduce o substanță transparentă, este posibil ca aceasta să rotească planul de polarizare cu un unghi egal cu unghiul cu care trebuie rotit analizorul pentru a avea planul de trecere din nou paralel cu planul de oscilație al luminii total polarizate care a trecut prin substanță.

#### 6.12.2. Polarizare prin birefringență

Acest mod de polarizare se produce numai în medii optice anizotrope.

*Mediu optic anizotrop* este acel mediu la care proprietăți optice ca indicele de refracție deci și viteza de propagare a luminii, modul de polarizare, se manifestă diferit după diferitele direcții din cristal alese ca direcții de propagare a luminii.

*Axa optică* este direcția după care viteza de propagare a luminii este aceeași pentru orice fel de unde polarizate.

Într-un cristal numit *spat de Islanda*, se observă că pentru o rază de lumină naturală incidentă pe una din fețe se obțin prin refracție, două unde, fapt ce a dat numele de *dublă refracție* sau *birefringență*.

Se constată că cele două raze sunt total polarizate și au intensități egale cu jumătate din intensitatea inițială, că planurile lor de oscilație sunt perpendiculare unul pe celalalt și că sunt foarte apropiate ceea ce le face dificil de separat.

Raza care respecta legile refracției se numește *rază ordinară*;

Raza care nu respectă legile refracției se numește *rază extraordinară*.

În desenul următor se arată mersul razelor de lumină printr-o placă de spat de Islanda, tăiat sub un anumit unghi față de axa optică a cristalului.



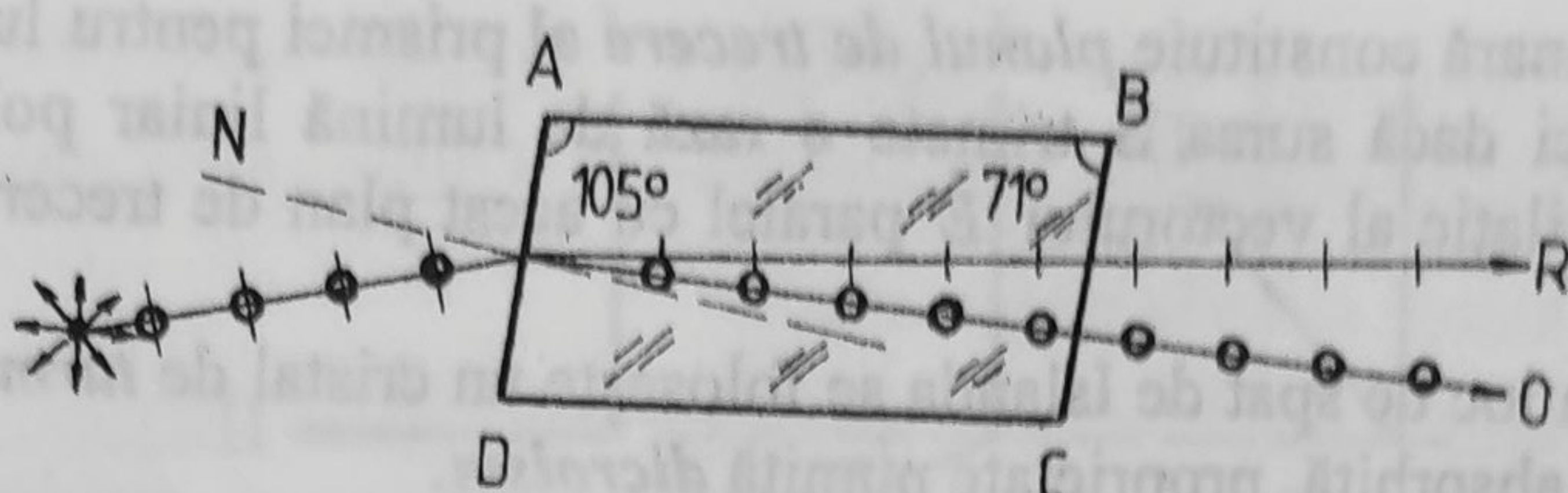


Fig. 173

Vectorul  $\vec{E}$  din raza ordinară oscilează perpendicular pe planul de incidență format din raza incidentă și axa optică.

Vectorul  $\vec{E}$  din raza extraordinară se află în planul ce trece prin axa optică și raza extraordinară, plan ce formează un unghi variabil cu planul de incidență, prin rotirea lamei.

Separarea razei extraordinare de raza ordinară a fost realizată prima dată de *Nicole*, cu ajutorul unei prisme numită de atunci *nicol*. Această prismă se obține prin tăierea în două a unui cristal de formă prismatică cu fețe rombice și axă paralelă cu muchea prisme.

Considerând secțiunea principală ca planul ce trece prin una din diagonalele celor două fețe, tăierea prisme se face într-un plan perpendicular pe planul secțiunii principale și apoi se lipesc din nou cu un strat subțire de soluție adezivă numită *balsam de Canada*. Aceasta are un indice de refracție intermediar între indicele de refracție al razei ordinară și indicele de refracție al razei extraordinare.

În figura de mai jos se prezintă un nicol prin planul secțiunii principale și linia de intersecție cu planul de tăiere.

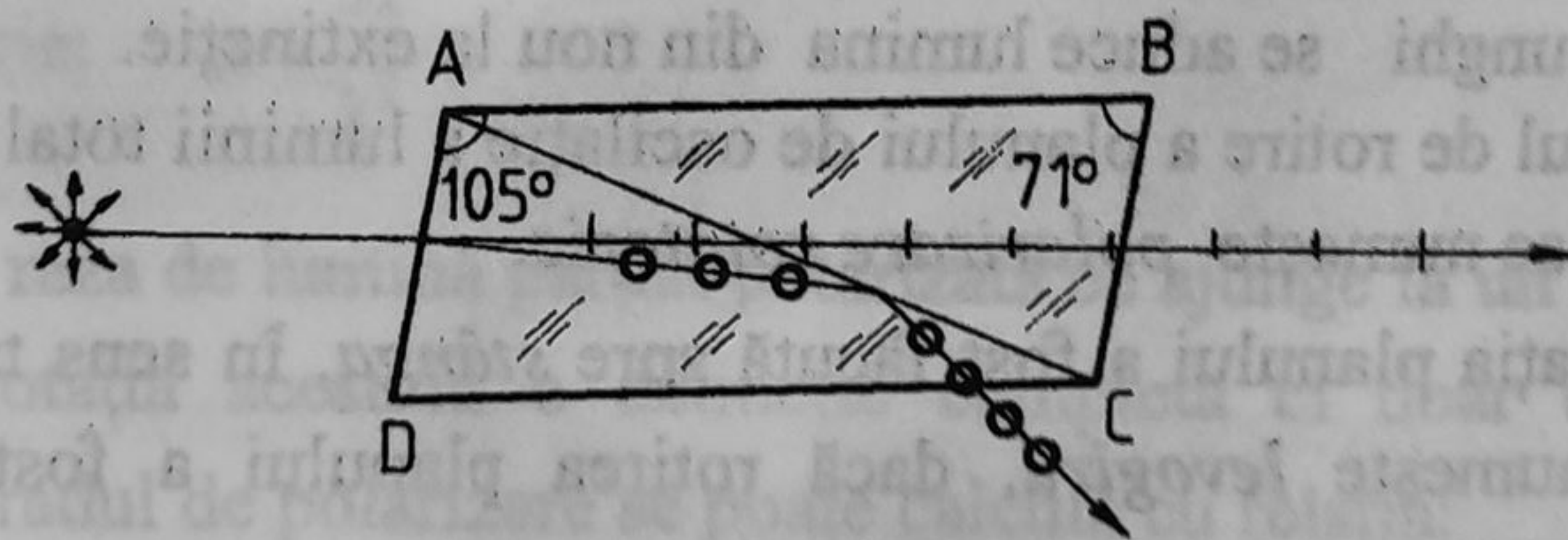


Fig. 174

Efectul suprafețelor lipite cu balsamul de Canada este că raza ordinară este reflectată și separată de raza extraordinară. Planul format de axa optică și



raza extraordinară constituie *planul de trecere* al prisme pentru lumina total polarizată căci dacă sursa S trimete o rază de lumină liniar polarizată cu planul de oscilație al vectorului  $\vec{E}$  paralel cu acest plan de trecere, va trece neabsorbită.

Dacă în loc de spat de Islanda se folosește un cristal de *turmalină*, raza ordinară este absorbită, proprietate numită *dicroism*.

Cristalele foarte mici de *iodosulfat de chinină* nu se pot folosi direct la confecționarea de nicoli, ci se introduc într-un lac de nitroceluloză transparent care se solidifică în prezența unui câmp electric intens. Acest câmp orientează toate microcristalele cu axa optică pe direcția câmpului electric extern.

Lacul depus în strat subțire pe pe o placă de sticlă devine un *polarizor* cu suprafață oricât de mare. Dacă raza iese dintr-un nicol analizor, având planul de trecere paralel cu planul de trecere al primului nicol, oscilația electrică polarizată liniar trece neabsorbită.

Prin rotirea analizorului în jurul razei incidente luată ca axă, se produce o rotire de unghi  $\alpha$  a planului de trecere al celui de al doilea nicol care are ca efect slăbirea intensității luminii transmise prin analizor după *legea lui Malus*:

$$I = I_0 \cdot \cos^2 \alpha$$

unde

$I$  - intensitatea luminii ce iese din analizor;

$I_0$  - intensitatea luminii ce cade pe analizor.

Când unghiul  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  se produce extincția razei de lumină și invers, dacă se produce extincția unei raze liniar polarizate înseamnă că între planele de trecere al polarizorului și al analizorului este un unghi de  $90^\circ$ .

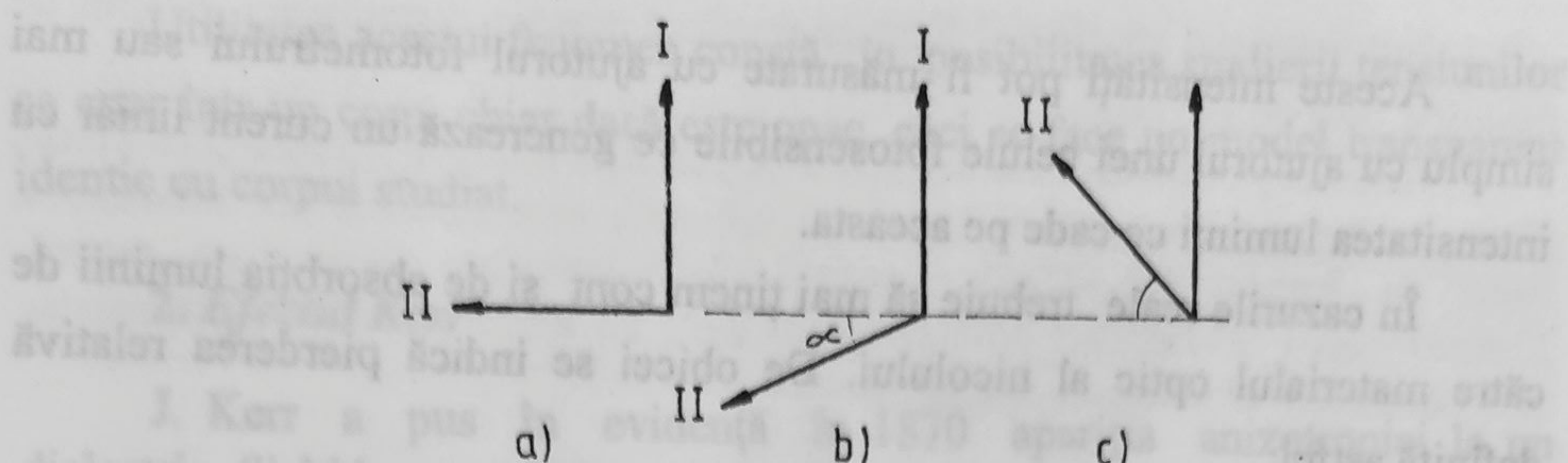
Dacă între cei doi nicoli cu plane de trecere perpendiculare, se introduce o substanță solidă sau lichidă transparentă care rotește planul de polarizare, lumina emergentă din al doilea nicol reapare. Prin rotirea analizorului de unghi se aduce lumina din nou la extincție.

Fenomenul de rotire a planului de oscilație a luminii total polarizate de către substanțe se numește *polarizare rotatorie*.

Dacă rotația planului a fost făcută spre *stânga*, în sens trigonometric, substanța se numește *levogiră*, dacă rotirea planului a fost făcută spre dreapta, substanța se numește *dextrogiră*.

Modul de rotire este o caracteristică pentru substanțe și servește la deosebirea în special a substanțelor cu aceeași formulă chimică dar cu alte legături chimice, cum este cazul *zaharozei* (levogiră) și al *dextrozei* (dextrogiră).





- I Plan trecere primul nicol  
 II Plan trecere al doilea nicol  
 a) Extincție în aer  
 b) Extincție în substanțe levogire  
 c) Extincție în substanțe dextrogire

Fig. 175

Există o directă proporționalitate între unghiul de rotație  $\alpha$  și lungimea drumului străbătut de o rază liniar polarizată prin substanța solidă activă:  $\alpha = k \cdot l$  unde  $k$  - putere rotatorie (grade /m ).

Pentru lichide pure:  $\alpha = k \cdot \rho \cdot l$

Pentru soluții:  $\alpha = k \cdot C \cdot l$

unde:  $\rho$  - este densitatea lichidului,

$C$  - concentrația de substanță optic - activă din soluție,

$l$  - lungimea drumului străbătut de lumină prin mediul dat.

Lumina albă, care este un amestec de radiații monocromatice, după ce iese din polarizor, se dispersează. La analizor ajung radiații liniar polarizate de toate culorile iar prin rotirea planului de trecere a celui de al doilea nicol, radiațiile dispar pe rând la diferite unghiuri pentru

care putem scrie:  $\alpha = \frac{A}{\lambda^2}$

Pentru raza de lumină parțial polarizată ce ajunge la un analizor, nu se obține prin rotația acestuia o extincție completă ci doar o micșorare a intensității. Gradul de polarizare se poate calcula cu relația:

$$n = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

unde:  $I_{max}$  - intensitatea maximă a luminii ce trece neabsorbită prin analizor;

$I_{min}$  - intensitatea minimă a luminii ce trece prin analizor.



Aceste intensități pot fi măsurate cu ajutorul fotometrului sau mai simplu cu ajutorul unei celule fotosensibile ce generează un curent liniar cu intensitatea luminii ce cade pe aceasta.

În cazurile reale trebuie să mai ținem cont și de absorbția luminii de către materialul optic al nicolului. De obicei se indică pierderea relativă definită astfel:

$$k = \frac{I_i - I_e}{I_i} \%$$

La ieșirea dintr-un nicol cele două raze, ordinară și extraordinară au intensități egale, deci intensitatea razei extraordinare dintr-un nicol este jumătate din intensitatea dată mai sus:

$$I_e^{extr} = \frac{I_e}{2} = \frac{1}{2} \cdot (1 - k) \cdot I_i \text{ la o trecere.}$$

### 6.12.3. Anizotropia optică artificială

Fenomenul de anizotropie, așa cum a fost definit mai sus a putut fi produs pe cale artificială și la corpurile cu izotropie optică. În cele ce urmează se prezintă, calitativ, câteva fenomene de producere a anizotropiei optice, ce prezintă mare importanță pentru tehnica de vârf.

#### 1. Efectul Brewster - Seebeck

D. Brewster și Seebeck au observat că un corp izotrop supus unor tensiuni de-a lungul unei direcții, capătă proprietățile unui cristal anizotrop uniaxă. Notând cu  $n_2$  și  $n_0$  indicii de refracție ai celor două raze ordinară și extraordinară, se poate măsura această modificare prin diferența:

$$n_2 - n_0 = k \cdot \sigma$$

unde  $k$  este o constantă ce depinde de mai mulți factori cum ar fi, natura substanței, lungimea de undă a radiației folosite, etc. Supunând un corp optic transparent și omogen la o tensiune mecanică și apoi introducându-l între un polarizor și analizor la extincție, se observă o mulțime de franje de interferență colorate, o franjă izocromă reprezentând o linie de aceeași tensiune.



Utilitatea acestui fenomen constă în posibilitatea studierii tensiunilor ce apar într-un corp, chiar dacă este opac, căci se face un model transparent identic cu corpul studiat.

## 2. Efectul Kerr

J. Kerr a pus în evidență în 1870 apariția anizotropiei la un dielectric (lichid sau solid), transparent izotrop optic, prin aplicarea unui câmp electric suficient de puternic. Direcția liniilor de câmp devine axul optic al substanței devenită anizotropă. Un vas cu lichid dielectric în care se introduce un condensator plan, ca în figură, se numește **celulă Kerr**. Măsura anizotropiei produse este dată de diferența dintre indicii de refracție:

$$n_e - n_o = k \cdot \lambda \cdot E^2 \quad \text{sau} \quad \Delta n = k' \cdot E^2$$

unde  $k$  este o constantă (numită constanta Kerr), dependentă de natura substanței și de lungimea de undă a radiației folosite și alți factori:

$$k' = k \cdot \lambda \quad \text{iar} \quad E = \frac{U}{d}$$

$E$  - mărimea intensității câmpului electric dintre plăcile condensatorului produs de tensiunea  $U$ . Se folosește și o altă formă a constantei Kerr:

$$k'' = k \cdot \frac{\lambda}{n}$$

unde  $n$  - este indicele de refracție al mediului optic în lipsa câmpului.

O celulă Kerr, pusă între un polarizor și un analizor aflat la extincție pune în evidență rotirea planului de polarizare, deci căpătarea proprietății de anizotropie prin trecerea luminii prin celulă proporțional cu tensiunea

aplicată, atingând un maxim pentru:  $U = \sqrt{\frac{d^2}{2 \cdot k \cdot l}}$  unde  $l$  - este lungimea plăcii condensatorului.

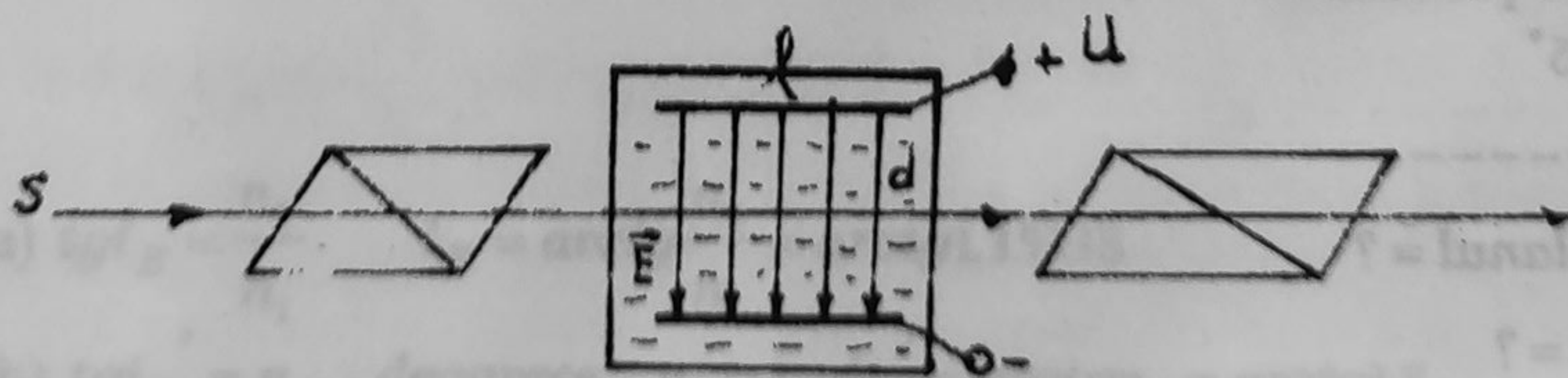


Fig. 176



S-a constatat că efectul Kerr se produce practic instantaneu, timpul de tranziție este de  $10^{-8}$  sec.

Această posibilitate de variație a intensității luminii trecute prin celulă Kerr, în funcție de valoarea tensiunii aplicate, este folosită la modularea razei de lumină în scopul transmiterii informației prin fibra optică. Decodificarea informației se poate face apoi cu ajutorul unui fototranzistor și a circuitelor electronice specializate.

### 3. Efectul Faraday

În 1846 M. Faraday observă că o substanță optic izotropă, sub acțiunea unui câmp magnetic intens (de inducție  $B$ ), capătă proprietatea de a roti planul de polarizare a luminii, care se propagă de-a lungul lui  $B$  cu unghiul:  $\alpha = V \cdot l \cdot B$  unde  $V$  - constanta Verdet  $V = 0,0012 \cdot \text{grad} \cdot A^{-1}$ ,

$l$  - lungimea drumului parcurs de lumină în câmp magnetic;

$B$  - inducția magnetică.

### 4. Efectul Cotton -Moutton

În 1907 fizicienii Cotton și Moutton au observat că un câmp magnetic intens transformă o substanță optică izotropă într-o substanță anizotropă și că măsura acestei anizotropii este dată de relația:

$$n_e - n_o = C \cdot \lambda \cdot H^2$$

#### 6.12.4. Probleme rezolvate

1. O rază de lumină nepolarizată ce trece prin aer se reflectă pe o placă de material plastic, suferind o deviere totală de  $95^\circ$ . Prin analizarea razei reflectate se constată că este total polarizată.

- Să se afle în ce plan oscilează vectorul câmp electric după reflexie;
- Să se găsească indicele de refracție relativ al materialului;
- Să se determine cu câte grade deviază raza refractată de la direcția inițială.

Datele problemei:

$$\delta = 85^\circ$$

a) planul = ?

b)  $n = ?$

c)  $x = ?$



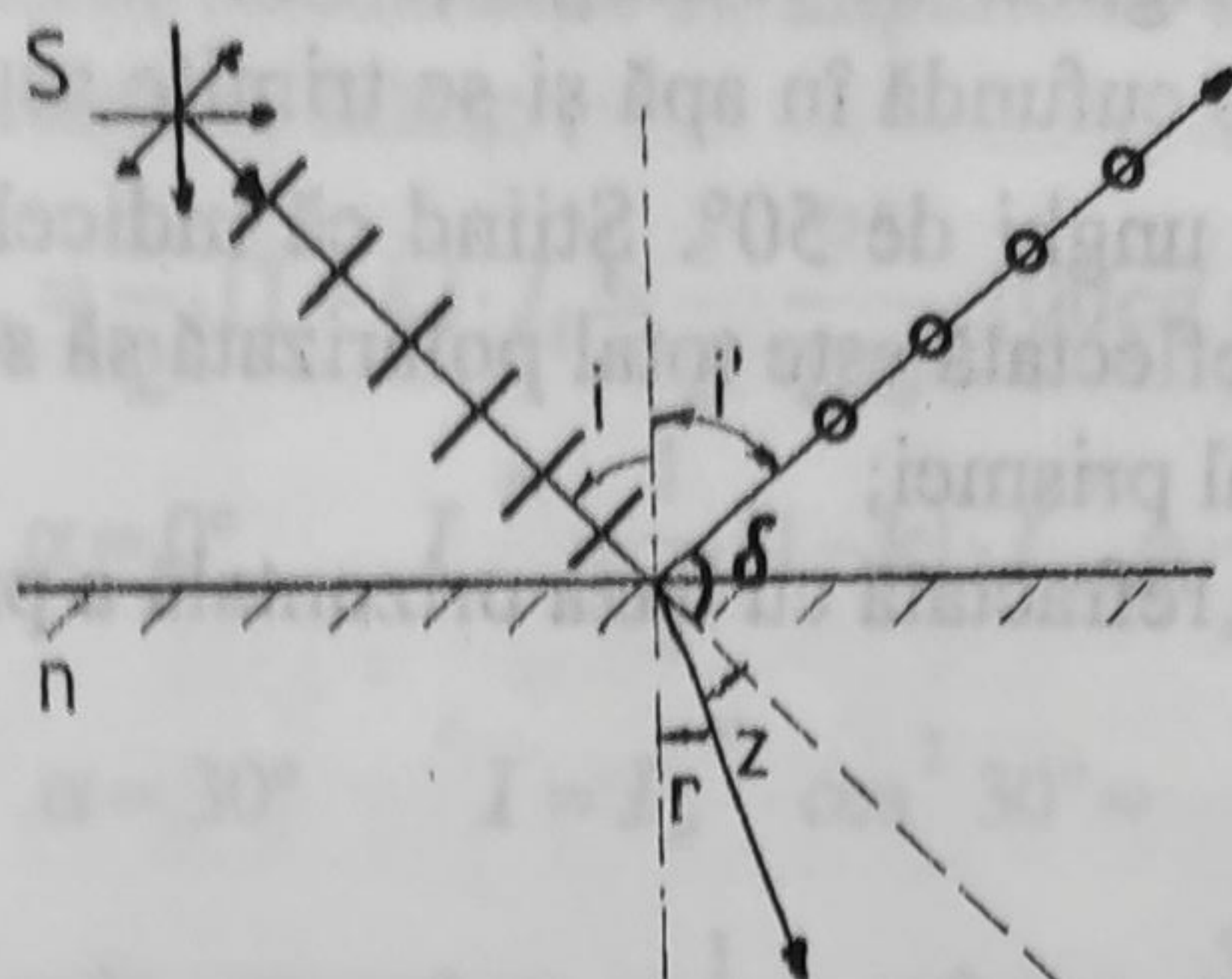


Fig. 177

a) Din desen se vede că vectorul  $\vec{E}$  este paralel cu suprafața de reflexie :

$$i + i' + \delta = 180^\circ \quad i + i' = 95^\circ \quad i = i' = 47,5^\circ$$

b)

$$\operatorname{tg} i_B = n \quad \text{deci} \quad n = \operatorname{arctg} 47^\circ 30' = 1,091$$

$$\sin i = n \cdot \sin r \quad \sin r = \frac{1}{n} \cdot \sin i = \frac{0,737}{1,091} = 0,675$$

c)

$$r = \arcsin\left(\sin \frac{1}{n}\right) = \arcsin 0,675 = 42^\circ 30'$$

$$x = i - r \quad x = 47^\circ 30' - 42^\circ 30' = 5^\circ$$

2. O rază de lumină naturală se propagă prin apă cu indicele de refracție  $n_1 = 1,33$  și se reflectă pe o placă dielectrică cu indicele  $n_2 = 1,8$ .

a) La ce unghi de incidență pe placă raza reflectată este total polarizată;

b) Prin înlocuirea apei cu aer, se obține o rază polarizată parțial. Cu câte grade trebuie modificat unghiul de incidență pentru a obține din nou o rază total polarizată.

Datele problemei:

$$n_1 = 1,33 \quad n_2 = 1,8$$

$$a) i_B = ?$$

$$b) \Delta i = ?$$

$$a) \operatorname{tg} i_B = \frac{n_2}{n_1} \quad i_B = \operatorname{arctg} \frac{n_2}{n_1} = \operatorname{arctg} 1,35338$$

$$b) \operatorname{tg} i_B' = n_2 \quad \text{deoarece } n_1 = 1 \quad i_B' = \operatorname{arctg} n_2 = \operatorname{arctg} 1,8$$

$$\Delta i = i_B - i_B'$$



3. O prismă cu unghiul de refringentă de  $90^\circ$  are în secțiune forma unui triunghi isoscel. Se cufundă în apă și se trimite asupra sa un fascicol de lumină naturală sub un unghi de  $50^\circ$ . Știind că indicele de refracție al apei este de 1,33 și că raza reflectată este total polarizată să se afle:

a) indicele de refracție al prisme;

b) unghiul făcut de raza refractată cu baza orizontală a prisme după intrare în aceasta.

Datele problemei:

$$A = 90^\circ$$

$$i_B = 50^\circ \quad n_1 = 1,33$$

$$a) n_2 = ?$$

$$b) \alpha = ?$$

$$a) \operatorname{tg} i_B = \frac{n_2}{n_1} \quad n_2 = n_1 \cdot \operatorname{tg} i_B = 1,33 \cdot \operatorname{tg} 50^\circ$$

$$b) \frac{\sin i_B}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} \quad \sin r = \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin i_B = \frac{1,33}{1,33 \cdot \operatorname{tg} 50^\circ} \cdot \sin 50^\circ$$

$$45^\circ + \alpha + 90^\circ + r = 180^\circ \quad \alpha + r = 45^\circ$$

4. La trecerea luminii naturale printr-un nicol, se pierde 5% din intensitatea inițială.

a) Să se determine intensitatea luminii polarizate total de la ieșire, dacă la intrare, intensitatea este de 100 cd;

b) Ce intensitate va avea lumina polarizată la ieșire, dacă raza de la punctul precedent trece printr-un al doilea nicol în cazul când planul de trecere al acestuia este rotit cu  $30^\circ$ .

Datele problemei:

$$I_i = 100 \text{ cd}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$a) \frac{\Delta I}{I_i} = \frac{I_i - I_e}{I_i} = k = 5\% \quad I_i - k \cdot I_i = I_e$$

$$a) I_e = ?$$

$$b) I = ?$$

$$\text{deci } I = I_i \cdot (1 - k)$$

unde:

$I_i$  — intensitatea de la intrare;

$I_e$  — intensitatea de la ieșire.



Deoarece la un nicol intensitatea se împarte în două, pentru cele două raze, ordinară și extraordinară, luăm:

$$I_e' = \frac{1}{2} \cdot I_e = \frac{1}{2} \cdot (1-k) \cdot I_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{95}{100} \cdot 100cd = 47,5cd$$

$$b) \text{ Pentru } \alpha = 0^\circ \quad I_e'' = \frac{1}{2} \cdot (1-k) \cdot I_e' = \frac{1}{4} \cdot (1-k) \cdot I_i$$

$$\text{Pentru } \alpha = 30^\circ \quad I = I_e'' \cdot \cos^2 30^\circ =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (1-k)^2 \cdot I_i \cdot \cos^2 30^\circ = \frac{1}{4} \cdot 0,95^2 \cdot 100 \cdot \frac{3}{4} = 16,92cd$$

5. O rază nepolarizată trece prin doi nicoli succesivi situați în aer, între ale caror plane de trecere există unghiul de rotație  $\alpha_1 = 30^\circ$ . Prin rotirea nicolului analizor intensitatea scade de nouă ori față de prima trecere.

a) Să se afle cu câte grade s-a rotit analizorul;

b) Dacă se introduce un lichid între nicoli și intensitatea revine la valoarea inițială, să se determine intensitatea lui știind că lungimea drumului parcurs de lumină prin lichid este de 10 cm iar puterea de rotire de 10 grade / m.

Datele problemei:

$$\alpha_1 = 30^\circ \quad k = 9$$

$$l = 10cm \quad k = 10 \cdot \frac{\text{grad} \cdot m^2}{kg}$$

$$a) \alpha_2 = ?$$

$$b) I' = I = ?$$

$$a) \quad I_1 = I_0 \cdot \cos^2 45^\circ \quad I_2 = I_0 \cdot \cos^2 60^\circ$$

$$\frac{I_1}{I_2} = 9 = \frac{\cos^2 30^\circ}{\cos^2 \alpha} \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{\cos^2 30^\circ}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{6} = 0,288$$

$$\alpha = \arccos \frac{\sqrt{3}}{6} = \arccos 0,288 \quad \alpha = 73^\circ 10'$$

Prin revenire la intensitatea inițială  $I_1$ , lichidul a produs o rotire a planului de oscilație exact de unghiul  $\alpha$  deci putem scrie:

$$\alpha = k \cdot \rho \cdot d \quad \text{de unde} \quad \rho = \frac{\alpha}{k \cdot d} = \frac{73^\circ}{10 \cdot \frac{\text{grad} \cdot m^2}{kg} \cdot 0,1m} = 73 \frac{kg}{m^3}$$



6. Cu ajutorul unei celule fotosensibile, se constată că lumina reflectată de un mediu dielectric, care apoi trece printr-un nicol, la rotirea acestuia, se obține un raport între intensitatea maximă transmisă și intensitatea minimă egal cu doi. Să se calculeze planul de polarizare.

Rezolvare:

$$n = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} = \frac{1}{3} = 33\%$$

7. După reflexie, lumina trece printr-un nicol care arată un grad de polarizare de 75 %.

a) Să se arate de câte ori este intensitatea maximă mai mare decât intensitatea minimă;

b) Cu câte grade trebuie rotit nicolul pentru a permite trecerea unei intensități egale cu intensitatea minimă.

Rezolvare:

$$n = 0,75 \quad a) \quad n = \frac{\frac{I_M}{I_m} - 1}{\frac{I_M}{I_m} + 1} \quad n = \frac{x-1}{x+1} = 7$$

a)  $x = ?$

b)  $\alpha = ?$

$$b) \quad I_m = I_M \cdot \cos^2 \alpha \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{I_m}{I_M}} = \sqrt{0,143} \approx 0,12 \quad \alpha = 89^\circ 10'$$

8. Între doi nicoli aflați în aer la extincție se introduce o placă de cristal cu grosimea de 1 cm. Pentru a obține extincția se rotește nicolul cu  $45^\circ$  spre stânga.

a) Să se determine constanta de rotație și felul polarizării;

b) Cu câte grade trebuie rotit analizorul dacă se introduce în locul primei plăci o placă cu grosimea de 1 mm.

Rezolvare:

$$d_1 = 1 \text{ cm}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$d_2 = 1 \text{ mm}$$

-----

a)  $k = ?$

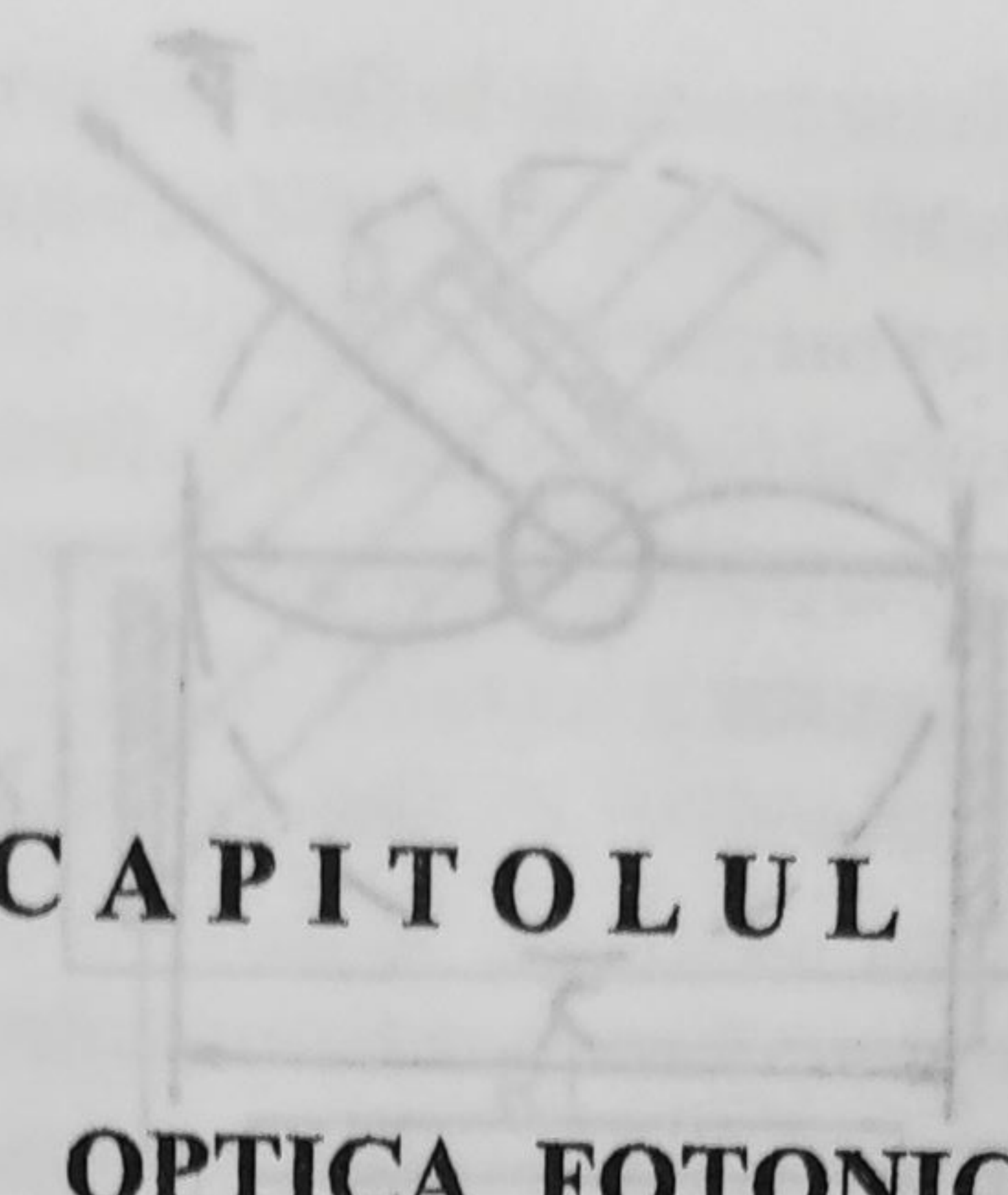
b)  $\alpha_2 = ?$

$$a) \quad k = \frac{\alpha}{d} = 45 \cdot \frac{\text{grad}}{\text{cm}} \quad \text{polarizarea este levogira}$$

$$b) \quad \alpha_1 = k \cdot d_1 = 45 \cdot \frac{\text{grad}}{\text{cm}} \cdot 1 \text{ cm} = 45^\circ$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{d_2}{d_1} \quad \alpha_2 = \alpha_1 \cdot \frac{d_2}{d_1} = 4,5^\circ$$





## CAPITOLUL VII

### OPTICA FOTONICĂ

#### 7.1. Introducere

Către sfârșitul secolului trecut, Hertz a pus în evidență un nou fenomen: extragerea dintr-un metal a unor sarcini negative, de către radiațiile ultraviolete și l-a numit *efect fotoelectric*.

S-a încercat explicarea lui în cadrul teoriei clasice dar nu s-a reușit, această încercare adăugându-se altor încercări nereușite de explicare a proceselor de absorbție și de emisie a radiației termice. În 1900 Max Planck ajunge în urma cercetărilor la următoarea concluzie:

*Toate sursele de radiații electromagnetice emit sau absorb energie numai în porții distincte numite cuante de energie.*

Dar Planck a considerat această ipoteză doar ca un artificiu pentru a deduce o formulă matematică care să concorde cu expresia distribuției energiei radiante cu temperatura corpului negru, cunoscută experimental.

Adoptând această ipoteză se obținea concordanța între curba experimentală cu cea teoretică, dar contrazicea întreaga teorie ondulatorie care explica admirabil fenomenele de interferență și difracție.

Einstein s-a folosit de noțiunea de *cuantă* de energie introdusă de Planck emițând ipoteza că emisia și absorbția energiei prin cantități discrete, este o proprietate intrinsecă a radiației electromagnetice.

A atribuit acestor cuante de energie proprietăți de *impuls, masă, energie* și le-a denumit *fotoni*. Adoptând acest punct de vedere și aplicându-l la efectul fotoelectric i-a dat în 1905 explicația corectă. În desenul de mai jos se arată simbolic deosebirea dintre cele două teorii.



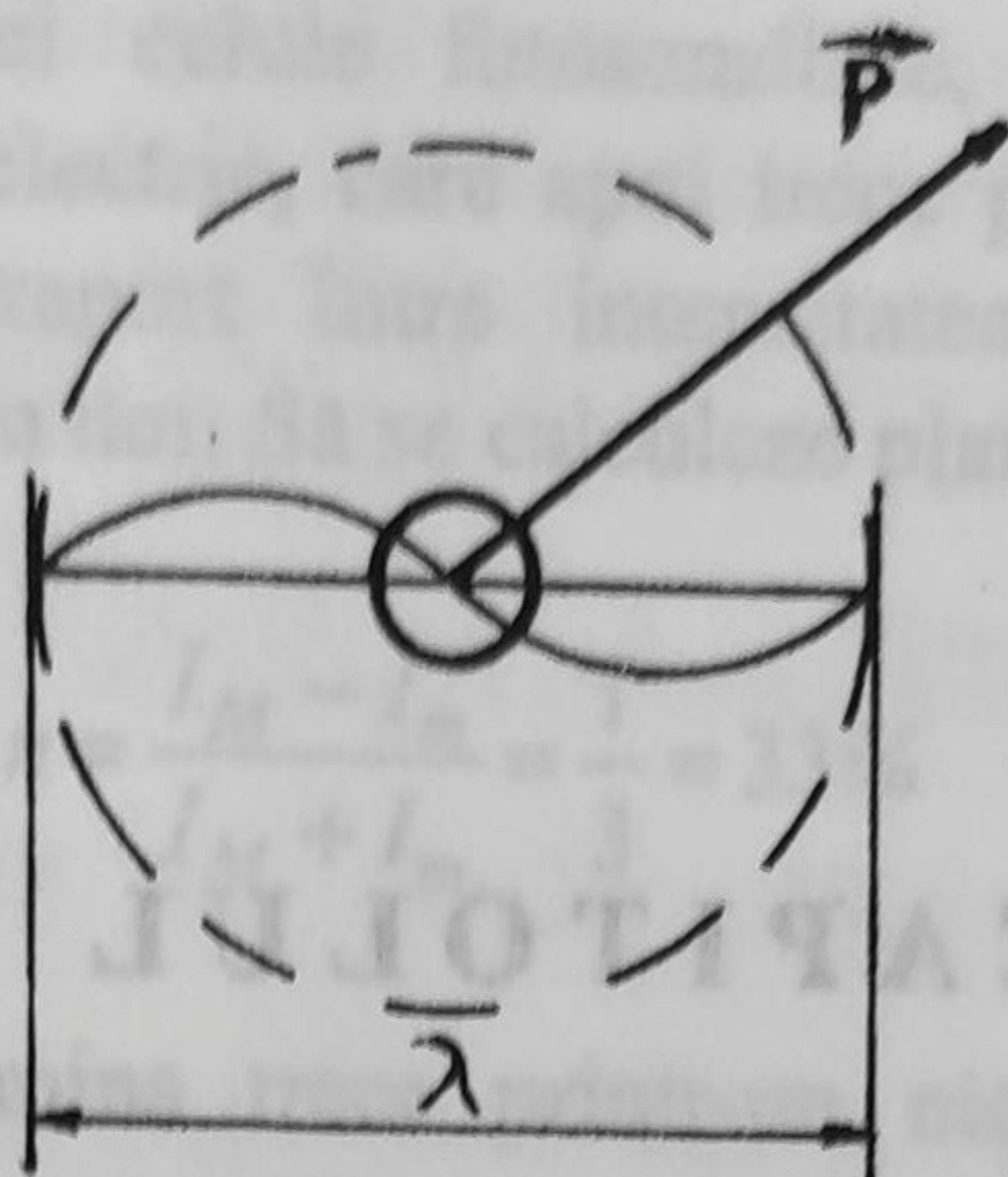


Fig. 178

## 7.2. Efectul fotoelectric

În 1887 Hertz, Stoletov și alții, au observat că iluminând o placă metalică situată în vid, cu radiații ultraviolete (UV), aceasta se electrizează pozitiv ceea ce arată că din metal sunt extrase sarcini negative.

În dispozitivul imaginat de Lenard, cu anod găurit, arătat în figura de mai jos, se puteau separa aceste sarcini negative și prin măsurători de deviații în câmp magnetic și electric și s-a dedus că acestea sunt tocmai electronii ce se descoperiseră de curând.

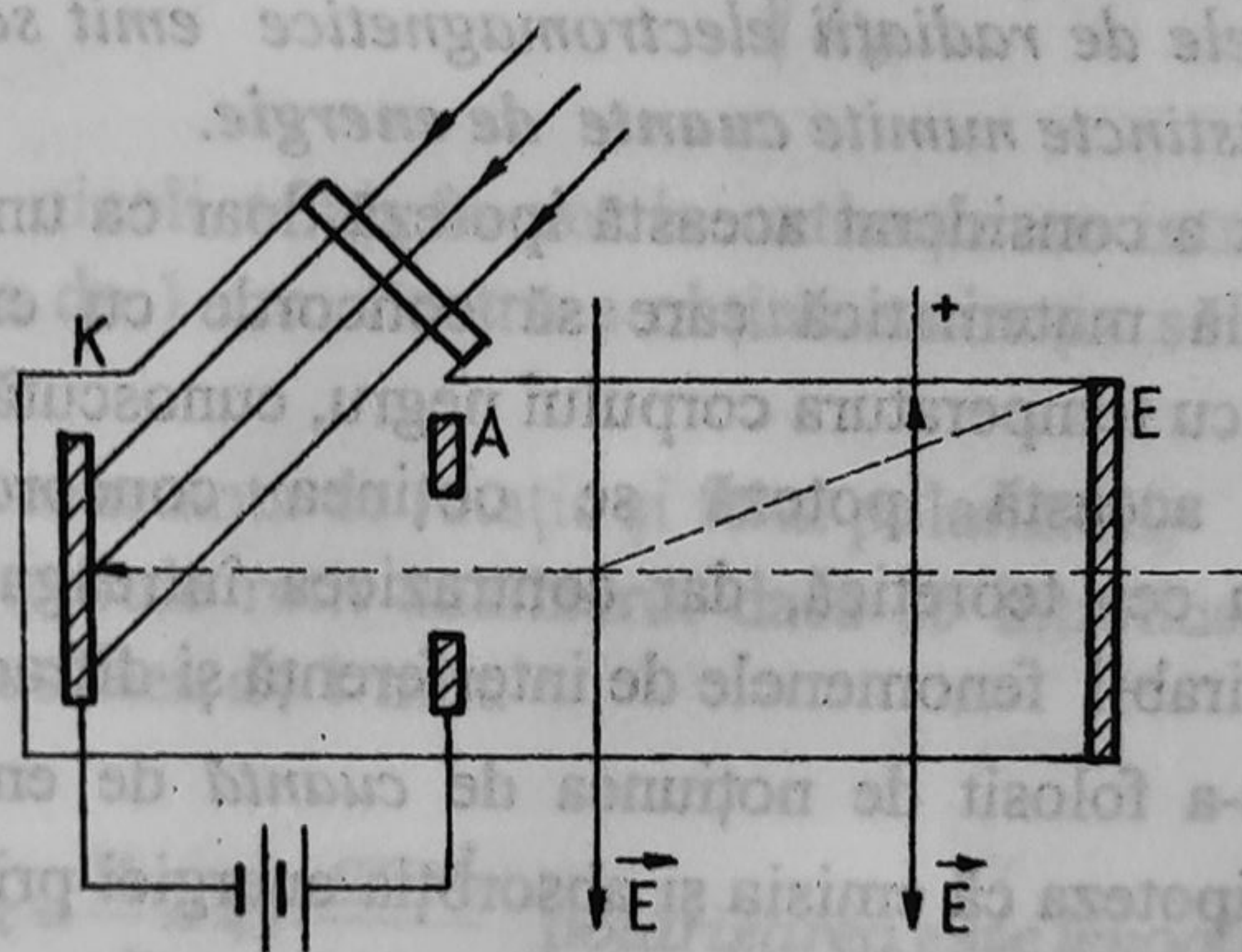


Fig. 179

Folosind un anod compact, care să colecteze toți electronii și folosind un dispozitiv potențiometric de aplicare a tensiunilor după cum se vede și în figura următoare, s-au putut deduce legile efectului fotoelectric așa cum le cunoaștem azi.



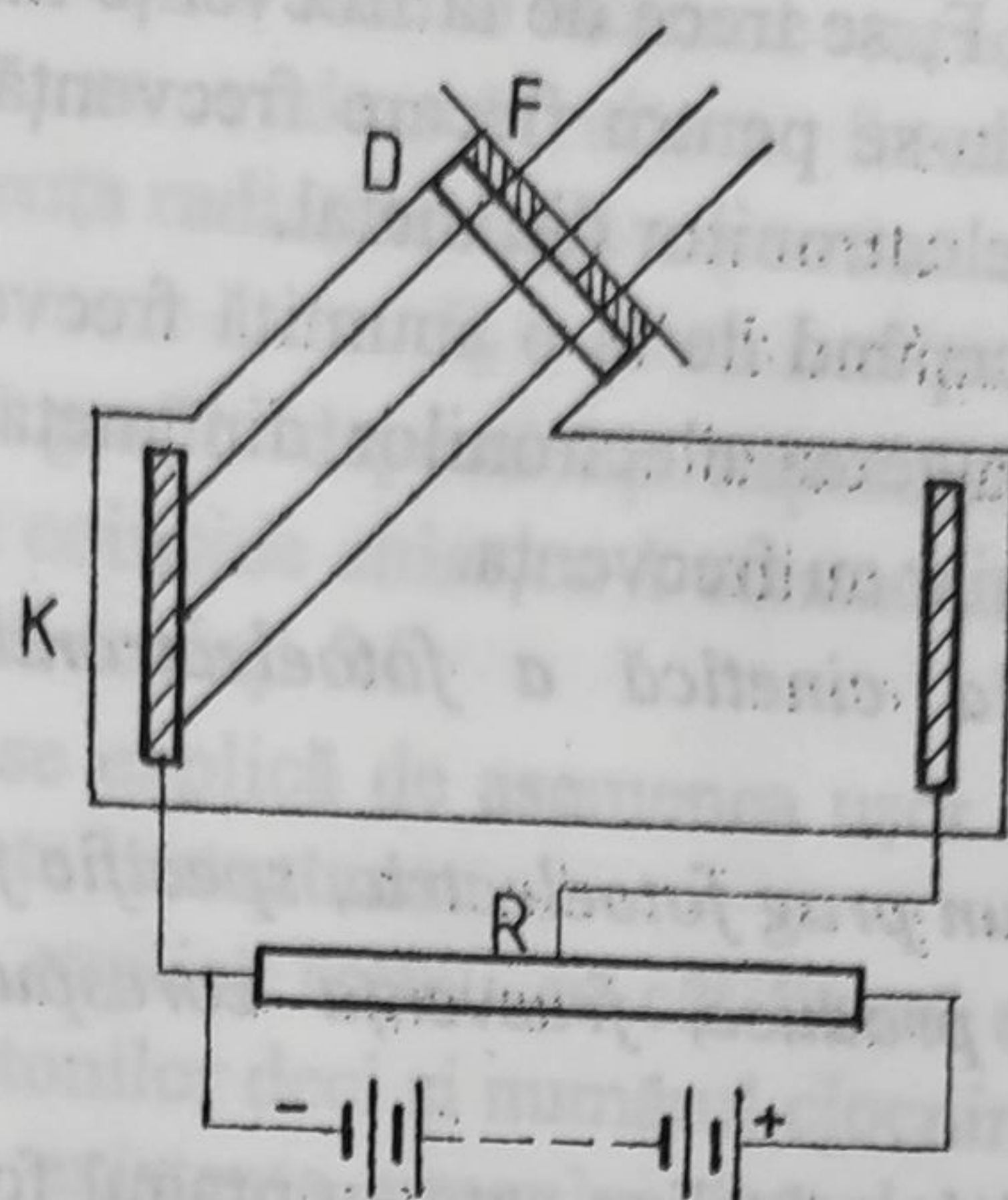


Fig. 180

Trimitem un flux de radiații UV printr-o diafragmă D și prin filtrul F asupra plăcuței metalice, rostul lor este de a permite obținerea de fluxuri bine determinate pentru un șir de frecvențe crescător.

Mărind tensiunea de accelerare (pozitivă), curentul prin galvanometru ajunge la o valoare maximă numită *intensitate de saturație*. Acest curent corespunde captării tuturor fotoelectronilor. Prin mărirea fluxului de lumina, s-a constatat creșterea numărului de fotoelectroni prin creșterea intensității de saturație și nu a vitezei lor și pe care o formulăm ca o primă lege:

**Legea I.** Numărul electronilor extrași de radiație este direct proporțional cu intensitatea fluxului de radiație.

Măsurarea vitezei fotoelectronilor se poate face fie prin măsurarea razei de curbură a traiectoriei electronilor deviați de un câmp magnetic fie prin metoda câmpului întârziator: pe anod se aplică un potențial negativ, treptat crescător până când intensitatea curentului scade la zero, fapt ce corespunde respingerii de către anodul negativ a tuturor electronilor.

Conform teoremei variației energiei cinetice putem scrie:

$$0 - \frac{m \cdot v^2}{2} = e \cdot U_s$$

unde  $U_s$  se mai numește și tensiune de stopare. Deci:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U_s}{m}}$$



Cu ajutorul filtrului F, se trece de la frecvențe mici la frecvențe din ce în ce mai mari, măsurându-se pentru fiecare frecvență prin acest procedeu, viteza inițială de ieșire a electronilor din metal.

S-a constatat că începând de la o anumită frecvență numită *frecvență de prag*, se produce extragerea electronilor din metal și că viteza și deci energia cinetică crește liniar cu frecvența.

*Legea II. Energia cinetică a fotoelectronilor crește liniar cu frecvența.*

*Legea III. Există un prag fotoelectric, specific fiecărei substanțe, sub care fenomenul nu se produce, frecvența corespunzătoare se numește frecvență prag.*

Cu excepția metalelor alcaline care au pragul fotoelectric în domeniul vizibil, celelalte metale au acest prag în domeniul radiațiilor UV, X.

*Legea IV. Efectul fotoelectric este practic instantaneu.*

S-a observat că între momentul iluminării cu radiații și apariția fotoelectronilor diferența de timp este de ordinul a  $10^{-8}$  s secunde, practic neglijabil de mic.

Aceste legi nu pot fi explicate de teoria clasică a opticii, electrodinamicii și mecanicii. Conform reprezentărilor clasice despre desfășurarea fenomenului, ar rezulta că electronul poate absorbi energie în mod continuu de la unda incidentă atât timp cât se află în contact cu aceasta și că treptat amplitudinea oscilațiilor se mărește până când electronul se rupe de legăturile lui din metal.

Pentru metale, rezultă astfel că o radiație roșie poate produce efect fotoelectric indiferent de substanța folosită, extracția putând dura de la câteva momente până la zeci de minute.

Explicația contrazice flagrant experiența căci extragerea din metal se produce practic instantaneu.

De asemenea, energia fotoelectronilor ar depinde de intensitatea radiației absorbite, ceea ce ar contrazice din nou experiența. Einstein dă explicația corectă a efectului folosind ipoteza existenței fotonilor astfel:

*Energia cuantei de radiație se împarte în două părți conform legii de conservare a energiei:*

$$h \cdot \nu = E_c + L$$

unde:

- $E_c$  energia cinetică comunicată fotoelectronului la ieșirea din metal;
- $L$  lucrul mecanic de extracție a electronului, împotriva forțelor de atracție din metal.



Acest lucru mecanic este o mărime caracteristică diferitelor metale. Din aceasta relație se vede că viteza fotoelectronilor depinde direct proporțional de frecvența radiației după expresia:

$$E_c = h \cdot \nu - L$$

Reprezentând grafic dependența experimentală  $E = f(\nu)$  se obține o dreaptă a cărei pantă coincide chiar cu  $h$  constanta lui Planck, deci confirmă expresia de mai sus în același fel.

Legea a IV-a se explică de asemenea ușor: procesul de ciocnire și de transfer al energiei este instantaneu.

Legea a I-a se explică astfel: cu cât fluxul este mai mare cu atât este mai mare numărul fotonilor deci și numărul ciocnirilor cu electronii.

Legea a II-a, existența pragului fotoelectric, rezultă din existența lucrului mecanic de extracție din metal: electronii nu pot ieși din metal atâta timp cât nu au o energie cel puțin egală cu lucrul mecanic de extracție. Energia minimă a cuantei este egală cu  $L$ , electronii ies din metal fără energie cinetică.

Deci ipoteza existenței fotonilor explică bine acest efect și vom vedea că privind lumina și ca un flux de corpusculi putem explica și alte fenomene.

### 7.3. Emisia liniilor spectrale.

Un atom de hidrogen (este cel mai simplu atom, are un singur electron) excitat prin ciocniri termice, emite un spectru de linii optice care sunt radiații cu frecvențe bine determinate. Nici acest fapt nu a putut fi explicat în cadrul teoriei clasice.

Niels Bohr a plecat și el de la existența cuantelor de energie și admite că atomul poate emite sau absorbe energie dar nu în orice cantități ci numai o energie egală cu multiplul întreg al cuantei de energie Planck. Cât timp atomul nu schimbă energie, se află într-o stare staționară.

Se poate trage atunci concluzia că atomul posedă mai multe stări staționare de energie  $E_0, E_1, E_2, \dots, E_n$  bine definite și că liniile spectrale reprezintă fotoni cu energia egală cu diferența dintre energia unei stări oarecare și energia stării fundamentale:

$$E_1 - E_0 = h \cdot \nu_1$$

$$E_2 - E_0 = h \cdot \nu_2$$

$$E_n - E_0 = h \cdot \nu_n$$



În acest proces de emiterie a radiației electromagnetice cu o frecvență bine determinată se produce de fapt o absorbție de energie mecanică sau termică, de ciocnire de către electron care apoi la starea fundamentală cedează această energie sub forma unui foton de lumină.

Un proces asemănător, care transformă energia cinetică a electronului în radiație electromagnetică, deci în fotoni, este procesul de frânare a electronilor accelerați, de către un anticatod (anod compact, rezistent la încălzire).

În urma acestei frânări apare un spectru continuu de raze X (fondul continuu) produs prin cedarea energiei cinetice de către fiecare electron frânat.

#### 7.4. Efectul Compton

Este efectul de variație a lungimii de undă a fotonilor după împrăștierea pe electroni liberi sau slab legați (cum ar fi pe electronii din atomii de grafit, parafină).

În parafină, electronii sunt slab legați, aproape liberi, prin iradiere cu raze X. Compton a observat în 1922 că radiațiile sunt împrăștiate sub un unghi mai mic de  $90^\circ$  au lungimea de undă mai mare decât lungimea de undă a radiațiilor incidente.

Acest fapt era imposibil de descris în limitele teoriei clasice, dar adoptând punctul de vedere corpuscular al lui Einstein, Compton și Debye au găsit o expresie a dependenței variației lungimii de undă de unghiul de împrăștiere, aflat în bună concordanță cu măsurătorile experimentale.

Pentru deducerea acestei relații pornim de la considerentul că fotonul are o *ciocnire elastică* cu un electron, pe care îl presupunem în repaos, momentan pentru simplificarea calculelor.

Aplicăm legea conservării impulsului și legea conservării energiei totale deoarece electronul are și masă de repaos și masă de mișcare între care exista relațiile cunoscute din teoria relativității restrânse:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad m \cdot c^2 = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad m \cdot v = \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

După ciocnire, electronul va avea energie cinetică:

$$E_c = (m - m_0) \cdot c^2$$



În figura de mai jos reprezentăm schița procesului precum și diagrama impulsurilor pe care o proiectăm după două axe perpendiculare:

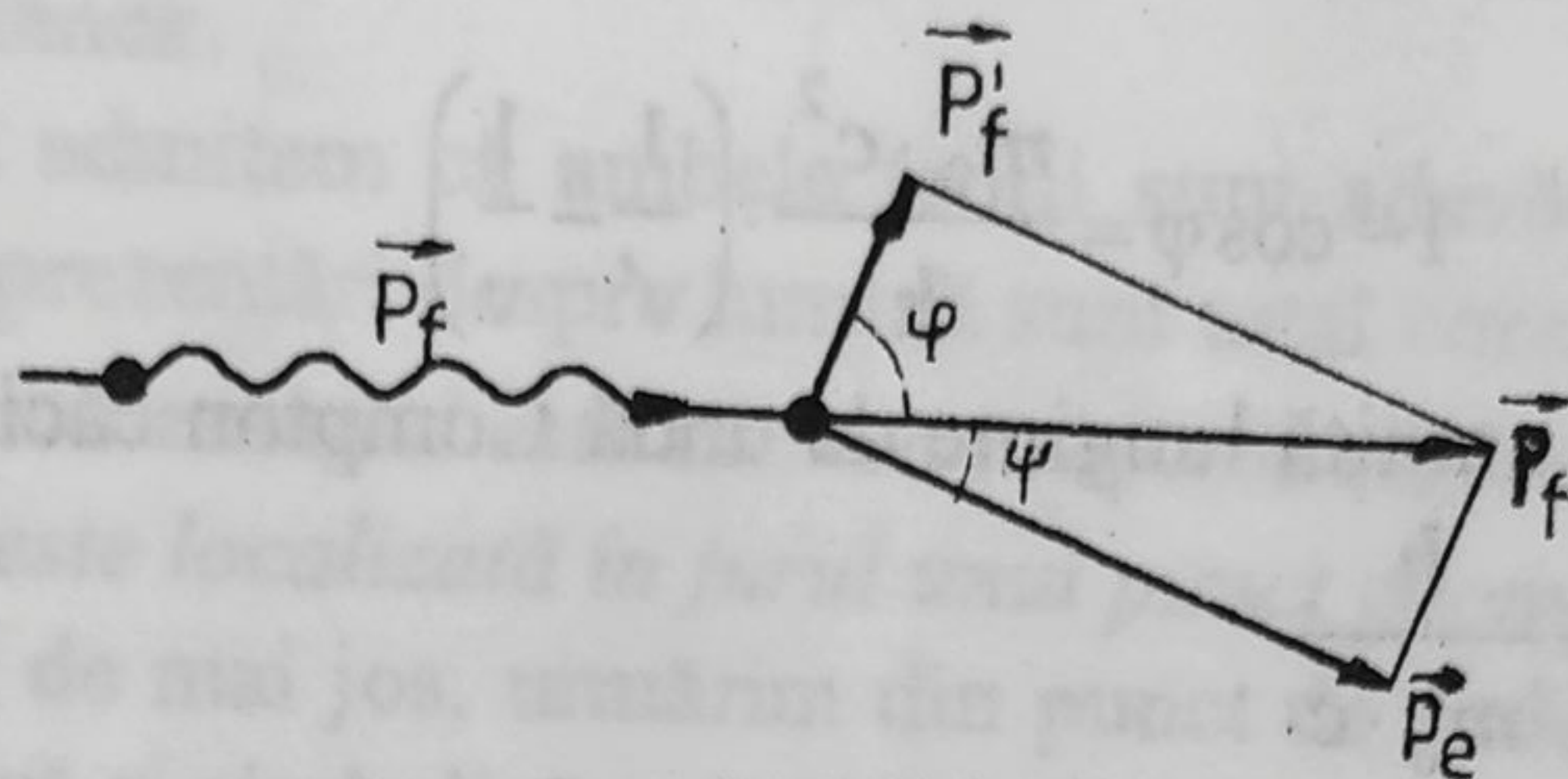


Fig. 181

Legea conservării impulsului ne dă următorul sistem de ecuații:

$$\frac{h \cdot v}{c} = \frac{h \cdot v'}{c} + m \cdot v \quad \frac{h \cdot v}{c} = \frac{h \cdot v'}{c} \cdot \cos \varphi + m \cdot v \cdot \cos \psi$$

$$0 = \frac{h \cdot v'}{c} \cdot \sin \varphi - m \cdot v \cdot \sin \psi$$

Legea conservării energiei totale ne dă:

$$h \cdot v + m_0 \cdot c^2 = h \cdot v' + m \cdot c^2$$

Eliminăm unghiul  $\psi$  din primele două ecuații:

$$\sin \psi = \frac{h \cdot v' \cdot \sin \varphi}{m \cdot v \cdot c} \quad \cos \psi = \left( \frac{h \cdot v}{c} - \frac{h \cdot v'}{c} \cdot \cos \varphi \right) \cdot \frac{1}{m \cdot v}$$

$$\sin^2 \psi + \cos^2 \psi = 1$$

$$\frac{h^2 \cdot v'^2 \cdot \sin^2 \varphi}{m^2 \cdot v^2 \cdot c^2} + \frac{h^2 \cdot (v - v' \cdot \cos \varphi)^2}{c^2 \cdot m^2 \cdot v^2} = 1$$

$$m^2 \cdot v^2 \cdot c^2 = h^2 \cdot [(v - v' \cdot \cos \varphi)^2 + v'^2 \cdot \sin^2 \varphi]$$

$$m^2 \cdot v^2 \cdot c^2 = h^2 \cdot (v^2 - 2 \cdot v \cdot v' \cdot \cos \varphi + v'^2)$$

Ținând cont că:  $m^2 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2$  și scăzând prima din a doua ecuație

se obține:

$$m^2 \cdot c^4 - m^2 \cdot v^2 \cdot c^2 = h^2 \cdot (v^2 + v'^2 - 2 \cdot v \cdot v') +$$

$$+ 2 \cdot h \cdot m_0 \cdot c^2 \cdot (v - v') + m_0 \cdot c^2 - h^2 \cdot (v^2 - 2 \cdot v \cdot v' \cdot \cos \varphi + v'^2)$$

$$m^2 \cdot c^2 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = -2 \cdot v \cdot v' \cdot h^2 + 2 \cdot v \cdot v' \cdot \cos \varphi + 2 \cdot h \cdot m_0 \cdot c^2 \cdot (v - v') + m_0^2 \cdot c^4$$

$$m_0^2 \cdot c^4 = -2 \cdot h^2 \cdot v \cdot v' \cdot (1 - \cos \varphi) + 2 \cdot m_0 \cdot c^2 \cdot h \cdot (v - v') + m_0^2 \cdot c^4$$



$$1 - \cos \varphi = \frac{2 \cdot m_0 \cdot c^2 \cdot h \cdot (\nu - \nu')}{2 \cdot h^2 \cdot \nu \cdot \nu'}$$

$$1 - \cos \varphi = \frac{m_0 \cdot c^2}{h} \cdot \left( \frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} \right)$$

Notăm cu  $\Lambda$ , numită lungime de undă Compton căci este o constantă fracția:

$$\Lambda = \frac{h}{m_0 \cdot c}$$

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda' = c \cdot \left( \frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} \right) = \frac{c \cdot h}{m_0 \cdot c^2} \cdot (1 - \cos \varphi)$$

$$\Delta\lambda = \Lambda \cdot (1 - \cos \varphi) \quad \Delta\lambda = 2 \cdot \Lambda \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

Pentru electron lungimea de undă Compton este:  $\Lambda_e = 0,0242 \cdot \text{\AA}$ .

Aceasta este *formula lui Compton* din care se vede că variația lungimii de undă nu depinde de loc de frecvența radiației incidente ci numai de unghiul de împrăștiere, relație ce este confirmată experimental.

Cât privește electronul, acesta capătă o mișcare de recul, a cărei energie este egală cu:

$$E_r = h \cdot \nu - h \cdot \nu'$$

S-a confirmat ulterior de către Bothe și Geiger, că electronul de recul apare în același moment cu cuanta împrăștiată, cu ajutorul a două contoare: unul pentru sesizarea prezenței electronilor de recul celaltă pentru sesizarea prezenței cuantei de radiație X împrăștiată.

Deci și în acest proces, lumina se comportă ca un flux de particule cu energii bine determinate, masă și impuls bine determinat, fără a-și pierde proprietățile ondulatorii dar care aici nu se manifestă, fapt ce contrazice teoria clasică despre lumină.

### 7.5. Natura duală corpuscul-undă a luminii

Concordanța teoriei cu rezultatele experimentale, este piatra de încercare a oricărei teorii; dacă o teorie prevede o lege care concordă cu observațiile experimentale, aceasta prezintă garanția că este adevărată, că însăși premisele de la care s-a plecat sunt adevărate. În privința descrierii luminii au fost emise de alungul timpului două teorii:

- *teoria ondulatorie* moștenită de la Huygens și Fresnel care explică bine fenomenele ondulatorii: *interferența, difracția*, etc.



- *teoria corpusculară* moștenită în forma primitivă de la Newton, ca un flux de grăunți luminoși și forma recentă dată de Einstein pe baza teoriei cuantelor a lui Planck.

În prezent admitem că ambele teorii sunt adevărate deși pare ciudat, deși cele două reprezentări despre lumină sunt total contradictorii:

- *unda în mod esențial este extinsă în spațiu cu  $\lambda$  variabil;*
- *particula este localizată în jurul unui punct geometric.*

În desenul de mai jos, urmărim din punct de vedere didactic să creăm o imagine intuitivă și simbolică.

Prin introducerea noțiunii despre *foton*, Einstein a ușurat înțelegerea acestei realități materiale ce se caracterizează simultan prin două atribute ce aparent se exclud.

Cercetându-se gradul de manifestare al celor două caractere, *ondulatoriu* și *corpuscular*, la foton, pentru toate frecvențele posibile de la cea mai mică până la cea mai mare, s-a observat o legitate care ajută la crearea unei imagini mai adecvate despre foton:

- Prin creșterea frecvenței, proprietățile cuantice ale luminii devin tot mai vizibile în fenomene cum sunt: *pragul fotoelectric* situat în vizibil pentru metalele alcaline sau în ultraviolet pentru celelalte, *efectul Compton*, *declanșarea unor reacții chimice*; proprietățile ondulatorii se manifestă mai slab.

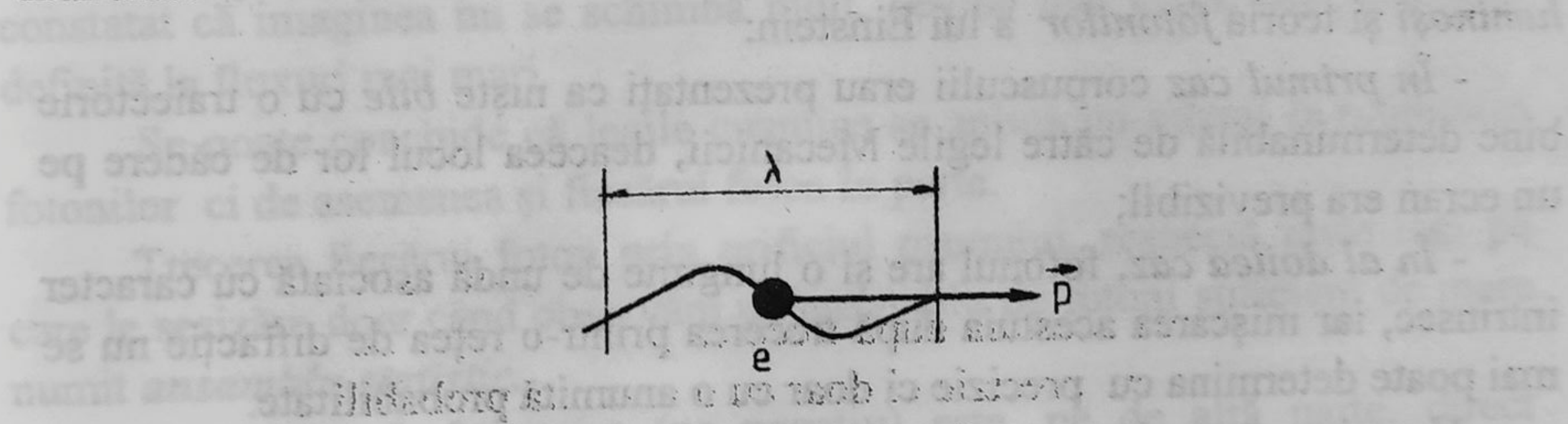


Fig. 182

Difracția razelor X nu se poate face decât pe rețele cristaline. Prin scăderea frecvenței undelor, proprietățile corpusculare apar în mai mică măsură, pe când proprietățile ondulatorii se manifestă tot mai mult în fenomenele optice.

Pe baza imaginii intuitive prezentate mai sus putem ilustra aceste observații în figura următoare.



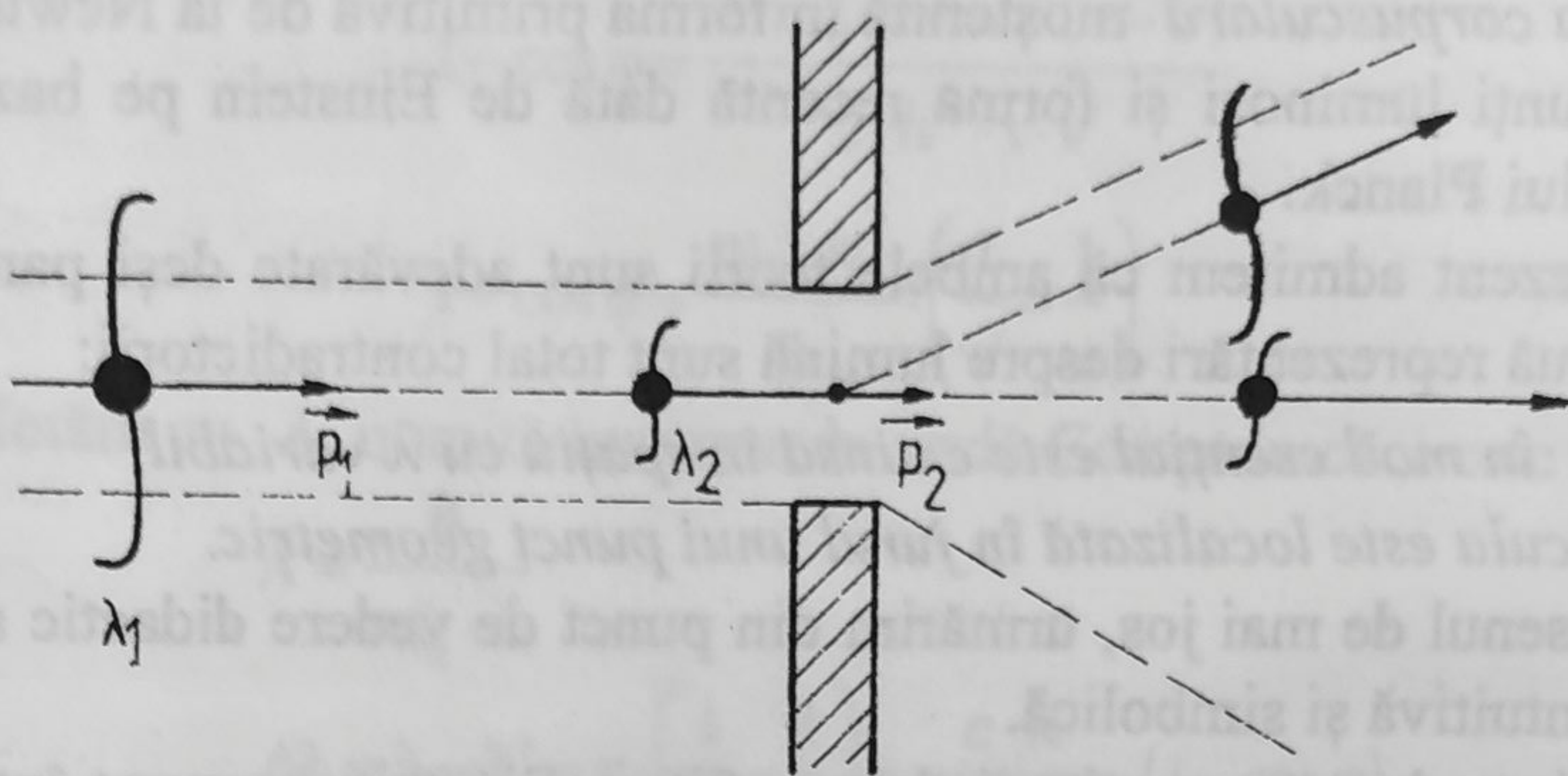


Fig. 183

La trecerea celor doi fotoni cu lungimile de undă extreme printr-o rețea de difracție este evident că fotonul cu  $\lambda$  mai mare va interacționa mai puternic decât cu fotonul cu  $\lambda$  mai mică, ca și cum în primul caz unda *agață* rețeaua, iar în al doilea caz, unda *nu agață* rețeaua de difracție.

### 7.6. Tratarea probabilistică a fenomenelor cuantice

Există o deosebire esențială între teoria lui Newton a *corpusculilor luminoși* și teoria *fotonilor* a lui Einstein:

- În primul caz corpusculii erau prezentați ca niște *bile* cu o traiectorie bine determinabilă de către legile Mecanicii, deaceea locul lor de cădere pe un ecran era previzibil;

- În al doilea caz, fotonul are și o lungime de undă asociată cu caracter intrinsec, iar mișcarea acestuia după trecerea printr-o rețea de difracție nu se mai poate determina cu precizie ci doar cu o anumită probabilitate.

Vom interpreta formarea franjelor de difracție pe o placă fotografică din punctul de vedere al teoriei corpusculare-ondulatorie în felul următor:

Se știe că o sarcină electrică ce lovește un grăunte foto-sensibil produce o reacție fotochimică al cărui rezultat devine vizibil pe negativ (prin developare) sub forma unui punct negru, iar pe placa pozitivă sub forma unui punct luminos pe fond negru.

Mulțimea fotonilor ce cad pe anumite porțiuni de placă fotografică, produce o mulțime de puncte negre pe *clișeul negativ* și puncte albe pe *clișeul pozitiv*.



În acest fel: *maximele de difracție sau interferență, corespund locului unde au căzut mai mulți fotoni iar minimul de interferență corespunde locului unde nu au cazut fotoni.*

Aceste franje de difracție se prezintă ca inele luminoase pe placa pozitivă dacă sunt maxime sau inele întunecate dacă sunt minime de interferență.

Tratarea difracției așa cum s-a făcut la capitolul precedent, este doar fenomenologică, explicația completă fiind posibilă doar pe baza conceptului de foton.

*Unda asociată fotonului*, face ca acesta să nu mai cadă totdeauna în același punct de pe ecran la repetarea trecerii lui prin rețeaua de difracție. O succesiune de fotoni identici, trecând prin același orificiu, cade pe placa fotografică aparent haotic.

La un număr foarte mare de fotoni identici începe să se vadă că în anumite locuri s-au produs *franje luminoase*, aici probabilitatea de cădere este mai mare decât în locurile unde s-au produs *franje întunecoase*.

Deci putem descrie comportarea fotonilor numai în mod statistic: atâția electroni din total, fără să știm care anume, vor cade în această regiune.

Putem spune doar cu ce probabilitate va cade un foton într-un punct anume de pe ecran.

Din experiențele de difracție efectuate cu diverse fluxuri de radiație, s-a constatat că imaginea nu se schimbă mult, devine mai clară, este mai bine definită la fluxuri mai mari.

Se poate conchide că legile cuantice se aplică nu numai la totalitatea fotonilor ci de asemenea și fiecărui foton în parte.

Trecerea fiecărui foton prin orificiul panoului, respectă niște legi pe care le sesizăm doar când observăm un ansamblu de fotoni suficient de mare numit *ansamblu statistic*.

Densitatea de înnegrire (pe negativ) este, pe de altă parte, direct proporțională cu iluminarea plăcii fotografice. Cum densitatea de înnegrire este proporțională cu numărul de fotoni căzuți pe unitatea de suprafață în unitatea de timp notat cu  $n_0$  rezultă proporționalitatea:

$$I \approx n_0$$

Dar  $n_0$  ca și  $I$  caracterizează probabilitatea de cădere a unui foton într-un anumit punct din spațiu, deci putem lega această probabilitate de amplitudinea  $A$  a unde asociate de care depinde intensitatea  $I$  și iluminarea  $E$  în felul următor:

$$I \approx A^2 \quad \text{dar} \quad I \approx E \quad \text{deci} \quad E \approx A^2 \quad \text{iar} \quad A^2 \approx n_0$$



Pătratul amplitudinii undei luminoase într-un punct dat este o măsură a probabilității de cădere al fotonilor în acel punct. Astfel am ajuns la o nouă concluzie mai prietenoasă:

- proprietățile corpusculare și cele ondulatorii nu se exclud ci se completează cum nu se poate mai bine: Proprietățile corpusculare sunt reprezentate prin masă, impuls energie concentrată, iar proprietățile ondulatorii determină caracterul probabilistic al localizării fotonilor în spațiu.

### 7.7. Natura duală, (corpuscul- undă), a materiei

În 1925, Louis de Broglie, a exprimat ipoteza că în mod logic, caracterul dual nu este caracteristic doar luminii ci și tuturor microparticulelor materiale: *electroni, nucleoni, atomi, molecule*, etc. Cu alte cuvinte trebuie să atribuim un caracter ondulatoriu și particulelor cărora le cunoșteam doar caracterul corpuscular.

Dacă pentru lumină, noțiunea de foton a unificat caracterul dual în mintea noastră, la particule acest lucru lasă de dorit datorită și denumirii tradiționale care nu permite nici un echivoc.

Se impune, (din punct de vedere didactic), adoptarea unei denumiri generalizatoare prin care să se înțeleagă că orice particulă materială este caracterizată simultan de proprietăți pur corpusculare și de proprietăți pur ondulatorii. Aceste proprietăți se manifestă într-o măsură mai mare sau mai mică cum am văzut și la foton.

Noțiunea nouă care poate reflecta mai adecvat această dualitate (dar numai de interes didactic) o obținem prin juxtapunerea prescurtărilor a două cuvinte sugestive din limba franceză: *corpuscule - onde*. Obținem cuvântul *corpond* și în cele ce urmează va fi folosit cu această semnificație.

Noțiunea de *corpond* trebuie introdusă ca o geneneralizare a noțiunii de foton, care este potrivită numai pentru lumină.

Deci corpond-ul reprezintă orice particulă caracterizată prin proprietăți duale cum sunt: *fotonul, electronul*, alte particule elementare ca *nucleoni, atomi, molecule*, ansambluri de atomi și molecule.

Conform teoriei De Broglie, oricărei particule de masă  $m$  și impuls  $p$ , se atașează o undă numită *undă asociată*, având lungimea de undă:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad w = h \cdot \nu = \frac{h \cdot c}{\lambda}$$



Pentru particulele electrizate ce pot fi accelerate la o diferență de potential  $U$ , lungimea de undă asociată depinde tensiunea de accelerare:

$$w = e \cdot U \quad \text{dar} \quad w = \frac{p^2}{2 \cdot m} \quad p = \sqrt{2 \cdot m \cdot e \cdot U}$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m \cdot e \cdot U}} = \frac{12,25}{\sqrt{U}} \cdot \text{\AA}$$

Această relație a fost verificată experimental în 1927 de către C. J. Davidson și L. N. Germer la împrăștierea electronilor pe un monocristal de nichel. Trimitând un fascicol de electroni accelerați la o tensiune variabilă  $U$  pe un monocristal de nichel și măsurând cu ajutorul cilindrului Faraday (sau cameră de ionizare) fixat la un unghi de  $65^\circ$  față de planul cristalului numărul electronilor difuzați pe aceasta direcție, ei au observat că la energia de  $54 \text{ eV}$  se obține un maxim de electroni reflectați, fapt ce nu poate fi explicat prin teoria clasică.

După formula lui De Broglie, aflăm pentru electroni:

$$U = 54 \text{ eV} \quad \lambda = 1,67 \text{ \AA}$$

Prin analogie cu experiențele de împrăștiere a radiațiilor X, s-au imaginat experiențe de împrăștiere a electronilor pe alte cristale urmărind să se vadă dacă aceasta se face tot după o relație de tip Wulf-Bragg:

$$n \cdot \lambda = 2 \cdot d \cdot \sin \theta$$

Reprezentând grafic intensitatea curentului dat de cușca Faraday, ceea ce este totuna cu numărul de electroni ce intră în cilindru în unitatea de timp, se obține un grafic ca în figura următoare:

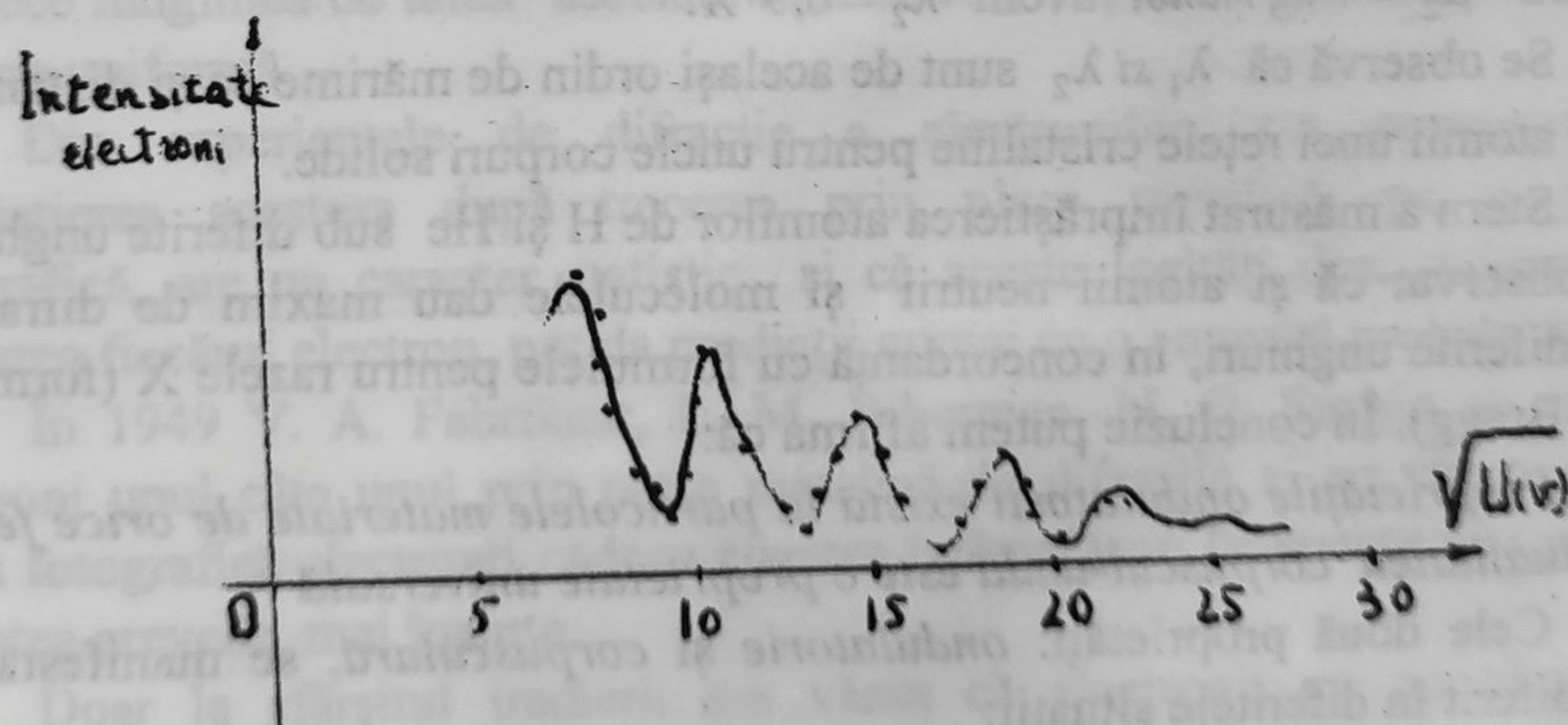


Fig. 184

Folosind formula Bragg pentru  $n = 1$  și  $\theta = 65^\circ$  se obține pentru  $\lambda$  valoarea  $\lambda = 2 \cdot 0,91 \cdot \sin 65^\circ = 1,65 \text{ \AA}$ .



Lungimea de undă calculată după relația Wulf-Bragg (caracteristică radiațiilor X) coincide cu bună precizie cu lungimea de undă calculată mai sus după relația De Broglie. Deci se confirmă caracterul ondulatoriu al electronilor.

După experiențele Wulf-Bragg au urmat experiențele de trecere a fasciculelor de electroni prin plăci metalice subțiri cu grosime de  $1\mu m$  cu structură policristalină.

S-au obținut inele de difracție asemănătoare cu inelele produse de razele X prin difracție ceea ce dovedește o dată în plus, caracterul ondulatoriu al electronilor.

În 1929 Stern a imaginat o experiență de difracție cu atomi de hidrogen iar în 1932 a efectuat același gen de experiențe cu molecule de hidrogen.

Pentru evaluarea lungimii de undă De Broglie, s-a luat viteza cea mai probabilă, corespunzătoare temperaturii de echilibru cu mediul înconjurător:

$$v = \frac{2 \cdot R \cdot T}{\mu} \quad \text{cu} \quad m = \frac{\mu}{N_A} \quad \text{deci} \quad \lambda = \frac{h \cdot N_A}{\sqrt{2 \cdot \mu \cdot R \cdot T}}$$

exprimată mai comod:

$$\lambda = \frac{30,4}{\sqrt{\mu \cdot T}} \text{ \AA}$$

La temperatura  $T = 360 \text{ K}$ , pentru hidrogen care are masa molară  $\mu_1 = 2 \cdot \text{kg/kmol}$  unda asociată are valoarea teoretică  $\lambda_1 = 1,3 \cdot \text{\AA}$  iar pentru heliu cu  $\mu_2 = 4 \cdot \text{kg/kmol}$  avem  $\lambda_2 = 0,9 \cdot \text{\AA}$ .

Se observă că  $\lambda_1$  și  $\lambda_2$  sunt de același ordin de mărime ca și distanțele dintre atomii unei rețele cristaline pentru unele corpuri solide.

Stern a măsurat împrăștierea atomilor de H și He sub diferite unghiuri și a observat că și atomii neutrii și moleculele dau maxim de difracție după diferite unghiuri, în concordanță cu formulele pentru razele X (formula Wulf-Bragg). În concluzie putem afirma că:

*Proprietățile ondulatorii există la particolele materiale de orice fel și deci dualitatea corpuscul-undă este o proprietate universală.*

Cele două proprietăți: ondulatorie și corpusculară, se manifestă în mod diferit în diferitele situații:

- la viteze mici corpul prezintă mai evidente proprietăți ondulatorii căci lungimea de undă asociată este mai mare. În repaos  $v = 0$  și deci  $\lambda \rightarrow \infty$ .

- la viteze mari lungimea de undă asociată este din ce în ce mai mică și vor fi mai evidente proprietățile corpusculare.



Corpurile macroscopice având masă mare, la viteze termice prezintă lungimi de undă asociate extrem de mici, mai mici decât diametrul corpului ca în exemplul următor:

- pentru o alică de plumb cu masa de  $1\text{ g}$  și viteza de  $100\text{ m/s}$  lungimea de undă asociată este de  $\lambda = 6,6 \cdot 10^{-33}\text{ cm}$ .

O asemenea lungime de undă este mai mică decât diametrul unui atom, deci nu se poate pune în evidență, prin nici un fel de experiențe de difracție, corpul se comportă ca un corp și se supune legilor mecanice clasice și relativiste, după caz.

Mărimea constantei Planck devine un indicator pentru luarea în considerare a proprietăților ondulatorii:

- când  $h$  se poate neglija atunci și  $\lambda$  se poate neglija și aceasta este situația pentru toate corpurile macroscopice.

- când  $h$  nu se poate neglija nici  $\lambda$  nu se poate neglija, corpul se supune Mecanicii Ondulatorii.

### 7.8. Sensul probabilistic al undelor De Broglie

Natura undelor asociate nu este cunoscută în prezent, tot ce se știe este că nu sunt unde de tip cunoscut: electromagnetice sau gravitationale.

Deși proprietățile ondulatorii apar numai la particulele în mișcare, acestea nu sunt rezultatul accelerațiilor cu care se mișcă particulele deoarece lungimea de undă asociată este aceeași și pentru particula aflată în mișcare uniformă.

Din experiențele de difracție a electronilor, s-a constatat că împrăștierea acestora după trecerea prin placa metalică, pe o placă fotografică, are un caracter statistic și că aceste legități deși guvernează mișcarea fiecărui electron, pot da predicții numai cu o anumită probabilitate.

În 1949 V. A. Fabrikant, L. M. Biberman, N. G. Suskin au trimis electroni unul câte unul prin placa metalică de difracție și au văzut că pe placa fotografică electronii cădeau aparent întâmplător, în puncte în care nu se putea prevedea mai înainte.

Doar la sfârșitul iradierii s-a văzut că electronii nu au căzut la întâmplare: au căzut cu cea mai mare probabilitate în punctele de maxim prezise de teoria ondulatorie.

Figura de difracție era cu atât mai clară, mai bine definită, cu cât numărul electronilor împrăștiați era mai mare.



Din punctul de vedere al teoriei ondulatorii, maxim de interferență înseamnă însă o amplitudine mai mare a undei. Aceasta permite să se interpreteze probabilistic amplitudinea undei De Broglie:

***Pătratul modulului amplitudinii undei De Broglie într-un punct este o măsură a probabilității ca particula să se găsească în acel punct.***

Există o funcție  $\Psi(x, y, z, t)$  care descrie probabilitatea de găsim a corpond-ului într-un punct de coordonate  $(x, y, z)$  din spațiu, la un anumit moment de timp  $t$  numită *funcție de undă*.

Ținând cont că pătratul modulului său este echivalent cu pătratul amplitudinii funcției de undă,  $|\Psi|^2$  măsoară probabilitatea corpond-ului de a se afla la momentul  $t$  în unitatea de volum. Expresia  $|\Psi|^2 \cdot dV$  se numește densitate de probabilitate și se poate calcula astfel  $\Psi \cdot \Psi^* \cdot dV$  căci este în general o funcție complexă.

Funcția de undă se cunoaște doar pentru o undă plană și este de forma:

$$\Psi(x, y, z, t) = e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Acestei densități de probabilitate i se impune condiția ca integrala de volum pe tot spațiul (deci suma tuturor probabilităților) să fie egală cu unitatea, ceea ce înseamnă *certitudine*.

Din punct de vedere fizic egalitatea cu unu, înseamnă că probabilitatea de a găsi corpond-ul descris de funcția de undă  $\Psi$  în tot spațiul este egală cu unu deci se găsește cu certitudine undeva în spațiu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 \cdot dV = 1$$

*Funcția de undă* constituie o noțiune fundamentală pentru Mecanica Cuantică, se supune ecuației Schrodinger care determină probabilitatea tuturor stărilor posibile.

Dacă într-un punct din spațiu amplitudinea undei are valoarea zero, înseamnă că probabilitatea de găsim în acest punct a corpond-ului este neglijabil de mică.

Corpond-urile sunt reprezentate în această mecanică prin pachete de unde care sunt descrise prin funcții mai complicate decât unda plană scrisă mai sus pe care nu le prezentăm la nivelul acestei cărți.



## 7.9. Relații de nedeterminare

Natura dublă a corpond-urilor, mai implică un aspect necunoscut în mecanica clasică: poziția și impulsul, energia și momentul de timp când se măsoară, nu pot fi cunoscute simultan, cu precizii absolute ci cu nedeterminările:

$$\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z, \Delta w, \Delta t$$

care nu înseamnă erori de măsurare.

Prin **nedeterminare** înțelegem *imposibilitatea principială* de a putea măsura perechile de coordonate  $\vec{r}$  și  $\vec{p}$  cu orice precizie. Mai mult chiar, perechile de mărimi de mai sus, numite și variabile conjugate au nedeterminările în anumite raporturi între ele date de relațiile lui Heisenberg:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{2 \cdot \pi}, \quad \Delta w \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2 \cdot \pi}$$

Acest fapt nou, rezultă din proprietatea ondulatorie a corpondurilor, din comportarea probabilistă a acestora. Să vedem cum putem ajunge la aceste relații plecând de la fenomenul de difracție al unui electron pe care îl trecem printr-un orificiu de diametru  $\Delta x$ .

Această lărgime constituie măsura nedeterminării cunoașterii poziției căci electronul poate trece prin orificiu prin orice loc fără a putea preciza prin care anume punct.

Dacă notăm cu O extremitatea de jos ca origine a axei Ox, cum se arată în figură, poziția electronului pe această direcție este dată de coordonata:

$$x = x_0 + \Delta x$$

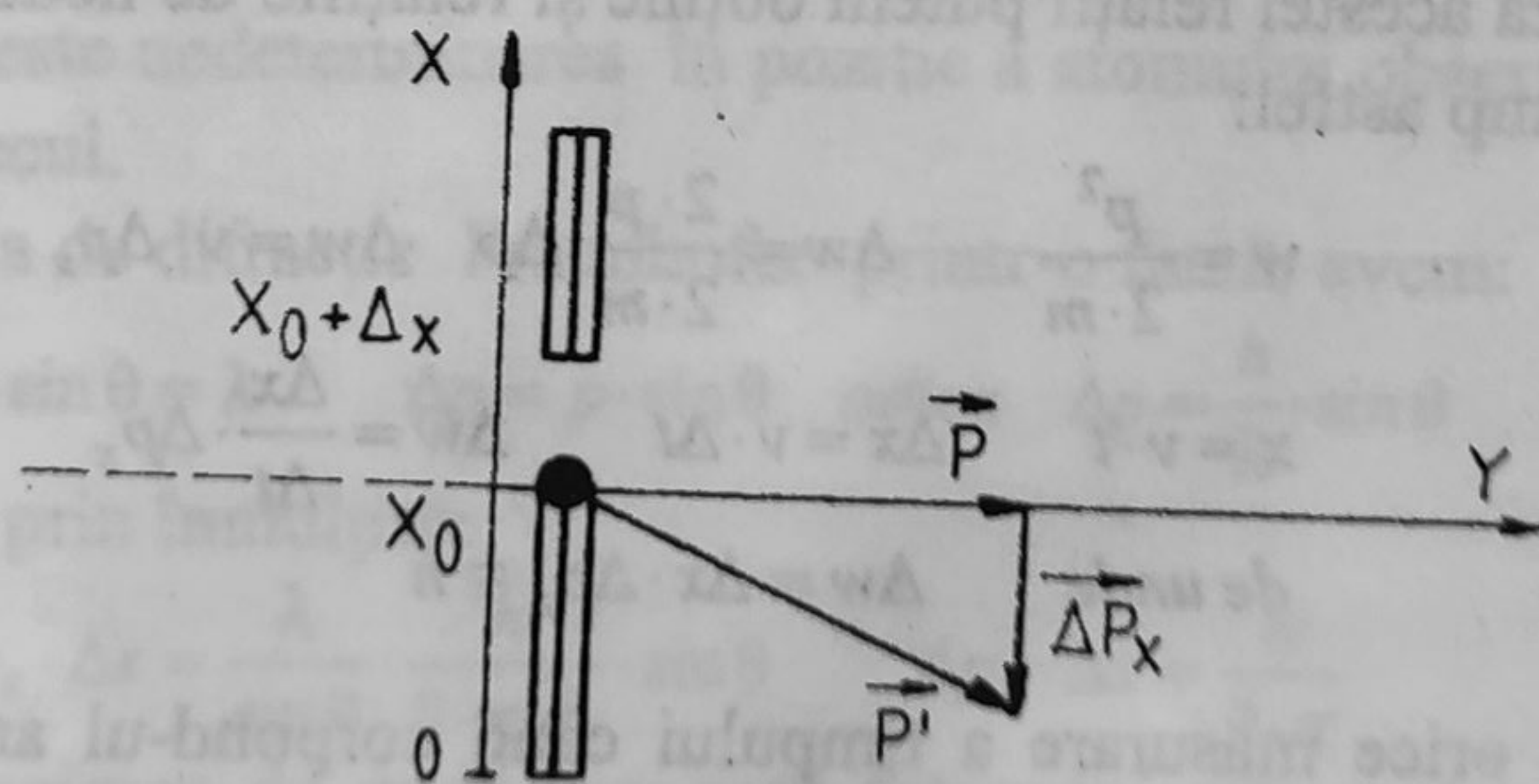


Fig. 185

Reprezentăm unda asociată electronului printr-o suprafață de undă care ajungând la deschidere se difractă, astfel încât pe ecran se produc



maxime și minime de difracție teoretice, care dau doar probabilitățile de cădere a unui singur electron pe ecran. Fie M un punct de atingere a ecranului, deplasat lateral-față de direcția de propagare inițială.

După cum știm se formează franje de difracție de intensitate din ce în ce mai mică pe măsură ce ne depărtăm de punctul central, rezultă că și probabilitatea de cădere pe ecran scade pe măsură ce ne depărtăm de centru.

Tot de la fenomenul de difracție știm că punctul M este cu atât mai depărtat de centru cu cât deschiderea  $\Delta x$  a fantei este mai mică.

Dar pentru ca electronul cu impulsul  $\vec{\Delta p}_x$  să ajungă într-un punct M trebuie ca la trecerea prin fantă să capete o componentă transversală de impuls  $\vec{\Delta p}_x$  prin interacția undei asociate cu fanta.

Deci impulsul particulei este cunoscut cu nedeterminarea  $\Delta p_x$ :

$$\vec{p}_x = \vec{p}_0 + \vec{\Delta p}_x$$

Întrucât  $\vec{\Delta p}_x$  poate fi oarecare între 0 și  $\vec{p}_0$  vom considera pentru componenta transversală o valoare medie:

$$\Delta p_x = p \cdot \sin \theta$$

unde  $\theta$  este valoarea medie a unghiului de deviere.

Conform reprezentării ondulatorii, unghiul  $\theta$  este legat de lărgimea  $\Delta x$  și lungimea de undă  $\lambda$  prin condiția de maxim:  $x \cdot \sin \theta = k \cdot \lambda$  care ne dă pentru  $k = 1$   $x \cdot \sin \theta = \frac{h}{p}$  deoarece  $\Delta p_x = p \cdot \sin \theta$  rezultă din cele două relații, prin înmulțire:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{2 \cdot \pi} \text{ sau } \Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar \quad (\hbar = \frac{h}{2 \cdot \pi}).$$

Pe baza acestei relații putem obține și relațiile de nedeterminare pentru energie și timp astfel:

$$w = \frac{p^2}{2 \cdot m} \quad \Delta w = \frac{2 \cdot p}{2 \cdot m} \cdot \Delta p \quad \Delta w = v \cdot \Delta p_x$$

$$x = v \cdot t \quad \Delta x = v \cdot \Delta t \quad \Delta w = \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \Delta p_x$$

$$\text{de unde} \quad \Delta w = \Delta x \cdot \Delta p_x \cong h$$

Deci orice măsurare a timpului când corpond-ul are energia  $W$  este afectat de o nedeterminare  $\Delta t$  invers proporțională cu  $\Delta W$ .

O consecință imediată a acestor relații de nedeterminare este dependența puterii de rezoluție a unui microscop de lungimea de undă a a radiației folosită la iluminarea obiectelor.



Astfel, pentru a determina poziția unui atom (din construcția unei celule vegetale, spre exemplu) îl iluminăm în microscopul optic cu un flux de fotoni cu lungimea de undă cuprinsă în domeniul vizibil, cu  $\lambda \in (760 = 400) \text{ nm}$ .

Acest foton interacționează cu atomul prin fenomenul de împrăștiere elastică de tip Compton, în urma căruia apare o nouă cuantă cu lungimea de undă  $\lambda'$  dirijată cu anumite probabilități pe toate direcțiile din spațiu, dar numai o parte intră în *unghiul de deschidere* al microscopului, numit *apertură*, notată cu  $\alpha$  pe desenul de mai jos.

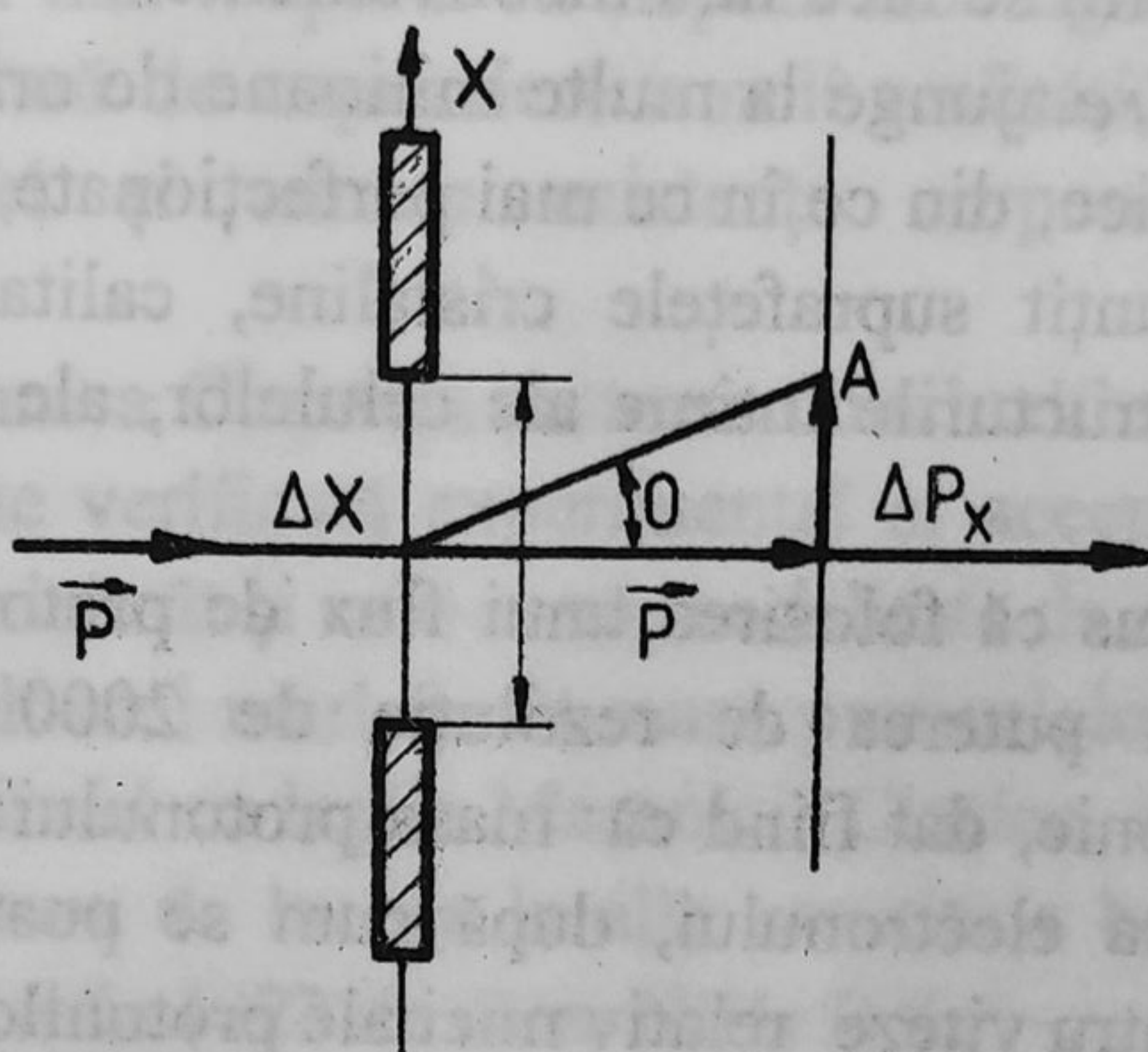


Fig. 186

După cum se vede de pe figură, cu cât acest unghi este mai mare cu atât o mai mare parte din fotonii împrăștiați intră în sistemul optic și apoi la ochi îmbunătățind imaginea.

Dar pentru unda plană asociată fotonului, apertura  $\alpha$  este unghi de difracție, iar  $\Delta x$  este nedeterminarea în poziție a atomului observat generată de impulsul de recul.

Din condiția de difracție Fraunhofer printr-o fantă, avem:

$$\Delta x \cdot \sin \theta = \lambda \quad \Delta p = p \cdot \sin \theta \quad \text{adica} \quad \Delta p = \frac{h}{\lambda} \cdot \sin \theta$$

de unde obținem prin înmulțire:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x = \frac{\lambda}{\sin \theta} \cdot \frac{h}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \sin \theta \quad \Delta p_x \cdot \Delta x = \frac{h}{2 \cdot \pi}$$

Cu cât lungimea de undă asociată fotonului este mai mică cu atât  $\Delta x$  este mai mic, deci o creștere a puterii de rezoluție.

Dar prin micșorarea lungimii de undă crește și energia undei și la ciocnirea cu atomul poate produce alte fenomene nedorite: *excitări*.



ionizari, distrugeri de celule ce nu convin, toate acestea limitează puterea de mărire a microscopului optic la mărimi doar de câteva mii de ori.

Odată cu descoperirea proprietăților ondulatorii la electroni, s-a creat o optică a fasciculelor de electroni, mult mai potrivită pentru creșterea puterii de rezoluție, inventându-se *microscopul electronic*.

*Puterea de rezoluție* a acestui microscop este mult mai bună deoarece lungimea de undă asociată electronului este de același ordin de mărime cu cea a razelor X dure, dar datorită masei mari, viteza electronului, și deci energia lui cinetică, este mult mai mică decât la fotonii radiației X iar împrăștierea lor pe atomi se face fără inconveniente.

*Puterea de mărire* ajunge la multe milioane de ori. Cu ajutorul acestor microscopice electronice, din ce în ce mai perfecționate, cu baleiaj electronic se pot studia amănunțit suprafețele cristaline, calitatea tratamentelor, a aliajelor, precum și structurile intime ale celulelor, ale bacteriilor și chiar a unor virusuri.

Este de presupus că folosirea unui flux de protoni într-un *microscop protonic* poate mări puterea de rezoluție de 2000 ori față de cea a microscopului electronic, dat fiind că masa protonului este de cca 2000 ori mai mare decât masa electronului, după cum se poate vede din formula De Broglie, chiar pentru viteze relativ mici ale protonilor.

#### 7.10. Observații la relațiile de nedeterminare

1. Nedeterminarea în impuls  $\Delta p$  pentru o particulă ce se mișcă cu o viteză absolut constantă implică o nedeterminare  $\Delta x \rightarrow \infty$ , ceea ce înseamnă că particula se poate afla în tot spațiul cu probabilitate egală.

Evident că o viteză și deci un impuls absolut constant nu există, încât apare o nedeterminare  $\Delta p$  care de la caz la caz se apreciază mai mult sau mai puțin nulă, cum este cazul unei particule ce se mișcă cu viteze de ordinul sutelor de km/s, o nedeterminare de câțiva m/s se poate neglija.

Nedeterminarea în cunoașterea impulsului  $\Delta p$  legată de nedeterminarea în cunoașterea poziției  $\Delta x$ , contrazice determinismul din mecanica clasică.

Din legile lui Newton se știe că prin cunoașterea exactă, la un moment dat, a poziției și a impulsului, cu ajutorul legii a doua scrisă sub forma unei ecuații diferențiale, se poate determina, și se poate cunoaște exact poziția și impulsul la orice moment ulterior de timp.



Această idee de a putea cunoaște exact evoluția corpurilor a devenit o *idee seducătoare* pentru filozofii secolului trecut și o confundau cu posibilitatea omului de a cunoaște natura.

Acceptarea ideii de caracter probabilistic, de necunoaștere a poziției și a impulsului simultan cu orice precizie dar în cadrul unei constrângeri (relațiile Heisenberg) au încrâncenat pe filozofii marxiști care au caracterizat această idee ca o formă de *agnosticism* apărută în Fizica Cuantică, respingînd-o.

Dar dacă problema ar fi fost discutată numai de către oamenii de știință, contradicția n-ar mai fi apărut ca dispută ideologică, căci fizicienii, au avut elasticitatea necesară de cuprindere a noii realități, temeinic verificată experimental de altfel și anume existența corpurilor cu tot ce implică acestea.

În prezent Mecanica Cuantică cu toate concluziile ce se desprind pe plan filozofic, este bine verificată experimental și acceptată atât ca formă nouă de scriere a materiei cât și ca o nouă modalitate de cunoaștere.

Pentru mase mult mai mari decât masa particulelor elementare, legile Mecanicii Cuantice coincid cu legile Mecanicii Clasice. Aceasta apare ca un caz particular, iar trecerea de la una la alta constituie baza **principiului de corespondență** formulat în 1923 de către Niels Bohr:

*Mecanica Ondulatorie trebuie să ajungă, atunci când este aplicată la corpuri macroscopice (mase mari, orbite de dimensiuni mari) la aceleași rezultate ca și în Mecanica Clasică.*

### 7.11. Probleme rezolvate

1. Un electron cu masa  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot \text{kg}$  și sarcina  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot \text{C}$ , lasă o urmă, prin ionizare, pe o placă fotosensibilă cu o grosime de  $10^{-6} \cdot \text{m}$ , iar din măsurători de deviere în câmp magnetic rezultă că viteza acestuia este de ordinul a  $10^6 \cdot \text{m/s}$ . Să se afle:

- a) nedeterminarea în cunoaștere a poziției pe placă;
- b) imprecizia de cunoaștere a vitezei, măsurată prin procedeele clasice;
- c) să se compare imprecizia de cunoaștere a poziției și vitezei cu valorile absolute ale poziției și vitezei și să se arate dacă în această situație se poate vorbi de mișcarea electronului pe o traiectorie bine determinată și pe care se mișcă cu o viteză bine cunoscută.



Datele problemei:

$$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot \text{kg} \quad e = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot \text{C}$$

$$d = 10^{-6} \cdot \text{m} \quad v = 10^6 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

-----

a)  $\Delta x = ?$  b)  $\Delta v = ?$

c)  $\frac{\Delta x}{x} = ? \quad \frac{\Delta v}{v} = ?$

a)  $\Delta x = 10^{-6} \cdot \text{m} = 1 \mu\text{m}$  coincide cu lărgimea traiectoriei pe emulsia fotografică.

b)  $\Delta v = 100 \cdot \text{m/s}$

c) din compararea lui  $\Delta x$  cu dimensiunile plăcii fotografice, care este de ordinul centimetrilor, se poate aprecia că poziția electronului este determinată mulțumitor, iar din compararea lui  $\Delta v$  cu viteza electronului se vede că această nedeterminare este mult mai mică, se poate considera ca eroare neglijabilă.

2. Mișcarea unui electron în atomul de hidrogen se face pe o *traiectorie de satelit* într-un volum sferic cu diametrul de ordinul a  $10^{-10} \cdot \text{m}$ .

- a) Să se calculeze nedeterminarea în cunoaștere a poziției și vitezei;  
b) Să se arate dacă în acest caz se poate vorbi de o mișcare a electronului pe o traiectorie bine determinată și pe care se mișcă cu o viteză bine cunoscută.

Datele problemei:

$$d = 10^{-10} \cdot \text{m}$$

-----

a)  $\Delta x = ? \quad \Delta v = ?$

a)  $\Delta x = 10^{-10} \cdot \text{m}$  din  $\Delta v = \frac{h}{m \cdot \Delta x \cdot 2 \cdot \pi} \quad \Delta v \cong 10^6 \cdot \text{m/s}$

b) Din condiția mecanică de rotație pe un cerc în câmpul forțelor electrostatice se deduce expresia pentru viteză:

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{Z \cdot e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \quad \text{se obține:}$$

$$v^2 = \frac{Z \cdot e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r \cdot m} = 1,5 \cdot 10^6 \cdot \text{m/s}$$



Se observă că viteza de rotație este mult mai mică decât nedeterminarea cunoașterii vitezei:  $v \ll \Delta v$  deci nu se poate vorbi de o mișcare circulară bine definită.

3. Mișcarea unei alice de plumb cu masa de  $10^{-10} \cdot \text{kg}$  și cu un diametru de  $1 \mu\text{m}$  se face cunoscând poziția cu o precizie de  $1/10$  dintr-un  $\mu\text{m}$ , să se calculeze:

a) nedeterminările  $\Delta x$  și  $\Delta v$ :

b) dacă se pot neglija efectele cuantice la descrierea acestei mișcări.

Datele problemei:

$$m = 10^{-10} \cdot \text{kg} \quad d = 1 \mu\text{m}$$

-----  
a)  $\Delta x = ? \quad \Delta v = ?$

a)  $\Delta x = 10^{-7} \cdot \text{m} \quad \Delta v = 10^{-12} \text{m/s}$

b) Erorile  $\Delta x$  și  $\Delta v$  sunt complet neglijabile chiar și în acest caz, deci mișcarea este complet clasică.

**Concluzie:** Pentru corpurile macroscopice, relațiile de nedeterminare nu aduc nici un fel de limitare supărătoare a preciziei măsurătorii simultane a coordonatelor conjugate căci în acest caz putem neglija constanta lui Planck:  $h \rightarrow 0$ .

**Trecerea de la  $h=0$  la  $h \neq 0$  înseamnă de fapt trecerea de la Mecanica Clasică la Mecanica Cuantică.**



## CAPITOLUL VIII

### TESTE DE OPTICĂ ȘI FIZICĂ CUANTICĂ

#### 8.1. Instrucțiuni de utilizare

Testele prezentate sunt astfel alese încât, pentru un elev cu o bună pregătire intelectuală timpul necesar rezolvării să fie mai puțin de una oră pentru fiecare capitol.

Se recomandă parcurgerea în ordine, lucru ce va ajuta la sistematizarea materiei iar întrebările se succed în ordinea prezentată în manuale.

Din fiecare capitol s-au ales acele întrebări și probleme expeditiv care dovedesc că și în cazuri mai dificile candidații se pot descurca.

Punctajul problemelor se dă lângă răspunsul la întrebări și constă în notarea cu un punct la răspunsul ce nu depășește 30 secunde, cu două puncte problemele la care răspunsul se poate da numai după efectuarea unor calcule simple ce nu depășesc timpul de 2 minute și cu trei puncte acele probleme la care răspunsul se poate da numai după efectuarea unor calcule mai complicate care nu depășesc 4 minute.

În toate aceste evaluări s-au presupus cunoscute pe de rost constantele fizice mai răspândite (pentru cei ce nu le cunosc le-am dat în text o singură dată) și că elevul are în față tabelele trigonometrice sau un calculator de buzunar cu funcții trigonometrice.

- Dacă la prima parcurgere a testelor v-ați încadrat perfect în timp și ați răspuns corect la mai mult de 90 % din subiecte, vă puteți felicita, *aveți șanse mari de reușită*.

- Dacă v-ați încadrat în timp dar procentul de soluții corecte este mai mic de 80 %, șansele se micșorează mult, dacă vă prezentați astfel la examen vă bazați pe *baftă*.



- Dacă dați răspuns la toate întrebările dar depășiți timpul înseamnă ca sunteți apt de a participa cu șanse mari de reușită, dar înainte de examen trebuie să vă propuneți să lucrați mai repede, să fixați mai bine cunoștințele.

Dacă la prima parcurgere vă ajutați cu manualul, testul își pierde principala utilitate, aceea de măsurare a performanțelor, rămânând util pentru exersarea cunoștințelor.

Dacă la a doua parcurgere (după însușirea aprecierii ca *neeficientă* prima pregătire), lucrurile se îmbunătățesc în sensul încadrării în timp și procent mai mare de 90% la răspunsuri corecte, șansele de reușită sunt totuși bune și vă puteți prezenta la examen ca un candidat serios.

Dacă nici la această parcurgere nu dați răspunsuri satisfăcătoare atunci luați un *preparator* căci metodele de învățat de până acum ale dv. nu sunt eficiente (dacă sunteți sigur că vă place ceea ce învățați!).

**Testele de tipul II** conțin mai multe afirmații a,b,c,d, trebuie aleasă combinația corectă răspunsul fiind dat prin alegerea tipului ca mai jos:

A soluțiile a,b,c sunt corecte;

B soluțiile a,c sunt corecte;

C soluțiile b,d sunt corecte;

D soluția d este corectă;

E soluțiile sunt toate corecte sau toate false.

**Testele de tipul III** conțin întrebări de tipul: *cauză - efect*, răspunsul poate avea tot 5 variante:

A ambele propoziții sunt adevărate și există între ele o relație de *cauză-efect*;

B ambele propoziții sunt corecte dar nu există relație de cauză-efect;

C dacă propoziția 1 este adevărată, propoziția 2 este falsă;

D dacă propoziția 1 este falsă, propoziția 2 este adevărată;

E ambele propoziții sunt false.

Testele prezentate aici sunt un model, puteți încerca să compuneți singuri teste de verificare, eventual și din alte capitole.

## 8.2. Teste optică tipul I

1. *Fluxul luminos* emis într-un unghi solid egal cu un steradian de către un izvor luminos punctiform cu intensitatea de 1 candelă este:

a) lux   b) lumen   c) candelă.



2. Un bec fixat pe un perete emite lumină în toate direcțiile posibile în mod egal cu intensitatea de 60 cd. Pe peretele de vis-a-vis la distanța de 4 m se află două tablouri, unul la aceeași înălțime ca becul, celălalt mai jos cu un metru.

1) De câte ori iluminarea tabloului de sus este mai mare decât iluminarea tabloului de jos:

a) 5,2 ori b) 4,38 ori c) 2,14 ori.

2) Iluminarea tabloului de la aceeași înălțime este:

a) 4,38 lx b) 10 lx c) 3,75 lx.

3. Pentru radiația de 550 nm emisă de o lampă spectrală, echivalentul fotometric este de 675 lm/w, fluxul luminos produs de un bec de 10 W este:

a) 6750 lm b) 67,5 lm c) 6,75 lm.

4. Într-un experiment de tip Fizeau, lungimea drumului străbătut de o rază de lumină de la prima până la a doua roată dințată este de 54 km. Cât de turație trebuie să aibă roțile dințate pentru a observa prima obturare a luminii care trece prin cei 100 dinți ai roților:

a)  $1,6666 \cdot 10^3$  rot/min b) 2000,5 rot/min c) 1000 rot/min.

5. Undele coerente sunt undele care:

a) au aceeași frecvență, faze diferite;

b) au aceeași fază dar frecvențe diferite;

c) aceeași frecvență și faze constante.

6. Dispozitivul Yuong

1) este format din:

a) două fante b) o fantă c) mai multe fante mecanice;

2) verifică:

a) principiul Huygens b) legea polarizării c) reflexia;

3) produce franje:

a) localizate b) nelocalizate c) fixate.

7. Culorile de pe baloanele de săpun sau de pe peliculele de ulei pe suprafața apei se produc datorită:

a) dispersiei după lungimile de undă;

b) interferenței cu franje localizate la infinit;

c) interferenței cu franje localizate pe peliculă.



8. **Optica albastră** aplicată la obiectivul aparatului de fotografiat se bazează pe interferența într-un strat subțire de criolit cu grosimea de  $\lambda/2$ . Pe peliculă se realizează:

- a) *maxim de interferență pentru radiația de 550 nm;*
- b) *minim de interferență pentru radiația de 550 nm;*
- c) *interferență numai pentru lungimile de undă mici, albastre.*

9. **Pana optică** are:

- 1) Interfranja dată de relația:
  - a)  $D \cdot \lambda / 2 \cdot l$  b)  $2 \cdot \alpha \cdot n$  c)  $2 \cdot \alpha \cdot \lambda / n$ ;
- 2) folosește la controlul planeității unei lame. Când lama are fețele perfect plane se observă:
  - a) *franje drepte și paralele;*
  - b) *franje curbe și paralele;*
  - c) *nici o franjă, doar o iluminare uniformă;*
- 3) când razele incidente formează un unghi cu suprafața penei de sticlă, franjele sunt:
  - a) *localizate pe suprafața penei;*
  - b) *sunt dispuse într-un plan ce trece prin vârful penei;*
  - c) *nu sunt localizate.*

10. Dacă se introduce o plăcuță transparentă de sticlă cu indice de refracție de 1,5 în calea unei raze ce iese din fanta dispozitivului Young, astfel încât franja centrală luminoasă formată de radiația de 550 nm, se deplasează față de poziția franjei centrale produsă fără lamă, grosimea lamei este de:

- a) 1 mm b) 21  $\mu\text{m}$  c) 11  $\mu\text{m}$ .

11. Pentru măsurarea unghiului format de fețele unei plăci de sticlă cu fețe plane și indice de refracție de 1,35 se trimite un fascicol de radiație cu lungimea de undă de 550 nm obținându-se trei franje luminoase pe centimetru. Unghiul dintre cele două fețe paralele este:

- a) 0 rad (0° 00' 00");
- b)  $61,11 \cdot 10^{-4}$  rad (0° 00' 12");
- c)  $15 \cdot 10^{-3}$  rad (0° 00' 31").



12. Difrakția în lumină paralelă monocromatică:

1) se face pe o singură fantă dreptunghiulară iar figura de interferență este formată din:

- a) franje luminoase paralele de egală intensitate;
- b) franja luminoasă din mijloc fiind cea mai luminoasă;
- c) franje circulare de egală intensitate;

2) se face pe mai multe fante dreptunghiulare aparând diferența de drum:

a)  $\delta = l \cdot (\sin i - \sin \alpha)$ ;

b)  $\delta = l \cdot (\sin i + \sin \alpha)$ ;

c)  $\delta = \frac{l}{\sin i \pm \sin \alpha}$ .

13. Pentru măsurarea lungimii de undă a unei surse monocromatice se trimit razele perpendicular pe o rețea de difracție cu constanta de  $10 \mu\text{m}$  printr-o lentilă cu distanța focală de  $1 \text{ m}$  și se observă ca ultima franjă de ordinul 10 se află la distanța de  $45 \text{ cm}$  de franja centrală.

Răspuns: a)  $500 \text{ nm}$  b)  $450 \text{ nm}$  c)  $315 \text{ nm}$ .

14. Pentru ce lungime de undă din fascicolul de lumină albă cu incidență normală pe o rețea de difracție, linia de ordinul 4 al acesteia se suprapune peste linia de culoare roșie cu  $\lambda = 700 \text{ nm}$  din același spectru dar de ordinul 3.

Răspuns: a)  $820 \text{ nm}$  b)  $525 \text{ nm}$  c)  $720 \text{ nm}$ .

15. Se trimite o radiație monocromatică de  $550 \text{ nm}$  normal pe o rețea de difracție cu  $500$  trăsături /  $\text{mm}$ , se constată că numărul maxim de franje luminoase ce se poate forma de o parte a franjei centrale este diferit:

1) la rețeaua cu  $500 \text{ tr/mm}$ : a) 10 b) 5 c) 3;

2) la rețeaua cu  $200 \text{ tr/mm}$ : a) 10 b) 9 c) 5.

16. Lungimea de undă a unei radiații ce cade perpendicular pe o rețea cu constanta  $0,025 \text{ mm}$  ce permite o figură de difracție astfel că între maximul de ordinul 1 și cel de ordinul 2 se formează un unghi de  $1^\circ$ , are valoarea:

a)  $760 \text{ nm}$  b)  $546 \text{ nm}$  c)  $436 \text{ nm}$ ;

(Se face aproximația  $\sin \alpha \equiv \tan \alpha$   $\cos \alpha \equiv 1$ ).



17. O rază de lumină intră într-o placă de sticlă cu  $n = 1,5$  cu fețe plane sub un unghi de incidență de  $30^\circ$  și iese din placă sub un unghi de  $60^\circ$ :

1) să se răspundă dacă placa este:

a) cu fețe paralele b) cu fețe neparalele c) nu contează;

2) să se calculeze unghiul de refracție la prima suprafață:

a)  $0,3398 \text{ rad}$  ( $19^\circ 28' 16''$ );

b)  $0,0140 \text{ rad}$  ( $0^\circ 48' 7,8''$ );

c)  $0,78 \text{ rad}$  ( $44^\circ 41' 27''$ );

3) unghiul de incidență al razei pe a doua față este:

a)  $0,5235 \text{ rad}$  ( $30^\circ 30'$ );

b)  $0,6154 \text{ rad}$  ( $35^\circ 15' 51''$ );

c)  $0,2453 \text{ rad}$  ( $14^\circ 3' 16''$ ).

18. Un scafandru aflat aproape de suprafața apei vede soarele sub un unghi de  $30^\circ$  față de verticala sa. În realitate razele soarelui fac cu acea verticală unghiul de:

a)  $41^\circ 41'$  b)  $60^\circ 25'$  c)  $26^\circ 12'$ ;

19. Un scafandru trimite un semnal luminos unui alt scafandru aflat în spatele unei stânci indirect, prin reflexie pe suprafața apei:

1) unghiul format de o rază cu normala astfel încât să se realizeze comunicația este:

a)  $44^\circ 12'$  b)  $48^\circ 36'$  c)  $26^\circ 12'$ ;

2) la ce distanță față de stâncă trebuie să se depărteze pentru a realiza comunicația știind că celălalt scafandru se află la 10 m de stâncă:

a) 10 m b) 11,3 m c) 8 m ;

20. Raza de lumină ce intră într-o prismă cu  $n=1,5$  și cu unghiul de refringentă de  $90^\circ$  nu iese din prismă sub orice unghi de incidență ar sosi pe una din fețe. Din ce ar trebui confecționată prisma pentru a permite ieșirea razei cu aceeași incidență:

a) apa (într-un vas transparent cu pereții foarte subțiri;

b) sticlă crown;

c) balsam de Canada.



21. În ce caz, deviația minimă este mai mare, la o prismă din sticlă ( $n=1,5$ ) sau din diamant ( $n=2,42$ ):

a) la sticlă ; b) la diamant ; c) nu contează.

22. Pe direcția inițială a unei raze incidente ce se propagă paralel cu baza unei prisme de sticlă ( $n = 1,5$ ) și unghi de refringentă de  $60^\circ$  se află o fotocelulă. Cu câte grade trebuie deplasată fotocelula pentru a primi lumina, moment sesizat prin trecerea curentului electric prin aceasta:

a)  $37^\circ 10' 50,72''$  b)  $48^\circ 35' 25,20''$  c)  $60^\circ 02' 14''$ .

23. Se trimite un fascicul de lumină polarizată natural sub incidența brewsteriană pe o placă de sticlă ( $n = 1,5$ ) înconjurată de un mediu de indice de refracție necunoscut.

1) Cât trebuie să fie acest indice pentru ca raza reflectată să fie complet polarizată;

a) 1,33 b) 2,3 c) 1,75.

2) Ce material înconjoară placa de sticlă:

a) apa b) balsam de Canada c) diamant.

24. În fața unei lentile subțiri, cu diametru mare, dar cu centrul lentilei acoperit cu o pată opacă se află un obiect. Se respectă legile dioptrului sferic:

a) e indiferent b) nu c) da.

25. Pentru fiecare dioptru există două focare reale sau imaginare:

1) Care dintre focarele prezentate mai jos sunt imaginare;

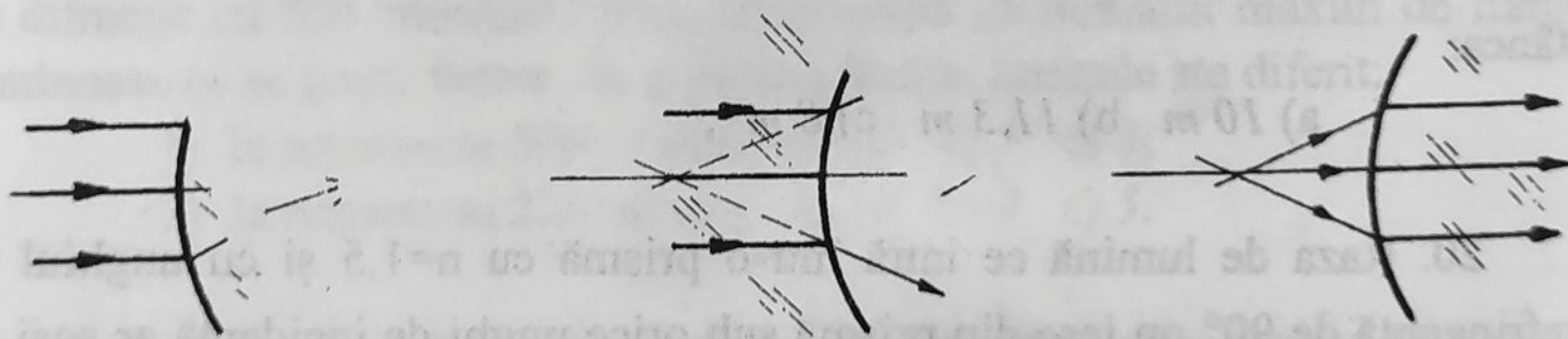


Fig. 186

2) Care distanță focală este cea imaginară: a), b), c).

26. O rază de lumină provenită de la un obiect cade pe un dioptru astfel încât mărirea liniară transversală este egală cu 4 atunci când indicii de



refracție ale celor două medii sunt respectiv 1,2 și 1,5. De câte ori este mai mare distanța imaginii obiectului față de dioptru:

- a) 5 ori   b) 1,5 ori   c) 7 ori.

27. Raportul distanțelor obiect-oglină și oglindă-imagine este egal cu 3 pentru o imagine reală în oglindă. Distanța focală este:

- a)  $3/10$  m   b) 3 m   c)  $10/3$  m.

28. Punând un obiect în fața unei lentile subțiri cu distanța focală egală cu 10 cm se obține o imagine reală la distanța de de două ori mai mare decât distanța obiectului față de lentilă. Mutând obiectul la o distanță de trei ori mai mare, imaginea se mută deasemenea la distanța:

- a) -15 cm   b) 30 cm   c) 40 cm.

29. Se lipesc două lentile subțiri cu convergența  $+4\delta$  și  $-2\delta$  respectiv, iar în fața sistemului se așează un obiect la distanța de 15 cm.

1) Imaginea sa este:

- a) reală   b) virtuală   c) la infinit.

2) Mărirea liniară a imaginii este :

- a) 2   b)  $13/5$    c)  $-10/7$ .

30. O lupă formată din două lentile alipite cu convergențe de 20 respectiv 30 dioptrii este folosită pentru obținerea unei imagini mărite văzută sub unghiul de  $5^\circ$  fără acomodarea ochiului. Mărimea obiectului este:

- a) 2 mm   b) 0,5 mm   c) 5 mm.

31. Care este puterea unui microscop dacă privind fără acomodare atât obiectul cât și imaginea sa, le vedem sub unghiurile de  $1^\circ$  respectiv  $5^\circ$ :

- a)  $14\delta$    b)  $20\delta$    c)  $50\delta$ .

32. Un microscop este format din două lentile convergente cu convergențele de 2 respectiv 20 dioptrii, aflate la distanța de 60 cm una de cealaltă.

1) Pentru un obiect situat în apropierea focarului obiectivului se obține o imagine vizibilă prin ocular:

- a) da   b) nu   c) indiferent.

2) Puterea optică a microscopului este:

- a)  $2\delta$    b)  $15\delta$    c)  $150\delta$ .



33. Luneta este un sistem afocal.

1) Imaginea creată de un astfel de sistem se formează:

a) *la infinit* b) *în focarul obiectivului* c) *la 25 cm.*

2) Grosimentul lunetei este:

a)  $1/40 X$  b)  $10 X$  c)  $1/20 X$ .

34. Prin iluminarea unui conductor neelectrizat cu radiații ultraviolete conductrul devine:

a) *electrizat pozitiv* b) *electrizat negativ* c) *neutru.*

35. Doi fotoelectroni produși de un element fotosensibil în mod diferit, unul de radiații UV, celălalt de radiația galbenă se deosebesc prin:

a) *frecvență* b) *viteză* c) *energie de legatură.*

36. Fotonul este un concept nou ce descrie caracterul dual: unda-corpusul cu care pot fi explicate unele fenomene ce nu puteau fi explicate doar prin caracterul ondulatoriu:

a) *electrizarea corpurilor iradiate;*

b) *polarizarea undelor;*

c) *interferența undelor.*

37. O radiație cu frecvența de  $2 \cdot 10^{20} \text{ Hz}$  produce fotoelectroni cu viteză nulă. Energia ce ține legați electronii în metal este:

a)  $2,5 \cdot 10^{-15} \text{ J}$  b)  $12,86 \cdot 10^{-14} \text{ J}$  c)  $25 \cdot 10^{-16} \text{ J}$ .

(Se cunoaște că  $h = 6,43 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ).

38. Intr-un tub catodic cu anod și catod fotoelectronii pot fi opriți să ajungă la anod cu o tensiune negativă de 5,2 V. Să se calculeze frecvența radiației ce produce fotoelectronii dacă lucrul mecanic de extracție este de  $2 \cdot 10^{-18} \text{ J}$ .

a)  $2,1 \cdot 10^{16} \text{ Hz}$  b)  $4,4 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$  c)  $6,65 \cdot 10^{17} \text{ Hz}$ .

39. Efectul Compton constă în:

a) *ciocniri de tipul foton-foton;*

b) *ciocniri de tipul foton-electron;*

c) *ciocniri de tipul electron-electron.*



40. Variația lungimii de undă a radiației împrăștiate sub unghiul de  $90^\circ$  este:

- a)  $5,1 \cdot 10^{-22} \text{ m}$    b)  $5,1 \cdot 10^{-18} \text{ m}$    c)  $2,4 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ .

(Se cunoaște că lungimea de undă Compton pentru electroni este  $\lambda = 2,426 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ ).

41. Care este inversul puterii de separare a unui microscop dacă viteza electronilor accelerați este de  $100 \text{ km/s}$  iar deschiderea unghiulară a obiectivului este de  $120^\circ$ . Indicele de refracție a mediului în care se află obiectul este  $1,33$ .

- a)  $200 \text{ nm}$    b)  $37,4 \text{ \AA}$    c)  $5,67 \text{ }\mu\text{m}$ .

### 8.3. Teste optică tipul II

42. După trecerea razelor de lumină prin dispozitivul Young se observă:

- a) apare o diferență de drum  $\delta = 2 \cdot x \cdot l / D$ ;  
b) pentru un maxim de interferență situat la distanța  $x$  de centrul ecranului  $\delta = k \cdot \lambda$ ;  
c) interfranja este  $i = \frac{\lambda \cdot D}{2 \cdot l}$ ;  
d) toate franjele luminoase și întunecoase au intensitate egală.

43. Franjele de interferență produse de o rază monocromatică ce cade perpendicular pe o lama subțire se formează prin interferența:

- a) razei reflectate pe prima față cu raza reflectată pe a doua față;  
b) diferența de drum este  $2 \cdot d + \frac{\lambda}{2}$ ;  
c) franjele sunt localizate la infinit;  
d) franjele apar colorate de la roșu spre violet.

44. Se prinde pe un ecran imaginea de interferență produsă de o radiație roșie cu lungimea de undă de  $690 \text{ nm}$  și se găsește că interfranja este de  $1 \text{ mm}$ . Prin înlocuirea cu radiația albastră de  $450 \text{ nm}$  se observă că:

- a) se mărește interfranja;  
b) se micșorează interfranja;  
c) numărul de franje luminoase produse de a doua radiație este mai mic decât numărul de franje produs de prima radiație;  
d) maximul central coincide pentru ambele radiații.



45. Pe o fantă dreptunghiulară îngustă cade un fascicol de lumină albă cu raze paralele, ce urmează:

- a) trec prin fantă raze de lumină și nu sunt deviate;
- b) imaginea fantei pe ecran este clară și unică;
- c) zona de umbră este net desenată;
- d) maximul central este alb iar de o parte și de alta se află maxime colorate dispuse simetric.

46. Imaginea unui punct luminos printr-un dioptru sferic este stigmatică:

- a) dacă fiecărui punct luminos îi corespunde o imagine punctiformă distinctă;
- b) pentru ca întreaga imagine să fie stigmatică trebuie folosite doar razele paraxiale;

c) relația punctelor conjugate este:

$$(n_2 \cdot x_2 - n_1 \cdot x_1) \cdot R = (n_2 - n_1) \cdot x_1 \cdot x_2$$

d) distanța focală imagine este:

$$f_2 \cdot (n_2 - n_1) = n_2 \cdot R$$

#### 8.4. Teste de optică tipul III

47. Un obiect este așezat în fața unei lentile sferice la o distanță egală cu raza de curbură, se formează o imagine reală, răsturnată și egală cu obiectul.

48. Lupa servește la observarea obiectelor mici ce nu pot fi văzute bine cu ochiul liber, imaginile prin lupă sunt văzute clar la distanță minimă de vedere clară de 0,25 m.

49. Imaginea unui obiect situat între focar și lentilă este reală, mărită și răsturnată și prin introducerea sistemului obiect lentilă în apă, poziția imaginii față de lentilă se schimbă.

50. Prin lipirea a două lentile cu aceeași curbură, una convergentă și cealaltă divergentă, convergența sistemului devine nulă, dar nu se corectează aberația de cromaticitate.



51. Luneta este construita din două lentile ocular și servește atât la mărirea obiectelor îndepărtate (stele) cât și la mărirea obiectelor apropiate.

## 8.5. Răspunsuri corecte

### 8.5.1. Tipul I

PUNCTAJ	NUMARUL PROBLEMEI	SOLUȚIA CORECTĂ	EXPLICAȚII
*	1	b	
****	2	1b	$E_1 = \frac{I}{d^2} \quad E_2 = \frac{I \cdot \cos \alpha}{d^2 + h^2} \quad \cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{d^2 + h^2}}$ $\frac{E_1}{E_2} = \frac{h^2 + d^2}{d^2 \cdot h} \cdot \sqrt{d^2 + h^2} = \frac{17 \cdot \sqrt{17}}{16} = 4,38X$
		2c	$E_1 = 3,75$
*	3	a	
**	4	a	$c = 2 \cdot v \cdot Z \cdot 2 \cdot L \quad v = \frac{c}{2 \cdot Z \cdot 2 \cdot L} = 27,7 \cdot \text{Hz}$ $n = 60 \cdot v = 1666,66 \cdot \text{rot/min}$
*	5	c	
****	6	1a 2a 3b	
*	7	b	
**	8	b	
**	9	1b 2a 3b	
****	10	a	$\Delta x = \frac{i \cdot e}{\lambda} \cdot (n-1) = 10 \cdot i \quad k = \frac{x_k}{i} = 10$ $e = \frac{10 \cdot \lambda}{n-1} = 11 \cdot \mu\text{m}$



\*\* 11 b 
$$\alpha = \frac{\lambda}{2 \cdot n \cdot i} = 61,11 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$

\*\* 12 1b

2a

\*\* 13 b

$$\lambda = \frac{x_k}{k \cdot f \cdot n} = 450 \text{ nm}$$

\*\* 14 b

$$x_\lambda = k \cdot f_n \cdot \lambda \quad x_R = k' \cdot f_n \cdot \lambda_R$$

$$x_\lambda = x_R \quad \lambda = \frac{3}{4} \cdot \lambda_R = 525 \text{ nm}$$

\*\*\* 15 1c

$$l \cdot \sin \alpha = k \cdot \lambda \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \quad l = k \cdot \lambda$$

$$\frac{1}{n_1} = k_1 \cdot \lambda \quad \frac{1}{n_2} = k_2 \cdot \lambda \quad k_1 = \frac{1}{\lambda \cdot n_1} = 3,6$$

2b

$$k_2 = \frac{1}{\lambda \cdot n_2} = 9,09 \approx 9$$

\*\* 16 c

$$\text{tg} \alpha \equiv \sin \alpha = \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = n \cdot \lambda \cdot (k_1 - k_2)$$

$$\lambda = \frac{\text{tg} \alpha}{n \cdot (k_1 - k_2)} = \frac{\text{tg} 1^\circ}{40} = 436 \text{ nm}$$

$$\text{tg} \alpha \equiv \sin \alpha = \sin(\alpha_2 - \alpha_1) =$$

$$= \sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 = n \cdot \lambda \cdot (k_1 - k_2)$$

$$\lambda = \frac{\text{tg} \alpha}{n \cdot (k_1 - k_2)}$$

\*\*\* 17

1b

2a

$$\alpha + r_1 = 180^\circ - i_2 \quad \frac{\sin i_1}{\sin r_1} = n$$

$$\sin r_1 = \frac{1}{3} \quad r_1 = \arcsin \frac{1}{3} = 0,6154 \cdot \text{rad} = 19^\circ 28' 16''$$

3b

$$\frac{\sin i_2}{\sin r_2} = \frac{1}{n_2} \quad \sin i_2 = \frac{\sin r_2}{n} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,6154 \cdot \text{rad} = 35^\circ 15' 51''$$



\*\* 18

a

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n \quad \sin i = 0,665 \quad i = 0,79749 \cdot \text{rad}$$

$$i = 41^\circ 40' 56''$$

\*\*\*

19

1b

$$\sin l = \frac{1}{n} = \frac{1}{1,333} \quad l = \arcsin \frac{1}{1,333} = 48^\circ 36' 23''$$

2b

$$\text{tg } 48^\circ 36' 23'' = \frac{x}{10} \quad x = 10 \cdot \text{tg } 48^\circ 36' 23''$$

\*\*

20

a

$$A \leq 2 \cdot \arcsin \frac{1}{n} \quad \sin \frac{A}{2} \leq \frac{1}{n'}$$

$$n' \leq \sqrt{2} \quad n' \leq \sqrt{2} \quad n' < 1,41$$

\*\*

21

b

$$\sin \frac{A + \delta_1}{2} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin \frac{A + \delta_2}{2} \quad \text{unde } \frac{n_1}{n_2} < 1$$

$$\sin \frac{A + \delta_1}{2} < \sin \frac{A + \delta_2}{2} \quad \delta_1 < \delta_2$$

\*\*

22

a

$$\sin \frac{A + \delta_m}{2} = n \cdot \sin \frac{A}{2} = \frac{3}{4}$$

$$A + \delta_m = 2 \cdot \arcsin \frac{3}{4} = 48^\circ 35' 25''$$

$$\delta_m = 37^\circ 10' 50,72''$$

\*\*

23

1b

$$n_2 = n_1 \cdot \text{tg } 57^\circ = 2,309$$

2c

\*

24

b

aproximația gaussiană

\*

25

b

\*\*

26

a

$$\frac{x_2}{x_1} = \beta \cdot \frac{n_2}{n_1} = 5$$

\*\*

27

a

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{f} \quad f = \frac{3}{10} \cdot m$$



\*\*

28

b

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \quad x_2 = 2 \cdot x_1$$

$$x_1 = -5\text{cm} \quad x_2 = -10\text{cm} \quad x_2' = 30\text{cm}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1} \quad x_1' = x_1$$

\*\*\*

29

1b

2c

$$f = \frac{1}{C} = 50\text{cm} \quad \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f} + \frac{1}{x_1}$$

$$x_2 = \frac{-150}{7} \quad \beta = \frac{x_2}{x_1} = -\frac{10}{7}$$

\*\*

30

$$a \quad \frac{\text{tg}\alpha_1}{x} = \frac{1}{f} = C_1 + C_2 \quad x = \frac{\text{tg}\alpha_2}{C_1 + C_2} = 2\text{mm}$$

\*\*\*

31

b

$$G = 5,01 \cdot x \quad P = 20 \cdot m^{-1}$$

\*\*

32

1a

imaginea se formează la infinit.

2a

$$P = \frac{e}{f_1 \cdot f_2} = e \cdot C_1 \cdot C_2 = 21 \cdot m^{-1}$$

\*\*

33

1a

2b

$$G = \frac{f_{ob}}{f_{oc}}$$

\*

34

a

\*

35

b

\*

36

a

\*\*

37

b

$$L = h \cdot v_0 = 12,86 \cdot 10^{-14} \cdot j$$

\*\*

38

b

\*

39

b

\*

40

c

\*\*

41

b

Total puncte: 78 p

Timp optim: 1 h 30 min;

Timp foarte bun: 1 h.



### 8.5.2. Tipul II

NUMĂR PROBLEMĂ

RĂSPUNS DE TIPUL:

42

A

43

B

44

C

45

D

46

E

47

A

48

B

49

D

50

C

51

E

**Timpul total recomandat 10 minute - foarte bine.**



## BIBLIOGRAFIE

1. *Revista de Fizică și Chimie* - Editat de Societatea de Științe fizice și chimice, 1970-1990.
2. *Culegere de probleme de fizică pentru liceu*. Autori: *Optică fizică* - DUMITRESCU OCTAVIAN, PĂTRAȘCU TUDOR; *Optică geometrică* - PANAIOTU LIDIA, Editat de Societatea de Științe fizice și chimice.
3. GH. VLĂDUCA, N. GHERBANOVSKI, M. MELNIC, D. CIUBOTARU, I. MUNTEANU, A. RUSU, I. VÎȚĂ - *Probleme de fizică pentru clasele XI-XII*, Ed. Didactică și Pedagogică \_ București 1983.
4. E. I. TOADER, V. SPULBER - *555 Teste de Optică*, Ed. Didactică și Pedagogică, București - 1989.
5. G. ENESCU, M. GHERBANOVSKI, M. PRODAN, S. LEVAI - *Fizică clasa a XI-a*, (manual), Ed. Didactică și Pedagogică, București 1992.
6. E. LUCA, G. ZET, C. CIUBOTARIU, A. PĂDURARU - *Fizică Generală*, Ed. Didactică și Pedagogică - 1981.
7. I. IRODOV, I. SAVALIEV, O. ZAMCHA - *Recueil de Problemes de Physique Générale*, Ed. Mir - Moscou - 1976.
8. B. M. IAVORSKI, A. A. DETLAF - *Kurs Fiziki*, vol. 3 Ed. Vâșșăia Școla - 1967.
9. I. BUNGET, L. BURLACU, D. CIUBOTARU, A. COSTESCU, V. FLORESCU, L. GEORGERCU, M. RUSU - *Compendiu de Fizică pentru admitere în Învățământul Superior*, Ed. Științifică - București 1971.
10. M. SANDU - *Probleme de fizică*, Ed. Scrisul Romînesc - Craiova 1987.
11. R. ȚÎȚEICA, I. POPESCU - *Fizică Generală*, vol. 1-3, Ed. Tehnică - București - 1973.
12. KVANT - 1990-1994.



Cartea prezentă este elaborată după notițele unui profesor preparator (incorect numit mediator) pregătite pentru elevii cu performanțe școlare mai modeste.

Titlul cărții explică tratarea deosebită a fenomenelor și a rezolvărilor de probleme. Nu s-a pus accent, atât de mult, pe originalitatea problemelor cât pe alegerea acelor probleme considerate de referință.

Experiența didactică arată că, pentru o mare parte din elevii considerați în prezent ca neperformanți, este utilă prezentarea redundantă a unor calcule, desene, notații, uneori subînțelese, dar pe care elevul trebuie să le vadă, măcar într-o carte, în mod repetat.

Cartea este structurată ca un manual alternativ și cuprinde materia în ordinea tradițională, fiind utilă în primul rând elevilor și profesorilor de liceu. Dar cartea este în egală măsură utilă și pentru candidații la examenul de admitere în facultate, studenților din primii ani, tehnicienilor precum și oricărui autodidact care dorește să se inițieze în acest capitol de Fizică, devenit extrem de actual în tehnica de vârf a comunicațiilor, în dezvoltarea unor ramuri de tehnică cum este Optica Electronică.